FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Aldo Figallo y Paolo Landini

INTRODUCCION.

En la primera redacción de este artículo los conceptos usados eran los introducidos en [1], pero a sugerencia de J. Vargas hemos decidido realizar algunos cambios, para tal fin, en primer lugar, generalizamos la noción presentada en [2] de sector angular, que nosotros llamamos aquí sector angular básico. Luego modificamos la definición 2.1 de [1] de medida de sector angular. Finalmente continuamos con el tema objeto de esta nota, que es presentar una definición de las funciones trigonométricas (seno y coseno), como extensión de ciertas funciones particulares donde hacemos uso de los sistemas generales de medición de sectores angulares.

En toda la exposición, la terminología usada es la de [2].

1. SISTEMAS DE MEDICION DE SECTORES ANGULARES.

1.1. Recordemos que:

1.1.1. Un ángulo del plano π es la unión de dos semirrectas no opuestas con origen común. Las semirrectas se llaman los lados del ángulo y el origen común se llama el vértice del mismo. Para denotar el ángulo de lados $\vec{ab}$ y $\vec{ac}$ escribimos $<bac$ o $<cab$ (Fig.1).

1.1.2. Dado el ángulo $<aob$ y las rectas A y B que contienen a sus respectivos lados, el sector angular básico S.A.B (aob) es el conjunto $A_b \cap B_a$ ([2], pág. 76), las semirrectas $\vec{ob}$ y $\vec{oa}$ se llaman los lados del sector angular, y o el vértice del mismo (Fig. 2).

1.1.3. Dos sectores angulares básicos S.A.B (mon) y S.A.B(m'o'n') se dicen consecutivos si $o = o'$, si los ángulos $<mon$ y $<m'o'n'$ tienen un lado en común y si los puntos n', m estan en semiplanos opuestos de la recta $\overleftrightarrow{on}$.(Fig. 3).

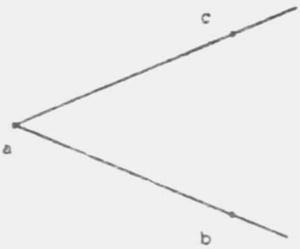

Fig.1

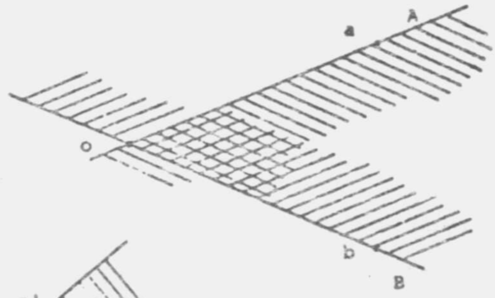

Fig.2

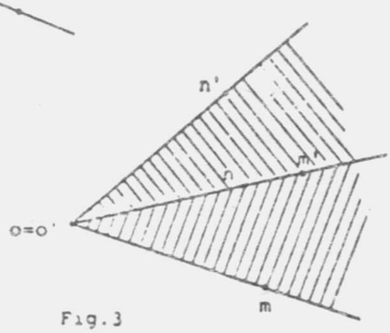

Fig.3

1.2. DEFINICION: Un conjunto del plano π se llama un sector angular si es unión de sectores angulares básicos consecutivos, o si es una semirrecta. En este último caso diremos que es un sector angular nulo.

1.3. OBSERVACIONES Y NOTACIONES

1.3.1. Todo sector angular básico es un sector angular.

1.3.2. Un semiplano es un sector angular. Llamaremos a los semiplanos, sectòres angulares llanos.

1.3.3. El plano π es un sector angular, lo llamaremos el sector angular total, y desde ahora en adelante lo representaremos con T.

1.3.4. Si definimos a los sectores angulares consecutivos de manera análoga a la hecha para sectores angulares básicos, tenemos que la unión de sectores angulares consecutivos es un sector angular.

1.3.5. Todo sector angular de T determina un ángulo, el vértice de dicho ángulo se dirá el vértice del sector angular.

1.3.6. Todo ángulo $\sphericalangle aob$ de T determina dos sectores angulares que representaremos con S.A(aob) y S.A(boa) = (T - S.A(aob)) $\cup \sphericalangle aob$ (Fig. 4).

1.3.7. Con S(A) representaremos al conjunto de todos los sectores angulares.

1.3.8. Cuando no haya lugar a confusión indicaremos a los sectores angulares con letras minúsculas latinas o griegas estrelladas. Cuando necesitemos destacar que el vértice del sector angular $\overset{*}{\alpha}$ es el punto p, escribiremos $\overset{*}{\alpha}_p$.

1.3.10. Si F y Q son dos figuras de T congruentes ([2], pág. 165) escribiremos $F \equiv Q$.

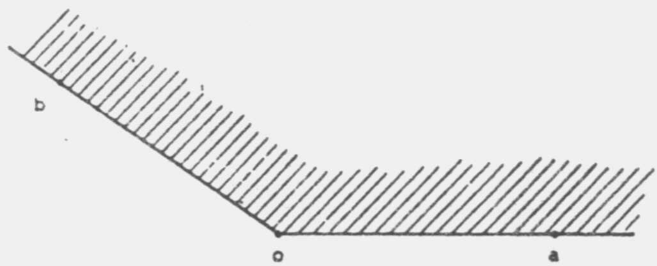

Fig.4

1.4. DEFINICION: Una función $m:S(A) \to R^+$, se dice un sistema de medición de sectores angulares (S.M.A.) si verifica las siguientes propiedades:

M1) $m(\overset{*}{\mu}) = 0$ si y solo si $\overset{*}{\mu}$ es un sector angular nulo.

M2) Si $\overset{*}{\alpha} \equiv \overset{*}{\beta}$ es $m(\overset{*}{\alpha}) = m(\overset{*}{\beta})$.

M3) Si $\overset{*}{\alpha}$ y $\overset{*}{\beta}$ son consecutivos y $m(\overset{*}{\alpha})+m(\overset{*}{\beta}) \leq m(T)$ entonces $m(\overset{*}{\alpha}\cup\overset{*}{\beta})=m(\overset{*}{\alpha})+m(\overset{*}{\beta})\leq m(T)$ entonces $m(\overset{*}{\alpha}\cup\overset{*}{\beta})=m(\overset{*}{\alpha})+m(\overset{*}{\beta})$.

1.5. OBSERVACION: Si $m:S(A)\to R^+$ es un S.M.A. y $\tau=m(T)$ entonces $m(S(A))=\{m(\overset{*}{\alpha}): \overset{*}{\alpha}\in S(A)\} = [0,\tau] \subseteq R^+$.

En lo que sigue consideraremos una clase particular de S.M.A.

1.6. DEFINICION: Un S.M.A. se dice completo si $m(S(A))=[0,\tau]$.

1.6.1. Es claro que un S.M.A. es completo si y solo si para cada número real α con $0 \leq \alpha \leq \tau$ existe un sector angular $\overset{*}{\alpha}\in S(A)$ tal que $m(\overset{*}{\alpha}) = \alpha$.

1.6.2. PROBLEMA: Indicar un ejemplo de un S.M.A. que no sea completo.

En [1] hemos estudiado con cierto detalle el Sistema Radial y el Sistema Sexagesimal. Para lo que sigue necesitamos la siguiente noción:

1.7. Si $f:A \to B$ y $g:C \to D$ son funciones, se dice que g es una extensión o ampliación de f si se verifica:

1°) $A \subseteq C$, $B \subseteq D$.

2°) $f(a)=g(a)$ para todo $a \in A$

2. LA FUNCION $S_{1,m}$ Y ALGUNAS PROPIEDADES

2.1. Consideremos un S.M.A. completo $m:S(A) \to R^{+}$ y sea $r=\frac{1}{4}m(T)$. Para cada $\alpha \in (0,r) \subseteq R$ consideremos un triángulo rectángulo como el de la figura 5, donde $d(a,b)$, $d(b,c)$ y $d(a,c)$ designan las medidas euclídeas de los segmentos $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$ respectivamente, $\sphericalangle$ abc es el ángulo recto y $\overset{*}{\alpha}_a = S.A(cab)$ es tal que $m(\overset{*}{\alpha})=\alpha$.

Definimos la función $S_{1,m}:[0,r] \to R$ por medio de la fórmula

$$S_{1,m}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x=r \\ \dfrac{d(b,c)}{d(a,c)} & \text{si } x=\alpha \end{cases}$$

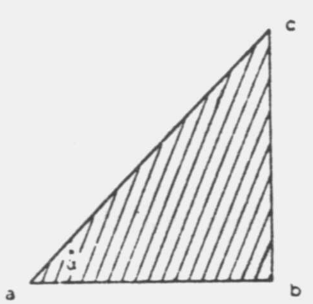

Fig.5

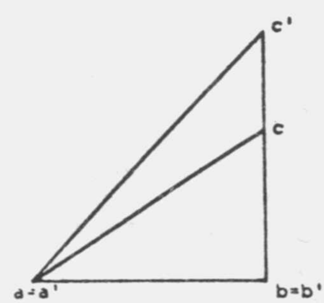

Fig.6

Con el objeto de graficar la función $S_{1,m}$ indicaremos algunas propiedades.

2.2. LEMA: Se verifica:

1°) $S_{1,m}$ es una función acotada y para todo $x \in [0,r]$ vale $0 \leq S_{1,m}(x) \leq 1$

2°) $S_{1,m}(\frac{r}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_{1,m}(\frac{r}{3}) = \frac{1}{2}$, $S_{1,m}(\frac{2}{3}r) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3°) $S_{1,m}$ es una función creciente, esto es: si $x,y \in [0,r]$ con $x \leq y$ (1) entonces $S_{1,m}(x) \leq S_{1,m}(y)$ $S_{1,m}(x) \leq S_{1,m}(y)$ (2).

DEMOSTRACION: Solo demostraremos 3°): Es claro que si $x=0$ o $y=0$, (2) se verifica. Supongamos ahora que vale $0 < x \leq y < r$ y consideremos los triángulos Δabc y $\Delta a'b'c'$ como los de la figura 6 con $x=m(\overset{*}{\alpha}_a)$, $y=m(\overset{*}{\alpha}'_a)$, por 2.1.

$S_{1,m}(x) = \frac{d(b,c)}{d(a,c)}$ (3), $S_{1,m}(y) = \frac{d(b',c')}{d(a',c')}$ (4). Por otra parte como $0 \leq d(a,c) \leq d(a',c')$, entonces $\frac{d(a,b)}{d(a',c')} \leq \frac{d(a,b)}{d(a,c)}$ (5). De (5)

$1 - \frac{d^2(a,b)}{d^2(a,c)} \leq 1 - \frac{d^2(a,b)}{d^2(a',c')}$ (6). De (6) $\frac{d^2(b,c)}{d^2(a,c)} \leq \frac{d^2(b',c')}{d^2(a',c')}$ (7),

y por lo tanto $\frac{d(b,c)}{d(a,c)} \leq \frac{d(b',c')}{d(a',c')}$ (8). De (8), (3) y (4) queda comprobado (2).

2.3. PROBLEMA: Sea $m: S(A) \to R^+$ un S.M.A. completo, $\overset{*}{r}_p$ un sector angular recto y $\overset{*}{\alpha}_p$ un sector angular tal que $\overset{*}{\alpha}_p \leq \overset{*}{r}_p$. Probar que se verifica:

$$m(\overset{*}{\alpha}_p) \leq S_{1,m}(m(\overset{*}{\alpha}_p)).\ m(\overset{*}{r}_p)$$

2.4. Usando 2.2., 1°), 2°) y 3°) podemos hacer una representación gráfica de $S_{1,m}$. (Fig. 7).

3. LA FUNCION Sen_m

Vamos a definir ciertas extensiones de la función $S_{1,m}$:

3.1. $S_{2,m}:[0,2r]\to R$ (Fig. 8)

$$S_{2,m}(x) = \begin{cases} S_{1,m}(x) & \text{si } 0\leq x\leq r \\ S_{1,m}(2r-x) & \text{si } r\leq x\leq 2r \end{cases}$$

3.2. $S_{3,m}:[0,3r]\to R$ (Fig. 9)

$$S_{3,m}(x) = \begin{cases} S_{2,m}(x) & \text{si } 0\leq x\leq 2r \\ -S_{1,m}(x-2r) & \text{si } 2r\leq x\leq 3r \end{cases}$$

3.3. $S_{4,m}:[0,4r]\to R$ (Fig. 10)

$$S_{4,m}(x) = \begin{cases} S_{3,m}(x) & \text{si } 0\leq x\leq 3r \\ -S_{1,m}(4r-x) & \text{si } 3r\leq x\leq 4r \end{cases}$$

3.4. DEFINICION: Llamaremos función $Sen_m:R\to R$ a la definida por la fórmula:

$$Sen_m(x) = Sen_{4,m}(\alpha) \text{ donde } x=t.4r+\alpha \text{ con } t \text{ entero y } 0\leq\alpha<4r.$$

3.5. El gráfico de la función Sen_m, (Fig. 11).

3.6. En el caso que el sistema de medición sea el radial, la función definida en 3.4. se llamará la función seno, y para abreviar escribiremos senx en lugar de $Sen_R x$.

Si esta presentación de la función seno se lee con cierta ligereza, tal vez el lector piense que lo único que se ha hecho es introducir complicaciones innecesarias, pero anali

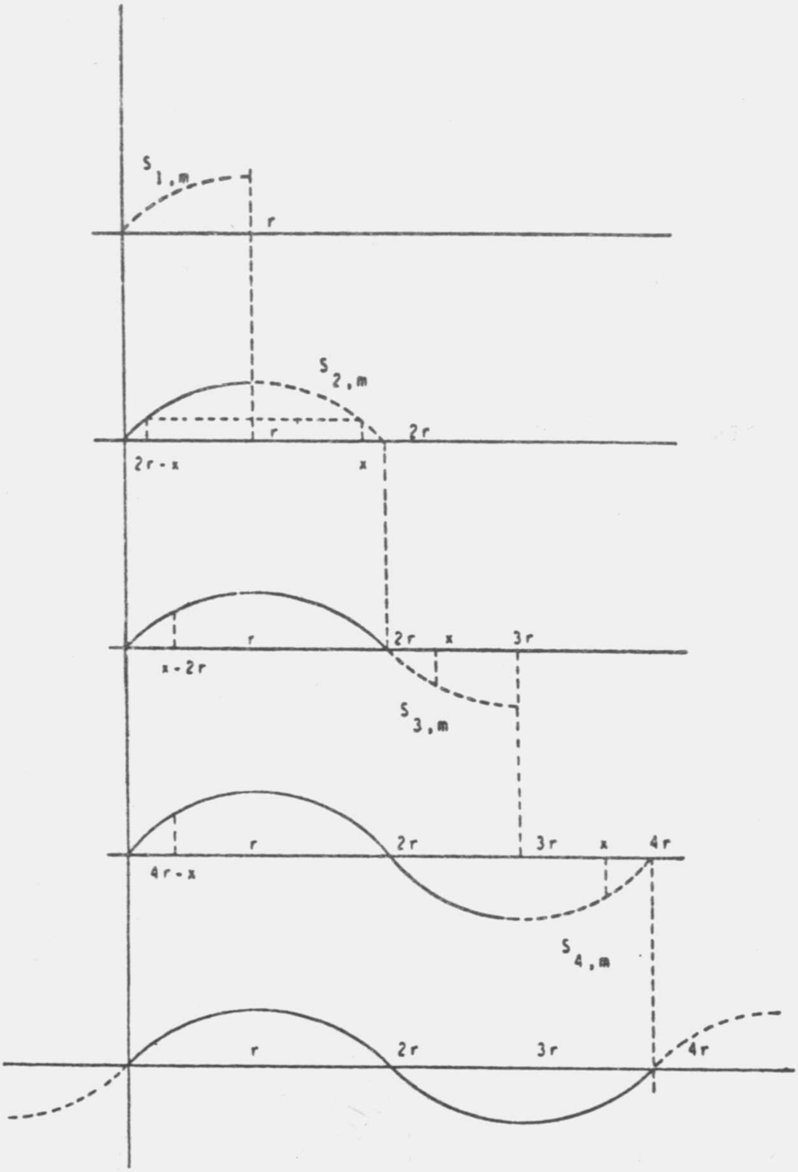

Fig.7

Fig.8

Fig.9

Fig.10

Fig.11

zando este método con cierto detalle, podrá observar que presenta algunas ventajas. A continuación enunciamos una de ellas, que en nuestra opinión es importante. Para fijar ideas trabajaremos con el sistema radial.

3.7. LEMA: La función seno tiene las siguientes propiedades: Si $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces:

1°) Si $\alpha + \beta = \pi$ entonces sen α = sen β

2°) Si $\alpha = \pi + \beta$ entonces sen α =-sen β

3°) Si $\alpha = 2\pi - \beta$ entonces sen α = -sen β

DEMOSTRACION: Es una consecuencia trivial de la definición 3.4.

3.8. INTERPRETACION GEOMETRICA

Consideremos la circunferencia C centrada en el origen de coordenadas $(X,Y)_o$, de radio 1, y sea p un punto de ella. Supongamos que las coordenadas cartesianas de p son (x,y) y sea q un punto del eje X de coordenadas $(x,0)$.

Sea $\overset{*}{\alpha}_o = p_q \cap X_p$, (Fig. 12), entonces si $m(\overset{*}{\alpha}_p) = \alpha$, es claro que se verifica: $y = \text{sen}_{4,m}\alpha$ (1), esto es, si p se desplaza sobre C en sentido antihorario, determinando un sector angular de medida tal que $0 \leq \alpha < m(T)$, entonces la ordenada de p es $\text{Sen}_{4,m}\alpha$. Si ahora pensamos que p ha dado $|n|$ giros, en el sentido antihorario si $n > 0$ o en el sentido horario si $n < 0$, con n entero y $x = n.m(T) + \alpha$ entonces la ordenada de p es $\text{Sen}_m(x)$. (Fig. 13 y 14).

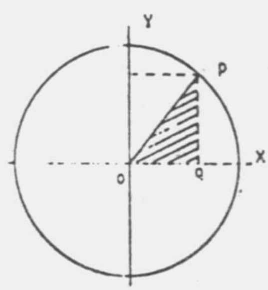

Fig.12

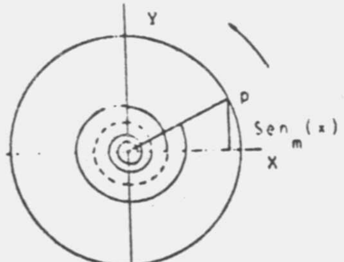

Fig.13

Fig.14

La interpretación anterior nos sugiere la siguiente:

3.9. DEFINICION: Sea un S.M.A. completo $r:S(A)\to R^{+}$, T el sector angular total. Llamaremos ángulo de más de un giro a todo número real x tal que $m(T)< x$ o $x<-m(T)$. Y diremos que x contiene $|n|$ giros si $x = n.m(T)+\alpha$ con $0\leq \alpha < m(T)$, con n entero.

3.10. CONVENCION: Para la función Sen_m se suele usar la siguiente notación $Sen_m\ \alpha = Sen(\alpha)_m$, así por ejemplo: $Sen_S 45 = Sen\ 45°$ y $Sen_R(\frac{\pi}{4}) = Sen(\frac{\pi}{4})Rad.$ o simplemente $Sen\ \frac{\pi}{4}$. Luego cuando escribamos la expresión $Sen\ \frac{\pi}{4} = Sen\ 45°$ (1), el símbolo Sen del primer miembro de (1) significa Sen_R y el símbolo Sen del segundo miembro de (1) significa Sen_S. Es decir estamos utilizando el mismo símbolo Sen para representar funciones distintas.

4. LA FUNCION Cos_m Y ALGUNAS PROPIEDADES

En éste párrafo trabajaremos de un modo totalmente análogo al de 2. y 3. .

4.1. Consideremos un S.M.A. completo $m:S(A)\to R^{+}$ y sea $r=\frac{1}{4}m(T)$. La función $C_{1,m}:[0,r]\to R$ está definida por medio de la fórmula:

$$C_{1,m}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x=r \\ \dfrac{d(a,b)}{d(a,c)} & \text{si } x=\alpha \quad \text{(Fig.5)} \end{cases}$$

Con el objeto de graficar la función $Cos_{1,m}$ indicaremos algunas propiedades.

4.2. LEMA: Se verifica:

1°) $C_{1,m}$ es una función acotada y para todo $x\in[0,r]$ vale $0\leq C_{1,m}(x)\leq 1$

2°) $C_{1,m}(\frac{r}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $C_{1,m}(\frac{r}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $C_{1,m}(\frac{2}{3}r) = \frac{1}{2}$

3°) $C_{1,m}$ es una función decreciente, esto es: si $x,y\in[0,r]$ con $x\leq y$ entonces $C_{1,m}(x)\geq C_{1,m}(y)$

4.3. Usando 4.2., 1°), 2°) y 3°) podemos hacer una representación gráfica de $C_{1,m}$ (Fig. 15).

5. LA FUNCION Cos_m

Vamos a definir ciertas extensiones de la función $C_{1,m}$:

5.1. $C_{2,m}: [0,2r] \to R$ (Fig. 16)

$$C_{2,m}(x) = \begin{cases} C_{1,m}(x) & \text{si } 0 \le x \le r \\ -C_{1,m}(2r-x) & \text{si } r \le x \le 2r \end{cases}$$

5.2. $C_{3,m}: [0,3r] \to R$ (Fig. 17)

$$C_{3,m}(x) = \begin{cases} C_{2,m}(x) & \text{si } 0 \le x \le 2r \\ -C_{1,m}(x-2r) & \text{si } 2r \le x \le 3r \end{cases}$$

5.3. $C_{4,m}:[0,4r] \to R$ (Fig. 18)

$$C_{4,m}(x) = \begin{cases} C_{3,m}(x) & \text{si } 0 \le x \le 3r \\ C_{1,m}(4r-x) & \text{si } 3r \le x \le 4r \end{cases}$$

5.4. DEFINICION: Llamaremos función $cos_m:R \to R$ a la definida por la fórmula:

$Cos_m(x) = Cos_{4,m}(\alpha)$ donde $x = t.4r + \alpha$ con t entero y $0 < \alpha < 4r$.

5.5. El gráfico de la función Cos_m. (Fig. 19)

6. LAS FUNCIONES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

En este apartado definimos las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante.

6.1. La función Tg_m:

$$Tang_m(x) = \frac{Sen_m(x)}{Cos_m(x)} \quad \text{si } Cos_m(x) \neq 0$$

6.2. La función $Cotg_m$:

$$Cotg_m(x) = \frac{Cos_m(x)}{Sen_m(x)} \quad \text{si } Sen_m(x) \neq 0$$

6.3. La función Sec_m:

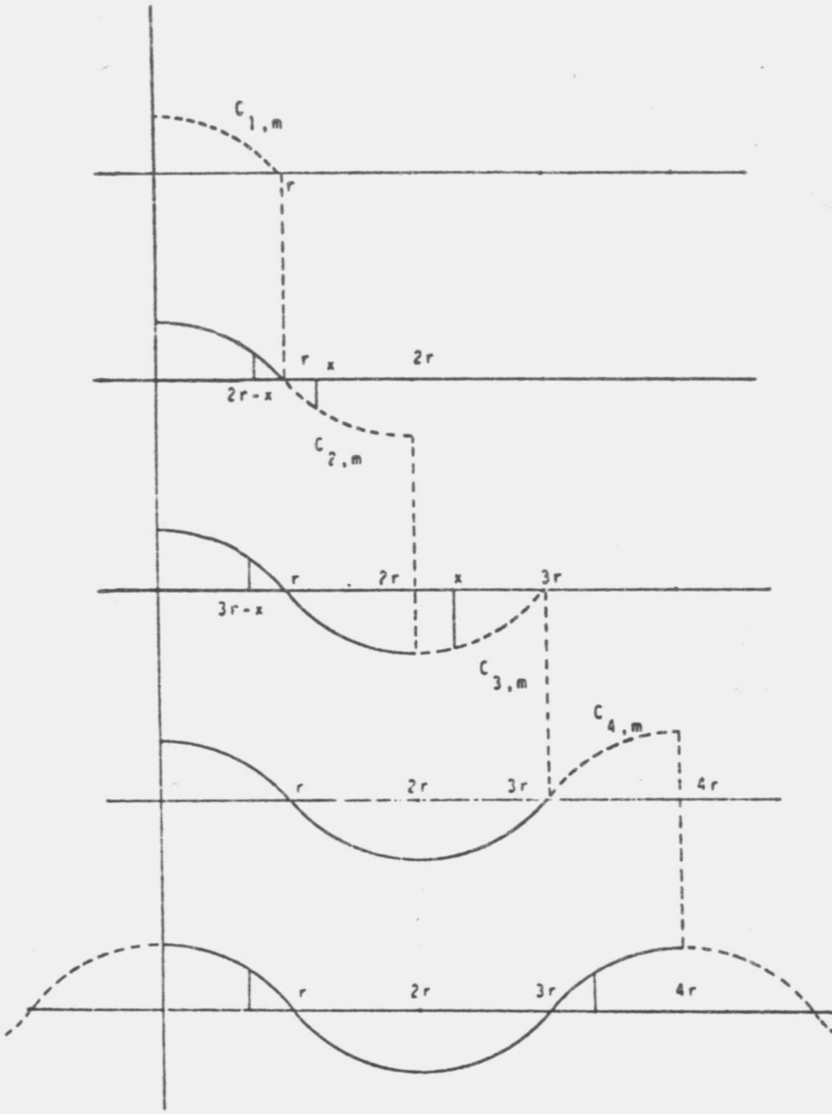

Fig.15

Fig.16

Fig.17

Fig.18

Fig.19

$$\mathrm{Sec}_m(x) = \frac{1}{\mathrm{Cos}_m(x)} \quad \text{si } \mathrm{Cos}_m(x) \neq 0$$

6.4. La función cosec_m:

$$\mathrm{Cosec}_m(x) = \frac{1}{\mathrm{Sen}_m(x)} \quad \text{si } \mathrm{Sen}_m(x) \neq 0$$

7. LA RELACION FUNDAMENTAL

En este apartado probaremos la relación fundamental de la trigonometría.

7.1. TEOREMA: Para todo $x \in R$ se verifica:

$$\mathrm{Sen}_m^2(x) + \mathrm{Cos}_m^2(x) = 1$$

DEMOSTRACION: Sea $x \in R$ entonces $x = n.m(T) + \alpha$ con n entero y $0 \leq \alpha \leq m(T)$.

Se verifica uno y solo uno de los cuatro casos siguientes:

1°) $0 \leq \alpha \leq r$. 2°) $r \leq \alpha \leq 2r$. 3°) $2r \leq \alpha \leq 3r$. 4°) $3r \leq \alpha \leq 4r$.

Si se verifica 1°) $\mathrm{Sen}_m^2(x) + \cos_m^2(x) = S_{1,m}(\alpha) + C_{1,m}(\alpha) =$

$= S_{1,m}(\alpha) + C_{1,m}(\alpha) =$ (Fig. 5)

$$\frac{d(b,c)^2}{d(a,c)^2} + \frac{d(a,b)^2}{d(a,c)^2} = \frac{d(b,c)^2 + d(a,b)^2}{d(a,c)^2} = \frac{d(a,c)^2}{d(a,c)^2} = 1$$

Si se verifica 2°) $\mathrm{Sen}_m^2(x) + \mathrm{Cos}_m^2(x) =$

$= (S_{1,m}(2r-\alpha))^2 + (-C_{1,m}(2r-\alpha))^2 =$

$S_{1,m}^2(2r-\alpha) + C_{1,m}^2(2r-\alpha)$ (1). Si $\beta = 2r - \alpha$ (2), con $0 \leq \beta \leq r$.

Luego de (1), (2) y el caso 1°) $\mathrm{Sen}_m^2(x) + \mathrm{Cos}_m^2(x) = \mathrm{Sen}_m^2\beta + \mathrm{Cos}_m^2\beta = 1$

Los restantes casos se prueban en forma análoga.

BIBLIOGRAFIA

[1] FIGALLO, A. LANDINI, P. - Angulos del Plano y Sistemas de Medición - U. Nacional de San Juan (1983).

[2] TIRAO, J.A. - Matemática 1 - Ed. Kapelusz (1985).