# COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

## Historia y Características principales

El fallecimiento prematuro de Ernesto Paenza, un ferviente promotor del desarrollo científico en la Argentina, ocurrido el 28 de agosto de 1985, es lo que ha motivado a su familia para la creación de la Fundación que lleva su nombre.

Esta competencia es organizada y financiada por dicha Fundación, y cuenta con el auspicio de la Unión Matemática Argentina.

La competencia está abierta para todos los departamentos de Matemática de Universidades del país. En ella pueden inscribirse los alumnos regulares todavía no graduados a la fecha de realización de la prueba. Esta es individual y no se permite ninguna consulta personal ni bibliográfica durante su desarrollo.

Los ejercicios son de relativa dificultad y está fuera de nuestra intención que algún participante logre el puntaje total. Se considera meritorio ya la obtención de puntaje por la resolución de algún ejercicio.

Es nuestra idea también que los alumnos participantes y profesores supervisores sigan pensando y resolviendo los problemas de la prueba en los días y/o semanas subsiguientes a la realización de la misma, esta vez sólo por el placer y la satisfacción de resolverlos.

El Comité Organizador establecerá un orden de méritos individual, de acuerdo con el puntaje obtenido en la prueba. Asimismo, y en base a estos datos, quedarán ordenadas también las instituciones, para lo que se sumarán los puntajes de sus 3(tres) representantes mejor calificados.

Se otorgan 5 (cinco) premios individuales del primero al quinto en el orden de méritos. Ellos constan de una medalla, y, respectivamente 1000, 800, 600, 400 y 200 australes de octubre de 1985 a octubre del año en curso. Además, los cinco siguientes en el orden de méritos reciben mención honorable, testimoniado en una medalla.

Todos los participantes que hayan obtenido por lo menos 5 (cinco) puntos (medio ejercicio) reciben un diploma testimonio de su participación y de la posición obtenida.

Las 10 (diez) primeras instituciones (siempre que hayan obtenido por lo menos 10 (diez) puntos) reciben una plaqueta testimonio de su participación y de la posición obtenida. Las tres primeras reciben 500 australes (actualizados de la misma manera que los premios indiiduales) cada una, por ejemplo, en forma de libros o revistas que soliciten oportunamente a la Fundación Paenza.

El Comité Organizador de la competencia es el siguiente: Presidente, Alberto P. Caldrón; Vicepresidente Ejecutivo, Eduardo J. Dubuc; Asesores, Carlos Cabrelli, Alicia Dickenstein, Adrián Paenza, Carmen Sessa.

Aprovechamos esta oportunidad para invitar a toda institución que desee participar a comunicarse con nosotros. Aquellas que ya hayan participado serán contactadas automáticamente. Recordamos que un alumno que ya haya participado puede participar nuevamente, siempre que en el interín no se haya graduado.

<u>Correspondencia a:</u>

Dr. Eduardo J. Dubuc
Vicepresidente Ejecutivo
Fundación Ernesto Paenza
Tucumán 1738 - 1° "A"
1050 - Capital Federal

RESULTADOS DE LA TERCERA REALIZACION 1988.

Participaron 118 alumnos pertenecientes a 13 instituciones en todo el país.

El primer premio, 15.000 australes, fue obtenido por Rubén Fernando Krasnopolsky, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

El segundo premio, 12.000 australes, fue obtenido por Eduardo Alberto Jagla, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

El tercero, cuarto y quinto premios, 9.000, 6.000 y 3.000 australes respectivamente, fueron repartidos entre tres participantes que obtuvieron el tercer mayor puntaje.

Estos tres terceros premios, 6.000 australes cada uno, fueron obtenidos por Gerardo Garbulsky y Jimmy Petean,de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, y por Juan Pablo Rosseti, de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba.

Cada uno de ellos recibe además una medalla testimonio.

Los siguientes nueve participantes obtuvieron entre el sexto y el décimo mejor puntaje. Ordenados alfabéticamente y por institución, Horacio Casini, de la Facultad de Ciencias Exactas,Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, Alvaro Corvalán, Pablo Eduardo Giambiagi, Guido Kampel y Daniel Silber Schmidt, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, Ernesto Federico Leale de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan, Daniel Olivares y Daniel Rubén Tuchsznajder, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos aires, y Pedro José Ruiz, de la Escuela Latino Americana de Informática (ESLAI) de la Universidad de Luján. Cada uno de ellos recibe una medalla de mención honorable.

Los resultados por Institución, ordenados sumando los puntajes obtenidos por sus tres mejores participantes son los siguientes:

La primera y dos segundas:

1) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
2) Escuela Latino Americana de Informática (ESLAI), Universidad de Luján.
   Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

   Cada una de ellas recibe un premio de 7.500 australes.

Las tres siguientes instituciones son:

4) Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan.
5) Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.
5) Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario.

PROBLEMAS.

Cada uno con un máximo de 10 puntos, fueron los siguientes:

Problema 1.

Cuando el número $4444^{4444}$ es escrito en notación decimal, la suma de sus dígitos es A. Llamemos B a la suma de los dígitos de A. Encuentre la suma de los dígitos de B.

Problema 2.

Una caja contiene p bolillas blancas y q negras. Al lado de dicha caja, hay una pila con por lo menos (p+q) bolillas negras.

Se eligen dos bolillas de la caja al azar y se efectúa el siguiente procedimiento:

a) Si las dos bolillas son del mismo color, quedan afuera de la caja, pero se incluye en ella una bolilla negra de la pila.

b) Si las dos bolillas son de diferente color, se repone la blanca en la caja.

Se continúa hasta que se sacan las dos últimas y se coloca una en la caja. Cuál es la probabilidad que esta sea blanca?

Problema 3.

Se tienen dos números naturales $q > p$, tal que

$$(p/q)^2 < 2.$$

Pruebe entonces que

$$((p/q) + (1/4p^2))^2 < 2.$$

Problema 4.

Encuentre la longitud de la sucesión más larga de dígitos iguales no nulos en la que termina el cuadrado de un número entero-escrito en base 10- y exhiba el menor cuadrado que termine en tal sucesión.

Problema 5.

Un soldado necesita verificar la presencia de minas explosivas en una región que tiene la forma de un triángulo equilátero. El radio de acción de su detector es igual a la mitad de la altura del triángulo.

El soldado está parado en uno de los vértices del triángulo. Qué camino debería seguir, si pretende recorrer la menor distancia posible pero llevando a cabo su misión?

Problema 6.

Se tiene una sucesión de números reales no negativos, que satisfacen la siguiente propiedad

$$a_{n+m} \le a_n + a_m$$

Pruebe entonces que siempre existe el límite de la sucesión $(a_n/n)$.

Problema 7.

Se tienen 12 monedas indistinguibles por su aspecto exterior, pero con la particularidad que 11 de ellas pesan igual y la restante no.

Si se dispone de una balanza con dos platillos, cómo puede hacerse para determinar cuál es la moneda que pesa distinto en sólo tres pesadas.

Problema 8.

Sea $f\colon R \to R$ una función dos veces derivable, y $a\colon R \to R$ una función continua que verifica:

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} a(x) = -\infty$$

Si se sabe que $f(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$f''(x) = a(x)f(x)$$

y las condiciones iniciales

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = 0,$$

pruebe que los ceros de $f(x)$ están acotados superiormente, pero no inferiormente.

SOLUCIONES.

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. Son aquellas que más nos gustaron, además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican, considerando los 100 primeros participantes: La primera coordenada, la cantidad que obtuvo 8, 9 ó 10 puntos en el problema (problema esencialmente bien resuelto). La segunda coordenada la cantidad que obtuvo 5, 6 ó 7 puntos (esencialmente la "mitad o un poco más" del problema). La tercera coordenada, la cantidad que obtuvo 1,2, 3 ó 4 puntos (casos particulares, o algo conducente a una posible solución). La cuarta coordenada, el complemento den 100 (aquellos que no hiciero nada).

Problema 1 (5,1,4,90)

(Solución de Horacio Casini, de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario).

Sea C = suma de los dígitos de B. Si $10^k \equiv 1 \bmod(9)$, se tiene $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_o 10^a \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_o \bmod(9)$. Entonces tenemos $4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C(9)$. Pero $4444 \equiv 7(9) \Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{4444}(9)$. Además $7^3 = 343 \equiv 1(9) \Rightarrow 7^{4444} \equiv 7^{4443}.7 \equiv 1.7 \equiv 7(9)$. Por lo tanto $C \equiv 7(9)$.

Por otro lado, $4444^{4444} < 10^{4 \times 4444}$; luego una cota superior para A es $9 \times 4 \times 4.444 \leq 10^6$; luego una cota superior para B es $9 \times 6 = 54$ y por último una cota superior para C es $5 + 9 = 14$. Pero entonces $C \equiv 7(9)$ y $C \leq 14$, de donde $C = 7$.

Problema 2 (15,4,2,79)

(Solución de Fabiana Krongold de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires).

Es claro que mediante este procedimiento, la cantidad de bolillas blancas que quedan en la caja después de cada operación es par si había una cantidad par de bolillas blancas e impar si había una cantidad impar de bolillas blancas. Como en cada extracción disminuye en 1 el número de bolillas en la caja, finalmente habrá una única bolilla en la caja. Como en este momento el número de bolillas blancas tiene que tener la misma paridad que p, es claro que esta bolilla será blanca sí y sólo si p es impar. Luego, la probabilidad buscada es 1 si p es impar y 0 si p es par.

Problema 3 (0,0,2,98)

(Solución del Comité Organizador)

Por hipótesis, $p^2 < 2q^2$ y $p^2$, $2q^2 \in N$, luego

$$p^2 \leq 2q^2 - 1$$

tenemos que

$$\left( \frac{p}{q} + \frac{1}{4p^2} \right)^2 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{1}{2qp} + \frac{1}{16p^4}$$

$$\leq \frac{2q^2 - 1}{q^2} + \frac{1}{2qp} + \frac{1}{16p^4} = 2 - \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2qp} + \frac{1}{16p^4}$$

Basta ver entonces, que $- \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2qp} + \frac{1}{16p^4} < 0$ pero $q < p$.

Luego $- \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2qp} + \frac{1}{16p^4} < - \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{16q^4} =$

$$= - \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{16q^4} = \frac{1}{2q^2} \left( -1 + \frac{1}{8q^2} \right) < 0.$$

Problema 4 (13,3,2,82)

(Si bien hay varias soluciones correctas, todas ellas son demasiado largas. Sclución del Comité Organizador).

Sea $x \in \mathbb{Z}$ cualquiera:

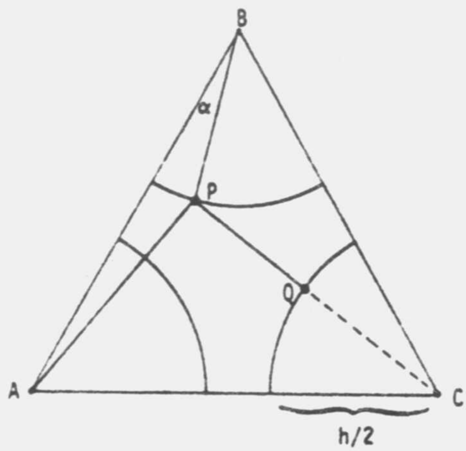
1. $x^2 \equiv 0,1,4,5,6$ ó $9 \pmod{10}$.
2. Si $x^2 \equiv 11,55$ ó $99 \pmod{100}$ entonces $x^2 \equiv 3 \pmod 4$, hecho suceder.
3. Si $x^2 \equiv 66 \pmod{100}$ entonces $x^2 \equiv 2 \pmod 4$ lo que es imposible también.
4. Luego, la única alternativa es que $x^2 \equiv 44 \pmod{100}$.
5. Si $x^2 \equiv 4444 \pmod{10000}$ entonces $x^2 \equiv 12 \pmod{16}$, imposible.

De manera que cuatro números consecutivos no pueden darse. Queda preguntarse si para algún $x$, $x^2 \equiv 444 \pmod{1000}$. Esto sucede para $x = 38$, $x^2 = 1.444$, que es la respuesta.

Problema 5 (6,13,6,75)

(Muchos participantes dieron la trayectoria correcta)

Sea h = altura. El soldado deberá pasar por lo menos por un punto de cada uno de los tres arcos con centro en los vértices y radio h/2. Si parte de A y se dirige a B, tocará el arco con centro en B en un punto P. Luego se dirige hacia C hasta detenerse en un punto Q sobre el arco con centro en C.




<u>La trayectoria mínima</u> (Demostración de varios participantes): Por el principio de Fermat, la trayectoria es mínima si forma ángulos iguales con respecto a la normal en el punto P al arco con centro en B. Ello sucede si P es el punto medio (ángulo $\alpha = 30°$).

(Demostración del Comité Organizador) Damos una solución puramente matemática. Minimizar el recorrido APQ es equivalente a minimizar APC pues la distancia del arco a C es constante. Consideremos la elipse con focos en A y C que pasa por P. Resulta tangente al arco con centro en B precisamente cuando P es el punto medio (ángulo $\alpha = 30°$). Todo otro punto del arco queda fuera de la elipse, determinando por lo tanto una trayectoria mayor.

<u>El soldado cubre todo el triángulo</u> (Demostración de Eduardo A. Jagla de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires): Todo punto a la izquierda de Q está a distancia menor que h/2 de algún punto del camino (aquel que está en la misma vertical). Claramente el círculo con centro en Q y radio h/2 cubre todos los puntos que quedan a la derecha de Q.

<u>Problema 8</u> (0,2,6,92)
(Solución del Comité Organizador)

<u>Las raíces están acotadas superiormente</u>: Sea $\alpha$ tal que

$$a(x) > 0 \qquad \text{si } x \geq \alpha$$

Veamos que f no tiene más que un cero en el intervalo $[\alpha,+\infty)$. Supongamos que $f(x_1)=f(x_2)=0$, con $\alpha \leq x_1 < x_2$. Luego, como f no es idénticamente cero en $[x_1,x_2]$, podemos suponer S.P.G. que $\exists\, x \in [x_1, x_2]$, y supongamos que es alcanzado en $x_3$. Luego $f(x_3) > 0$, $f'(x_3) = 0$ y $f''(x_3) \leq 0$, pero esto es absurdo, ya que f y f'' tienen el mismo signo en $[\alpha, +\infty)$.

<u>Las raíces no están acotadas inferiormente</u>: Sea $\beta$ tal que $a(x) < -1$ $\forall x \leq \beta$. Veamos que $\forall x_0 \leq \beta$, f tiene una raíz en $(-\infty, x_0]$. Supongamos que no. Luego f tiene signo constante en $(-\infty, x_0]$ para algún $x_0$. Podemos suponer S.P.G. que f es positiva en ese intervalo.

Sea $x_1 \leq x_0$, cualquiera, tenemos que

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)^2 f''(\xi),$$

con $\xi$ entre x y $x_1$.

Luego si $x \leq x_0$, tenemos $\xi < x_0$,
tenemos $\xi < x_0$ y $h''(\xi) < -h(\xi) < 0$ y luego

$$f(x) < f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

Si pudiéramos elegir $x_1$ tal que $f'(x_1) > 0$, esto mostraría que $f(x) < 0$ para algún x suficientemente grande negativo, contrariamente a lo que habíamos supuesto. Luego, supongamos que $f'(x) \leq 0$ $\forall x \leq x_0$. Pero esto implica $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \leq x_0$, luego

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)^2 f''(\xi),$$

luego

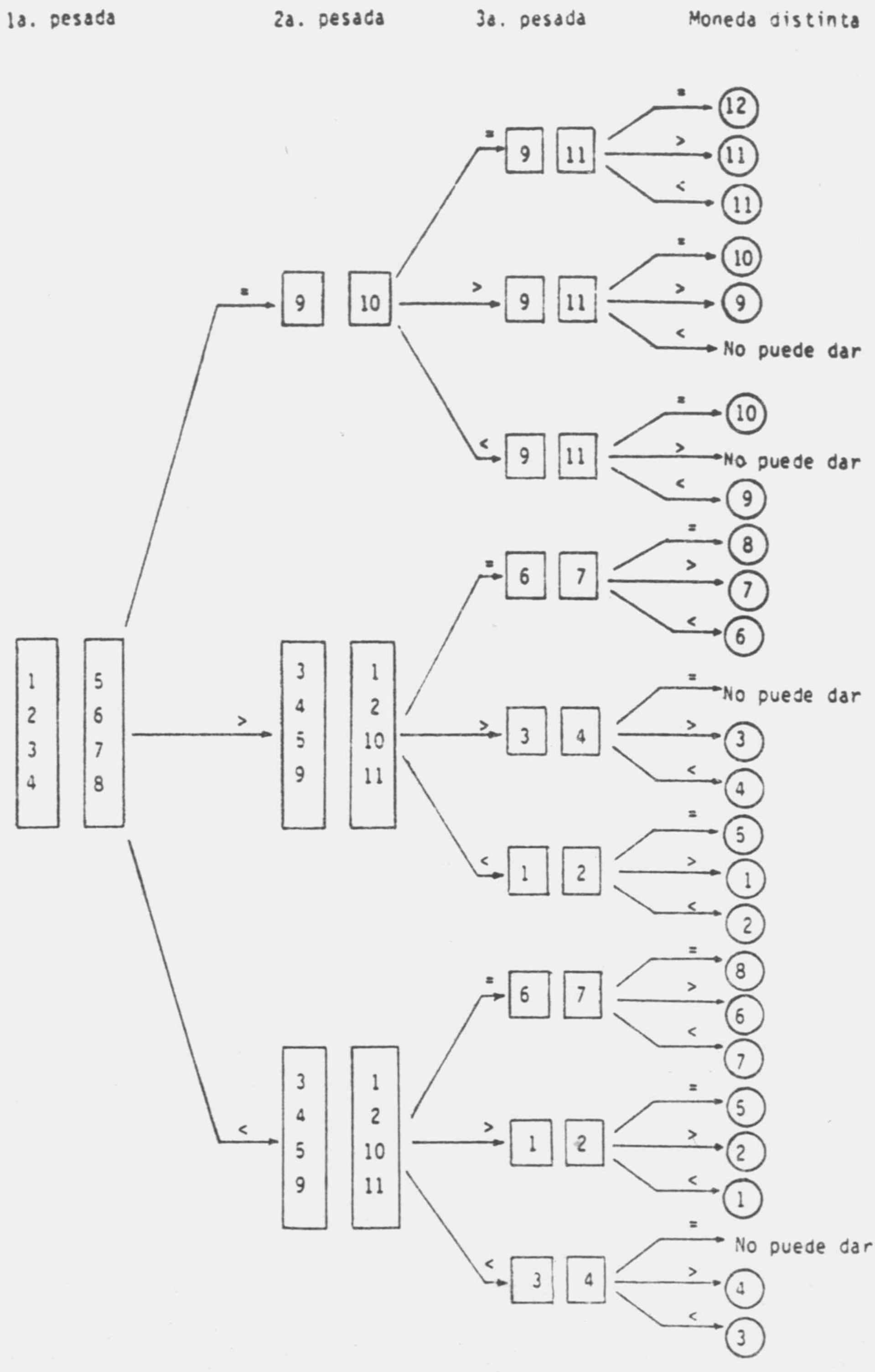
$$(*) \qquad f(x) < f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) - \frac{1}{2}(x - x_1)^2 f(x_0)$$

(ya que $f''(\xi) = a(\xi)f(\xi) < -f(x_0)$) y (*) muestra que f(x) es negativa para valores negativos de x suficientemente grandes, lo que nuevamente da una contradicción.

<u>Problema 7</u> (36,2,2,61)

(Solución de Ariel Carp, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires)

Se numeran las bolillas de 1 a 12 y se realizan las pesadas según el esquema:


1a. pesada
2a. pesada
3a. pesada
Moneda distinta
1 2 3 4
5 6 7 8
9
10
3 4 5 9
1 2 10 11
9 11
6 7
3 4
1 2
12
11
10
No puede dar
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Problema 6 (0,0,4,96)
(Solución del Comité Organizador)

Como $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, tenemos, por ejemplo, $a_{2k} \leq 2a_k$, y así, inductivamente, $a_{nk} \leq na_k$. Si $A = a_1$, se tiene $0 \leq a_n/n \leq A$. Luego la sucesión $a_n/n$ es acotada. Sea b su límite inferior. Vamos a probar que b es, de hecho, el límite. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos k tal que $b + \varepsilon - a_k/k > 0$.
Si $n = qk + r$, $1 \leq r \leq k$, se tiene:

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qk+r}}{n} \leq \frac{qa_k}{n} + \frac{a_r}{n} \leq \frac{a_k}{k} + \frac{a_r}{n} \leq \frac{a_k}{k} + \frac{B}{n}$$

donde $B = \text{máximo } \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Como $(b+\varepsilon-a_k/k) > 0$, se tiene que para n suficientemente grande, $a_n/n < a_k/k + (b+\varepsilon - a_k/k) = b+\varepsilon$. Por otro lado, por definición de b, $a_n/n > b - \varepsilon$.

AGRADECIMIENTOS.

Toda la tarea de administración de datos, planillas e intercambio de correspondencia recayó sobre Marcelo Kofman. Angel Ramini se encargó de hacer llegar las pruebas a cada institución participante. La diagramación y mecanografía de esta comunicación fue hecha por Leticia Scoccia.

A ellos el Comité Organizador les agradece su colaboración.