La Divergencia de la serie $\sum_p \frac{1}{p}$, p primo

(Aspectos analíticos de la Aritmética)

Enzo R. Gentile

1. En su libro IX, Teorema 20, Euclides (350 a.J.C.) demuestra la existencia de infinitos primos racionales. Esta demostración encaja perfectamente en el marco de la Aritmética. Repasemos esa demostración. Razonando por el absurdo, si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ designan a <u>todos</u> los números primos positivos, usando el hecho aritmético que todo entero $\neq 1, -1$ es divisible por un número primo, se sigue que

$$N = \left(\prod_{i}^{n} p_i \right) + 1$$

es divisible por un número primo $q > 0$. Como $q = p_j$ para algún $j = 1,2,\ldots, n$ se concluye que <u>q divide a 1</u>, una contradicción. La misma provino de suponer la existencia de sólo un número finito de números primos. Por lo tanto hay infinitos primos, como se quería demostrar.

Digamos que desde entonces uno de los problemas más importantes de la Teoría de Números es conocer la distribución de los primos dentro del conjunto de números naturales, así como determinar primos arbitrariamente grandes.

En 1937 Leonhard Euler (1707-1783) da una nueva demostración de la existencia de infinitos primos que podemos tipificar como demostración analítica. En efecto, este resultado de Euler constituye el primer intento de ligar a la Aritmética con el análisis, o sea lo discreto con el continuo. El conocimiento de series tales como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

condujeron a Euler a considerar las series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = E(s)$, con s real y a su famosa fórmula del producto

$$(1) \qquad E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi_p (1-p^{-s})^{-1} = \Pi_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

donde p recorre la sucesión de números primos positivos. El símbolo Π denota producto, enteramente análogo al símbolo $\sum$ de suma. Si $\{a_n\}$ $n \in N$, es una sucesión de números reales o complejos se define

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} s_n .$$

La igualdad (1) es válida para $s > 1$. Cuando $s \to 1^+$, o sea s tiende a 1 por la derecha, la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$, que es divergente a $+ \infty$, y se sigue que el producto también debe ser infinito, de lo cual se sigue la existencia de infinitos primos.

Por ejemplo, si escribimos (1) en la forma

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots =$$

$$= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \ldots)(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \ldots)$$

$$(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \ldots)(\ldots$$

podemos "visualizar" nítidamente que (1) expresa "analítica y globalmente" el teorema fundamental de la Aritmética relativo a la factorización única en producto de números primos.

2. En esta nota daremos una demostración directa y elemental de la divergencia de la serie $\sum \frac{1}{p}$. Esperamos que este material sirva para estimular el enfoque analítico y abrir a los docentes el panorama de la Aritmética.

Utilizaremos algunos resultados preliminares.

Lema 1. (Desigualdades de Weierstrass) Sean $a_1 \ldots, a_n$ números reales, todos positivos o todos negativos mayores que -1. Entonces se tiene la desigualdad

$$(1+a_1).(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Demostración. $1 + a_i > 0$, para todo i. Usar inducción.

Lema 2. Sean a_i, $i \in N \cup \{0\}$, números reales positivos. Entonces

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ converge} \Leftrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} (1+a_i) \text{ converge.}$$

Demostración $\Leftarrow$: se sigue del Lema 1.

$\Rightarrow$: Sea $A_n = \prod_{i=0}^{n} (1+a_i)$, $n \in N \cup \{0\}$. La sucesión A_n es monótona.

La convergencia del producto infinito es equivalente a la existencia de $\lim A_n$. Bastará probar que la sucesión A_n está acotada. Escribamos

$1 + a_i = (1-b_i)^{-1}$ con $b_i = \dfrac{a_i}{1+a_i} < a_i$, $b_i < 1$.

Sea $i_0 \in N$ con la propiedad que

$$\sum_{i=i_0}^{n} b_i < \sum_{i=i_0}^{n} a_i < \frac{1}{2}, \text{ para todo } n > i_0$$

Sea $s = \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i$. Es $s < 1$.

Se tiene

$$\frac{A_i}{A_{i_0}} = (1 + a_{i_0+1}) \dots (1+a_i) = (1-b_{i_0+1})^{-1} \dots (1-b_i)^{-1}$$

y por Lema 1 $\qquad \le (1 - b_i)^{-1} < (1-s)^{-1}$

y por lo tanto

$$A_i < A_{i_0} . (1-s)^{-1} \qquad \text{Q.E.D}$$

Corolario 1: La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ es divergente.

Demostración:

El producto $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{i})$ diverge dado que

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \frac{1}{i}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = \frac{2}{1} . \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n + 1$$

tiende a ∞.

Corolario 2: La serie $\sum_{p} p^{-1}$ diverge.

Demostración:

Según el Teorema Fundamental de la Aritmética todo entero $n > 0$, se escribe <u>unívocamente</u> en la forma $n = m.t^2$, $m, t \in N$, con m libre de cuadrados. Notemos que

$$(1) \qquad \prod_{p<n} (1+p^{-1}) \geq \sum_{k<n}' k^{-1}$$

donde $'$ indica que la suma debe tomarse para todos los $k < n$ que son libres de cuadrados. En efecto, todos los términos en la suma de la derecha aparecen en el desarrollo del producto. Entonces

$$\left(\sum_{k<n}' k^{-1}\right) . \left(\sum_{t<n} t^{-2}\right) \geq \sum_{i<n} i^{-1}$$

Puesto que la serie $\sum_{t=1}^{\infty} t^{-2}$ es convergente, se sigue que la serie $\sum_k' k^{-1}$ es divergente.

Aplicando el Lema 2 a $\sum_p p^{-1}$ y teniendo en cuenta (1) se sigue que $\pi(1+p^{-1})$ diverge y por lo tanto $\sum_p p^{-1}$ también.

Corolario 3: Existen infinitos primos en z.

Es también posible probar que la serie $\sum_p p^{-1}$ es divergente por el siguiente método, que nos interesa señalar pues es de uso corriente en teoría analítica de números, y es responsable de un gran desarrollo de esta teoría. Sea

$$E(s) = \Pi_p (1-p^{-s})^{-1}, \ s > 1.$$

Tomando logaritmos y usando el desarrollo en serie de log:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \ |x| < 1, \text{ resulta}$$

$$\log E(s) = - \sum_p \log(1-p^{-s})$$

$$= \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k.p^{ks}}$$

$$=\sum_p p^{-s} + \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k.p^{ks}}$$

Llamando R(s) a la serie doble se tiene la acotación

$$|R(s)| \le \frac{1}{2} \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}$$

$$\le \frac{1}{2} \sum_p \frac{p^{-2s}}{1-p^{-s}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot E(2s)$$

Cuando $s \to 1^+$, $E(2s) \to E(2) = \frac{\pi^2}{6}$, por lo tanto R(s) queda acotado y deducimos que

$$\operatorname{Lim} E(s) = +\infty \Rightarrow \lim \log E(s) = +\infty,$$

y por lo tanto $\sum_p p^{-s} \to \infty$

Se sigue como corolario que la serie $\sum_p \frac{1}{p}$ es divergente. En efecto, basta observar que

$$s > 1 \Rightarrow p < p^s \Rightarrow \frac{1}{p^s} < \frac{1}{p}, \text{ para todo } p.$$

3. 100 años más tarde, en 1837, Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) retomó estas ideas para considerar las hoy llamadas <u>series de Dirichlet</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

El papel fundamental lo juegan los llamados <u>caracteres módulo m</u>, esto es, funciones aritméticas

$$\chi: Z \to C$$

a valores complejos, con las propiedades ($m \in N$)

$$\chi(a) = \chi(b) \text{ si } a \equiv b \pmod m$$

$$\chi(a.b) = \chi(a).\chi(b)$$

$$\chi(a) = 0 \text{ si } (a,m) > 1$$

$$\chi(a) \neq 0 \text{ si } (a,m) = 1.$$

Por ejemplo el carácter <u>principal</u> o <u>trivial</u>

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } (n,m) > 1 \\ 1 \text{ si } (n,m) = 1. \end{cases}$$

Para n = 5 se tienen junto a χ_0 los siguientes caracteres

n(mod 5)	0	1	2	3	4
χ	0	1	i	-i	-1
	0	1	-1	-1	1
	0	1	-i	i	-1

Con cada carácter (mod m) se define la <u>serie L de Dirichlet</u> ó L-serie de Dirichlet

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Dado que $|\chi(n)| \leq 1$ la serie es absolutamente convergente para $s > 1$. Además en virtud de la multiplicatividad de χ se tiene la fórmula del producto de Euler:

$$L(s,\chi) = \prod_p \left[1 - \frac{\chi(n)}{p^s}\right]^{-1}, \quad s > 1.$$

Sean a, b enteros positivos coprimos. Utilizando el método de Euler y sus funciones L, Dirichlet demuestra que la serie

$$\sum_p \frac{1}{p^s}, \quad p \text{ primo}, \ p \equiv a \pmod{m}$$

es divergente. Se sigue entonces el famoso "teorema de los primos en progresión aritmética": Si a, m son enteros positivos coprimos, la progresión aritmética

$$a + n.m, \quad n \in \mathbb{N}$$

contiene infinitos primos.

Por ejemplo se sigue que hay infinitos primos de las formas: $4n + 1$, $4n + 3$, $5n + 7$, $10n + 7$, ...

La demostración sigue los pasos de la demostración de más arriba y lleva a que la serie

$$\sum_{p \equiv a(m)} \frac{1}{p^s}$$

es divergente, lo cual prueba el Teorema de Dirichlet. Señalemos un detalle importante. La serie L de Dirichlet $L(s,\chi)$ resulta ser convergente para $s > 0$ si $\chi \neq \chi_0$. En la demostración del teorema el hecho de mayor relevancia y dificultad es el siguiente: $\chi \neq \chi_0 \Rightarrow L(1,\chi) \neq 0$.

El próximo gran paso fue dado por G.B. Riemann (1826-1866). En 1859, en una memoria que sin duda puede considerarse de las más importantes en teoría de números primos, muestra que la clave para entender la fórmula del producto de Euler

$$E(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

es considerar a E(s) como <u>función a valores complejos de s</u>.

Para ello extendió $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $Re(s) > 1$, a todo el plano complejo obteniendo una función meromorfa con un único polo en $s = 1$. Esta es la famosa <u>función zeta de Riemann</u>, demotada por $\zeta(s)$. En el plano $Re(s) \leq 0$ la función zeta se anula para $s = -2, -4, -6, \ldots$. Estos se denominan los <u>ceros triviales</u> de ζ. Los ceros restantes se encuentran en la banda $0 \leq Re(s) \leq 1$. La famosa <u>conjetura de Riemann</u> establece que "los ceros no triviales de ζ yacen en la recta $\frac{1}{2} + t.i$, $t \in R$". Aunque se sabe que hay infinitos ceros de ζ en esta recta, esta conjetura permanece abierta y es sin duda uno de los más famosos problemas. La genialidad de Riemann fue concebir una relación entre la ubicación de los ceros de ζ y la distribución de los números primos. Por ejemplo la <u>no anulación</u> de ζ en la recta $1 + t.i$, $t \in R$, es equivalente al llamado <u>Teorema de los Números Primos</u> (TNP):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$$

donde $\pi(x)$, $x \in R$ es la función $\pi(x) = \# \{p \mid p \text{ primo} > 0 \text{ y } p \leq x\}$ y log = logaritmo natural.

El TNP fue probado a fines del siglo pasado, en forma independiente por los matemáticos Vallée-Poussin, CH.J. (1866-1962), belga y Hadamard, J. (1865-1963) francés.

ENZO R. GENTILE
ANCHORENA 792 - LA LUCILA
(1636) BUENOS AIRES.

PROBLEMAS

1) Dos viajantes árabes A y B, el primero de los cuales tiene cinco panes, y el otro tres se encuentran con un tercero. Almuerzan juntos y el último les da como retribución por la comida 8 monedas de oro iguales. Cuando llegó el momento de repartirse las 8 monedas se estableció el siguiente diálogo:

   A- Dado que yo tenía 5 panes y tú 3 a tí te corresponden 3 y a mí 5 monedas.

   B- De ninguna manera, tomemos 4 monedas cada uno, y yo te devolveré un pan.

   Como la discusión se prolongaba decidieron que el califa decidiera la cuestión y éste ordenó que A tomara 7 monedas y B sólo 1. Explique la decisión del califa.

R. Miatello, FAMAF, U.N.C.