CUBRIENDO UN ESPACIO VECTORIAL CON SUBESPACIOS

Enzo R. Gentile

Un resultado bien conocido en Algebra Lineal establece que si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, infinito, entonces V no puede cubrirse con un número finito de subespacios propios. En esta Nota daremos una demostración elemental de este hecho. Observamos además que si K es un cuerpo finito entonces todo espacio vectorial V de dimensión mayor que 1 se puede cubrir con $q + 1$ subespacios propios, si q denota el cardinal de K. El número $q+1$ es,en este caso, el mínimo posible.

<u>Teorema</u>: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K infinito. Entonces para cualquier familia finita $W_1,\dots,W_n$ de subespacios propios de V se tiene que la unión

$$\cup W_i \neq V$$

<u>Demostración</u>: Supongamos que $W_1 \cup \dots \cup W_n = V$. Supondremos que la familia de subespacios dada no es redundante, es decir ningún W_i esta contenido en la reunión de los restantes W_j. Sean

$$x \notin \cup_{i=1}^{n-1}, \quad y \notin W_n$$

Es claro que x,y son linealmente independientes, y generan un subespacio T de V de dimensión 2. Notar que para todos los i, $T \not\subset W_i$ de manera que $T \cap W_i \neq T$, por lo tanto $T = \cup_{i=1}^{n}(T \cap W_i)$ y hemos reducido la situación al caso de dim V = 2 ..

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $V = K^2$. Puesto que K es infinito existen k_1, k_2, $k_1 \neq k_2$ tal que $(1, k_1)$ y $(1, k_2)$ pertenecen al mismo W_j. Pero esto implica $W_j = V$, una contradicción. El Teorema queda demostrado.

<u>Nota 1</u>.

Sea K un cuerpo finito. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión mayor que 1. Se afirma que V es unión de un número finito de subespacios propios. en efecto, sea $f: V \to K^2$ un epimorfismo de V en K^2. Dado que K^2 es finito, es ciertamente unión de un número finito de subespacios

$$K^2 = \cup_{i=1}^n W_i$$

Pero entonces $$V = f^{-1}(K^2) = \cup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$$

y puesto que $f^{-1}(W_i) \neq V$, la afirmación queda probada.

<u>Nota 2</u>. Sea K un cuerpo finito con exactamente q elementos. Probaremos que si V es un espacio vectorial sobre K de dimensión mayor que 1 entonces V se puede cubrir con q + 1 subespacios propios y q + 1 es el mínimo posible. Que esto es cierto para $V = K^2$ esta bien, pues K^2 es unión de las rectas $k.(1,k)$, $k \varepsilon k$ y $k.(0,1)$. Dos tales rectas intersectan solo en el 0. Por lo tanto, por el razonamiento utilizado en la Nota 1 se sigue que V se puede recubrir con q + 1 subespacios propios. Por el argumento utilizado en la demostración del Teorema sobre la reducción al caso $V = K^2$, podemos concluir que el valor q + 1 es óptimo.

<u>Nota 3</u>. Se sigue de la última parte de la demostración del Teorema que si $\{W_t\}_{t \varepsilon I}$ es una familia de subespacios w_i que cubre V, entonces el cardinal de K no puede superar al cardinal de la familia, o sea el cardinal de I. En efecto,

de superarlo, es el cardinal de I menor que el cardinal de K y por tanto en la familia $\{(1,k)\}_{k\varepsilon k}$ hay dos vectores distintos que pertenecen a un mismo W_h y estamos en las mismas condiciones que ocurren en la demostración del Teorema.

Sea el cuerpo K, finito o infinito, K^2 puede recubrirse con la familia $\{K(1,k)\}_{k\varepsilon k} \cup \{K(0,1)\}$ de subespacios y por el mismo argumento anterior cualquier espacio vectorial sobre K de dimensión > 1. En conclusión se tiene la siguiente afirmación: si el cuerpo K es infinito y V es un espacio vectorial de dimensión mayor que 1 sobre K entonces, toda familia de subespacios propios que cubre V tiene cardinal al menos el cardinal de K y además existe un cubrimiento por subespacios propios con cardinal igual al cardinal de K.

<u>Nota 4</u>. Una aplicación importante del Teorema es la siguiente. Sea K un cuerpo infinito. Sean V y W espacios vectoriales sobre K, con $V \neq 0$. Sean $f_1, \ldots, f_n$ morfismos de V en W, no nulos. Existe entonces algún $v \varepsilon V$ con la propiedad de que $f_i(v) \neq 0$, cualquiera sea $i = 1, 2, \ldots, n$. Esto es efectivamente así, pues de otro modo V sería la unión de los núcleos de los f_i, que son subespacios propios de V. Otra versión de este mismo resultado es la existencia de un $v \varepsilon V$ tal que $f_i(v) \neq f_j(v)$ para todo par de índices i, j con $i \neq j$.

El Teorema se aplica particularmente cuando $W = K$. Las f_i son entonces funcionales lineales.

Nota 5. Si K es el cuerpo real o el cuerpo complejo, el Teorema tiene un sentido topológico. Recordemos algunas definiciones que el lector podrá encontrar en cualquier libro de Topología. Una espacio topológico X se dice espacio de Baire, si satisface la siguiente condición: Dada una familia numerable $\{A_t\}$ de subespacios cerrados de X cada uno de los cuales tiene interior vacío, entonces la reunión $\cup A_t$ tiene interior vacío en X. Un resultado clásico de la Topología establece que todo espacio métrico completo es un espacio de Baire. Si $V = R^n$ ó $V = C^n$ entonces V tiene la métrica euclídea respecto de la cual es un espacio métrico completo, y por lo tanto es un espacio de Baire. Los subespacios (vectoriales) con subespacios cerrados en la topología euclídea y si son subespacios propios tienen interior vacío. Por lo tanto se sigue de lo anterior que ninguna familia numerable de subespacios propios de V cubre a V.

Nota 5. El Teorema también puede pensarse como un Teorema de polinomios en n variables. Sea, en efecto, $0 \neq f(X_1,\ldots,X_n)$ un polinomio con coeficientes en un cuerpo K, infinito, en las variables $X_1,\ldots, X_n$. Se afirma lo siguiente: existe una n-upla $(a_1,\ldots, a_n) \in K^n$ tal que $f(a_1,\ldots, a_n) \neq 0$.

La afirmación es cierta si n = 1, dado que un polinomio en una variable tiene solo un número finito de ceros, por lo tanto los restantes valores en K no lo anulan. (Notar que si el cuerpo fuera finito, los ceros de f podrían ser todos los elementos en K). Si f es un polinomio en más de una variable se escribe

$$f(X_1,\ldots,\ X_n) = \sum_i a_i(X_1,\ldots,\ X_{n-1})X_n^i$$

como un polinomio en la variable X_n con coeficientes en el anillo de indeterminadas $X_1,\ldots,\ X_{n-1}$. Determinando para cada i, con $a_i(x_1,\ldots X_{n-1}) \neq 0$, una (n-1)-upla que no lo anula, resulta un polinomio no nulo en una variable y estamos en la situación inicial. Sea $V = K^n$, K infinito. Cada hiperplano de V es la totalidad de ceros de una función polinomial lineal $a_1X_1+ \ldots a_nX_n$. Si multiplicamos todas las funciones polinomiales correspondientes a distintos hiperplanos $W_1,\ldots,\ W_t$, se obtiene un polinomio no nulo en $X_1,\ldots,\ X_n$. Por la afirmación anterior existe una n-upla $(k_1,\ldots,\ k_n) \varepsilon K^n$ que no es cero de dicho polinomio. Pero esto implica que $(k_1,\ldots,\ k_n)$ no pertenece a ninguno de los subespacios W_i. Esto da entonces otra demostración de la imposibilidad de cubrir un espacio vectorial con una familia finita de subespacios propios, cuando el cuerpo K es infinito.

<u>Nota</u> <u>6</u>. Observar en todo lo anterior el papel iluminante del caso $V = K^2$.

<u>Dirección:</u> Anchorena 792, La Lucila, 1636 - Buenos Aires.
