

ENSEÑANDO UNA MATEMÁTICA MÁS NOVEDOSA Y DIVERTIDA

Parte I: GEOMETRÍA

Nora Cosenza - Norma Gurruchaga - María José Vignoli

RESUMEN: La finalidad de este trabajo es despertar mayor interés en el aprendizaje de la Matemática a través del estudio de situaciones curiosas y novedosas.

INTRODUCCION

El objetivo fundamental de este trabajo es el estudio de situaciones novedosas que nos permiten presentar al alumno la Matemática de una forma amena e interesante y nos sirven para que él descubra, analice, relacione y resuelva los distintos planteos.

En todos los casos se logra un mayor interés al convertirse ellos mismos en actores y no en espectadores.

En esta parte trataremos los siguientes temas de Geometría.

- I Un problema de Geometría visto a la luz de la combinatoria.
- II Diferentes formas de demostrar el teorema de Pitágoras.

-III ¿Por qué los bulones generalmente tienen cabeza exagonal?

-IV Resolución geométrica de la ecuación de segundo grado.

I Un problema de Geometría visto a la luz de la Combinatoria.

Resultados típicos de la Geometría Combinatoria son [1]:

o Dados n puntos del plano, indicar el número de rectas distintas que ellos determinan (un número máximo C_n^2).

o Dados n puntos del plano ($n \geq 3$) indicar el número de distancias distintas determinados por las rectas que ellos determinan.

Un problema bien conocido es el de saber cuántas regiones del plano son determinadas por n rectas distintas, o de saber en cuántas regiones n planos descomponen el espacio.

Las situaciones descritas por las figuras 1 son fácilmente tratadas. La primera situación en que n rectas paralelas dividen al plano, dará una descomposición en $(n+1)$ regiones. La segunda situación corresponde a n rectas concurrentes en un punto, las que determinan $2n$ regiones. Estos resultados pueden ser fácilmente demostrados.

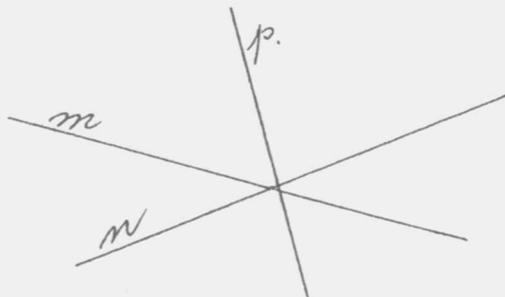
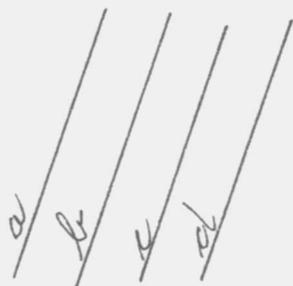


fig. 1

PROPOSICION 1: Dadas n rectas paralelas de un plano, ellas lo dividen en $(n+1)$ regiones disjuntas.

DEMOSTRACION: Sea $h_2(n)$ el número de regiones en que n rectas paralelas descomponen un plano.

Entonces si tomamos una recta más, paralela a las n primeras, obtenemos $(n+1)$ rectas paralelas y un número $h_2(n+1)$ de regiones en que estas $(n+1)$ rectas descomponen un plano, es decir

$$h_2(n+1) = h_2(n) + 1, \quad (A)$$

pues la nueva recta descompondrá una región en dos, o sea que dará origen a una región más. Tendremos así el resultado descrito en (A) cualquiera sea el valor de $n \geq 1$.

(A) es una fórmula de recurrencia. Ella permite hallar una expresión para $h_2(n)$ en función de n . En efecto:

$$\begin{aligned} h_2(n+1) &= h_2(n) + 1 = [h_2(n-1) + 1] + 1 = \\ &= h_2(n-1) + 2 = [h_2(n-2) + 1] + 2 = h_2(n-2) + 3 = \\ &= h_2(n-3) + 4 = \dots = h_2(n-(n-1)) + n = h_2(1) + n. \end{aligned}$$

Como $h_2(1) = 2$ es el número de regiones en que una recta divide al plano, tendremos finalmente: $h_2(n+1) = n + 2$, es decir:

$$h_2(n) = n + 1. \quad (B)$$

En caso en que al lector no le guste la demostración anterior, podrá hacer otra, por inducción matemática, como sigue. Obviamente:

$$h_2(1) = 2$$

Supongamos ahora que (B) sea válida para n , entonces para $(n+1)$ tendremos: $h_2(n+1) = h_2(n) + 1$ y, como estamos suponiendo por hipótesis de inducción que $h_2(n) = n + 1$, tendremos:

$h_2(n+1) = (n+1)+1 = n + 2$, que es (B) para el caso $(n+1)$ con lo cual concluye la prueba de la fórmula (A).

PROPOSICION 2: Sean dadas en un plano n rectas concurrentes a un punto. El número de regiones en que ellas descomponen al plano es $2n$.

Ahora analizaremos el caso general del problema, en que son dadas n rectas en posición general, esto es, que entre ellas no haya rectas paralelas, ni subconjunto de tres rectas que sean concurrentes a un punto. Así las cuatro rectas de la figura 2 están en posición general

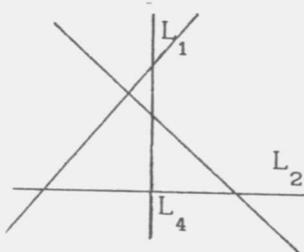


Figura 2

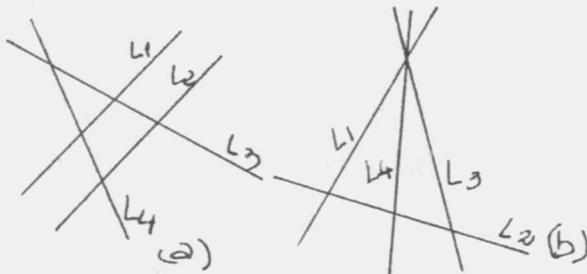


Figura 3

En la figura 3(a) tenemos $L_1 // L_2$; en la figura 3(b) L_1, L_2, L_3

L_3, L_4 concurren a un punto.

Procuremos entonces determinar el número de regiones $h_2(n)$ que n rectas en posición general descomponen un plano.

Para ello es conveniente llamar con $h_1(n)$ al número de partes que n puntos distintos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ dividen una recta dada (figura 4).



figura 4

Observemos que $h_1(n) = h_1(n-1) + 1$, pues si una recta se divide en $h_1(n-1)$ partes por $(n-1)$ puntos, una introducción de un punto más divide una de las partes ya existente en dos, o sea aumentará uno el número de partes. Entonces razonando por recurrencia vemos que:

$$h_1(n) = n + 1; n \geq 1.$$

Volvamos al problema sobre la división del plano por rectas.

Supongamos que $(n-1)$ rectas en posición general, dividen el plano en $h_2(n-1)$ partes. Consideremos el conjunto $(L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1})$ en posición general. Entonces $(n-1)$ rectas dividen al plano en $h_2(n-1)$ regiones.

Añadamos al conjunto una n -ésima recta L_n , que como el conjunto $(L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1})$ está en posición general; vemos que cada una de las $(n-1)$ primeras rectas cortan a L_n en un punto. Y así L_n queda dividida en $h_1(n-1)$ partes.

Observemos que cada una de las partes en que L_n está

dividida, divide a una región del plano en dos, o sea, cada parte de L_n da origen a una nueva región del plano, así:

$$h_2(n) = h_2(n-1) + h_1(n-1),$$

o sea:

$$h_2(n) = h_2(n-1) + n,$$

visto que $h_1(n-1) = n$.

Entonces:

$$\begin{aligned} h_2(n) &= h_2(n-1) + n = [h_2(n-2) + (n-1)] + n = \\ &= [h_2(n-3) + (n-2)] + (n-1) + n = \dots = \\ &= h_2(1) + [2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n] = \\ &= 2 + [2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n] = \\ &= 1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n] = \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned} \text{ Observemos que:}$$

$$h_1(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = C_n^0 + C_n^1,$$

$$h_2(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2.$$

En efecto: $\binom{n}{0} = C_n^0 = 1$. Como: $n = C_n^1 = \binom{n}{1}$,
vemos que $h_1(n) = n + 1 = C_n^0 + C_n^1$.

Por otro lado como $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^1 = n$ y $C_n^0 = 1$, vemos que:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Los razonamientos expuestos constituyen una demostración con los siguientes resultados:

- El número de partes $h_1(n)$ en que n puntos distintos

dividen a una recta es: $h_1(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$.

• El número de partes $h_2(n)$ en que n rectas en posición general dividen al plano es:

$$h_2(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

Veremos ahora el problema de determinar como n planos dividen al espacio. En primer lugar es necesario definir la posición general para planos. Es decir que entre ellos no hay pares de planos paralelos, ni terna de planos que se cortan en una misma recta. Procederemos de manera análoga a los casos ya tratados.

Supongamos $(n-1)$ planos en posición general $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1})$ que dividen al espacio en $h_3(n-1)$ regiones, y tracemos un n -ésimo plano π_n , tal que el conjunto $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n)$ está en posición general.

Observamos que los $(n-1)$ primeros planos $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1})$ cortan a π_n en $(n-1)$ rectas que están en posición general. Estas rectas dividen a π_n en $h_2(n-1)$ regiones distintas.

Ahora es fácil ver que cada una de estas $h_2(n-1)$ regiones de π_n divide en dos partes a cada una de las regiones del espacio, o sea cada una de las $h_2(n-1)$ regiones de π_n da origen a una nueva región del espacio. Esto es:

$$\begin{aligned} h_3(n) &= h_3(n-1) + h_2(n-1) = [h_3(n-2) + h_2(n-2)] + h_2(n-1) = \\ &= [h_3(n-3) + h_2(n-3)] + h_2(n-2) + h_2(n-1) = \dots = \\ &= h_3(1) + h_2(1) + h_2(2) + h_2(3) + \dots + h_2(n-3) + h_2(n-2) + \\ &+ h_2(n-1) = 2 + h_2(1) + h_2(2) + \dots + h_2(n-1) = \end{aligned}$$

$$= 2 + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} + \binom{1}{2} + \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} +$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} .$$

Teniendo en cuenta la propiedad:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{i} = \binom{n}{i+1} \text{ para } i \geq 1 \text{ y } \binom{k}{0} = 1$$

vemos que:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \dots + \binom{n-1}{0} = n-1 = \binom{n}{1} - 1$$

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2}$$

$$\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \dots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}, \text{ y así se llega a:}$$

$$h_3(n) = 2 + \binom{n}{1} - 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

Demostrando así el siguiente resultado:

• El número de regiones en que n planos en posición general dividen al espacio es:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

Generalizando se puede enunciar el siguiente teorema:

Sea:

$h_1(n)$ = el número de partes en que n puntos dividen a una recta.

$h_2(n)$ = el número de regiones en que n rectas en posición general dividen al plano.

$h_3(n)$ = el número de regiones en que n planos en posición general dividen al espacio.

$$\text{Entonces: } h_i(n) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

II Diferentes formas de demostrar el teorema de Pitágoras.

Las demostraciones del teorema se pueden clasificar en dos tipos: algebraicas: basadas en relaciones métricas de los triángulos rectángulos; y, geométricas: basadas en comparaciones de áreas [5].

La mayoría de los historiadores afirman que la demostración de Pitágoras fue de tipo geométrica. A continuación veremos algunas demostraciones de la clásica propiedad:

1°. Consideremos dos cuadrados con iguales medidas:

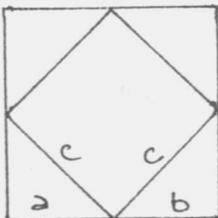


figura 5

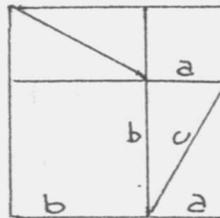


figura 6

$$\text{Area total figura 5} = c^2 + \frac{4ab}{2}.$$

$$\text{Area total figura 6} = b^2 + a^2 + \frac{4ab}{2}.$$

Como los primeros miembros son iguales, los segundos también lo serán, por lo tanto nos queda:

$$c^2 = b^2 + a^2.$$

2°. Demostración algebraica:

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo en el que se ha trazado la altura correspondiente a la hipotenusa:

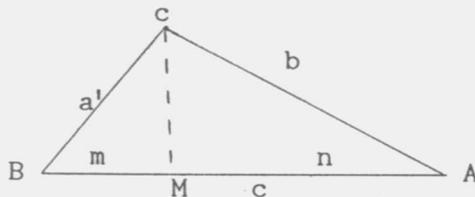


figura 7

Estudiando la semejanza de los siguientes triángulos rectángulos: $\triangle BMC$ y $\triangle ACB$ (1); $\triangle CMA$ y $\triangle ACB$ (2) se deduce la siguiente propiedad:

En todo triángulo rectángulo cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección ortogonal del cateto sobre la hipotenusa, es decir:

$$\text{de (1)} \quad \frac{m}{a} = \frac{a}{c}, \quad \text{de (2)} \quad \frac{n}{b} = \frac{b}{c}$$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones:

$$m c = a^2 \qquad n c = b^2.$$

Sumando miembro a miembro tenemos:

$a^2 + b^2 = m c + n c = (m + n) c = c^2$ pues $c = m + n$. De este modo obtenemos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3°. Demostrado por James Garfield:

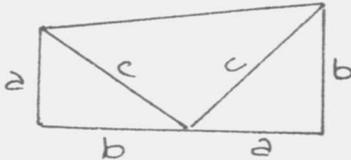


Figura 8

El área del trapecio es igual a la suma del área de cada uno de los triángulos:

$$\frac{a+b}{2} (a+b) = \frac{a b}{2} + \frac{a b}{2} + \frac{c^2}{2},$$

es decir: $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, y cancelando nos queda: $a^2 + b^2 = c^2$

4°. Demostración de Leonardo da Vinci:

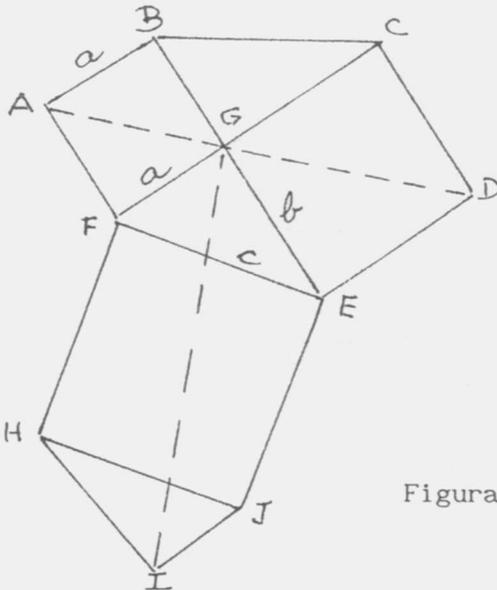


Figura 9

Los cuadriláteros ABCD, AFED, GFHI, GEJI (figura 9), son congruentes. Podemos afirmar que los exágonos ABCDEF y HIJEGF tienen igual área. De allí resulta que el área del cuadrado FEJH es igual a la suma del área del cuadrado ABGF y el área del cuadrado CDEG, por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{área ABGF} = a^2 \\ \text{área CDEG} = b^2 \\ \text{área FEJH} = c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

donde: Δ a es el cateto menor de FGE,
 Δ b es el cateto mayor de FGE,
 Δ c es la hipotenusa de FGE.

5°. Demostración de Pappus:

Es una generalización del teorema de Pitágoras, o el teorema de Pitágoras es un caso especial del de Pappus.

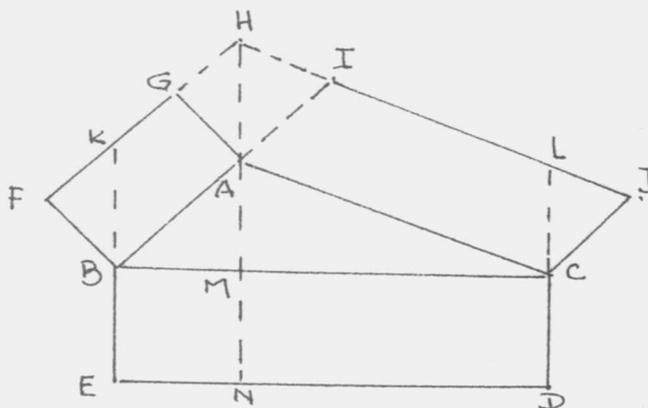


Figura 10

Δ ABC es un triángulo no rectángulo.

Construyamos tres paralelogramos usando como base los lados del triángulo.

Debemos tener en cuenta que: \overline{KE} es paralelo a \overline{HN} y a \overline{LD} , además \overline{KB} , \overline{BE} , \overline{HA} , \overline{MN} , \overline{LC} y \overline{CD} tienen igual longitud.

El teorema de Pappus afirma que:

área BCDE = área ABFG + área AIJC.

La demostración se basa en que dos paralelogramos con igual base e igual altura tienen igual área:

$$\left. \begin{array}{l} \text{área ABKH} = \text{área ABFG} \\ \text{área ABKH} = \text{área BEMN} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{área ABFG} = \text{área BEMN} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{área AHLC} = \text{área AICJ} \\ \text{área AHLC} = \text{área MNCD} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{área AICJ} = \text{área MNCD} \quad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2) tenemos: área ABFG + área AICJ = área BEMN + área MNCD, por lo tanto:

$$\text{área ABFG} + \text{área AICJ} = \text{área BEDC}.$$

Para demostrar el teorema de Pitágoras consideremos un triángulo rectángulo (ver figura 11).

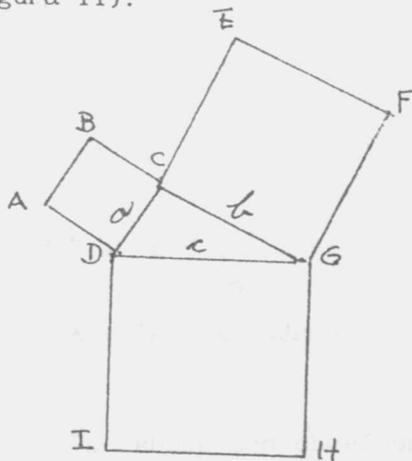


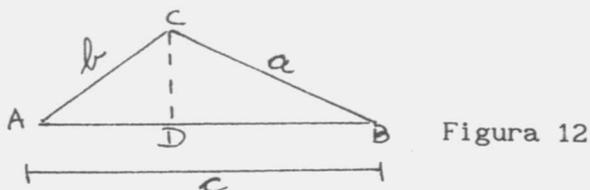
Figura 11

De la demostración anterior surge que:
 área ABCD + área CEFG = área DGHI, es decir: $a^2 + b^2 = c^2$.

6°. Argumento de Polya:

Se basa en la proposición que dice: "Las áreas de dos figuras semejantes están entre sí como el cuadrado de la razón de semejanza".

Tomemos un triángulo rectángulo y tracemos la altura correspondiente a la hipotenusa (figura 12).



De acuerdo con las consideraciones correspondientes:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \Delta & \Delta \\ ABC & \sim & ADC \sim CDB. \end{array}$$

Llamemos: $A = \text{área } ABC$; $A' = \text{área } ADC$; $A'' = \text{área } CDB$.

De $A = A' + A''$ tenemos:

$$\frac{A}{A'} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{A}{A''} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{A'}{A''} = \frac{b^2}{c^2},$$

es decir: $A' = \frac{A \cdot b^2}{c^2}$, $A'' = \frac{A \cdot a^2}{c^2}$.

Por lo tanto: $A = A' + A'' = \frac{Ab^2}{c^2} + \frac{Aa^2}{c^2} = \frac{A(b^2+a^2)}{c^2}$.

Cancelando nos queda: $c^2 = b^2 + a^2$.

Una verificación del teorema de Pitágoras: Esta

verificación está basada en la yuxtaposición de las misma figura de dos modos diferentes.

i) Tomemos un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a , b . Recortamos en cartulina unas ocho copias de este triángulo, más dos cuadrados de lados iguales a la diferencia de los catetos del triángulo (figura 13).



Figura 13

ii) Dispongamos estas piezas como se indica en las figuras 14 y 15.

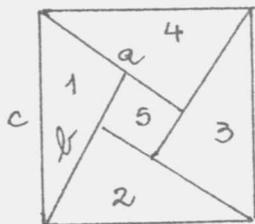


Figura 14

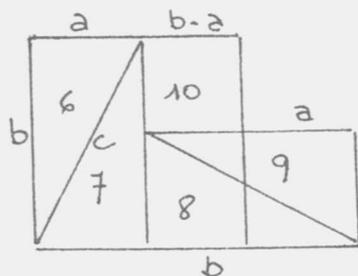


Figura 15

Verifiquemos que ellas encajan perfectamente. En la figura 14, en torno de cada vértice del cuadrado 5, los ángulos suman 360° . A partir de esto y de analizar en la figura mayor los ángulos en cada vértice, todos son de 90° , y los cuatro lados iguales, afirmamos que la figura es un cuadrado.

La figura 15 está armada con los mismos triángulos y cuadrado que la figura 14.

Por lo tanto podemos afirmar:

Area figura 14 = Area figura 15,

donde Area figura 14 = $c^2(1)$, Area figura 15 = $b^2 + a^2(2)$.

La figura 15 se compone de dos cuadrados, uno de lado b y otro de lado a .

Como los primeros miembros de las relaciones (1) y (2) son iguales, los segundos también lo son, por lo tanto:
 $c^2 = b^2 + a^2$.

III ¿Por qué los bulones generalmente tienen cabeza exagonal?

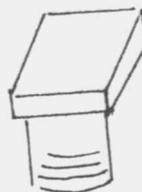


Figura 16

Ud. habrá visto bulones como los de las figuras anteriores; aunque el más común es el primero. Alguna vez habrá visto alguno como el siguiente:



Repere en la cabeza de cada uno de ellos. ¿Por qué no existen bulones con cabeza pentagonal u octogonal?

[2].

En todos los casos el polígono es regular.

Supongamos un polígono no regular, como es la figura siguiente:

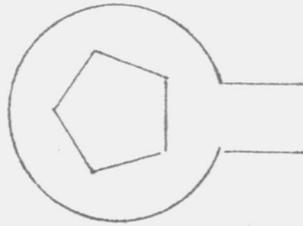


Figura 17

Se necesita una llave especial y ella volvería a encajar en la cabeza solo después de una rotación de 360° .

Si el polígono fuese un cuadrado, después de una rotación de 90° el tornillo vuelve a su posición inicial.

Con cuatro giros de 90° la rosca da un paso (ver la figura siguiente).

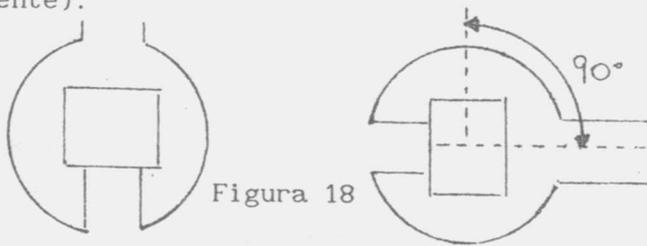


Figura 18

En el caso del triángulo se necesitan tres giros de 120° para completar una vuelta de rosca.

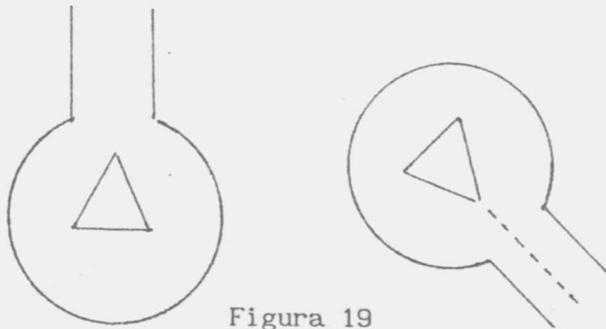


Figura 19

Con el bulón exagonal completamos un paso de rosca después de seis giros de 60° .

Cuando un mecánico está trabajando muchas veces tiene poco espacio. Por esta razón de los tres casos presentados el más apropiado es el exagonal, porque puede ser ajustado o desajustado con giros menores de 60° , ésto es con movimientos de brazos más cortos.

Observe (en la siguiente figura) que el ángulo de giro al que nos referimos es el ángulo central del polígono regular.

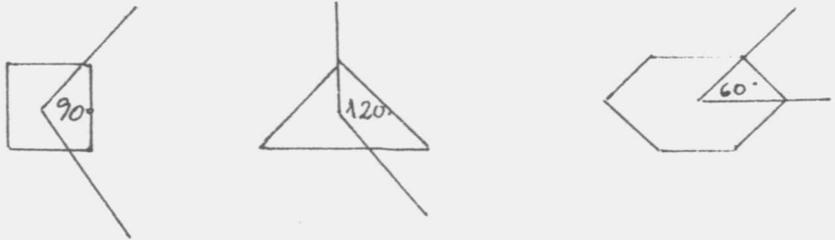


Figura 20.

A medida que el ángulo central se hace más pequeño, el número de lados del polígono crece. Sin duda el octógono tiene un ángulo central más pequeño, lo que, desde este punto de vista sería conveniente.

Pero a medida que crece el número de lados del polígono se aproxima más a un círculo.

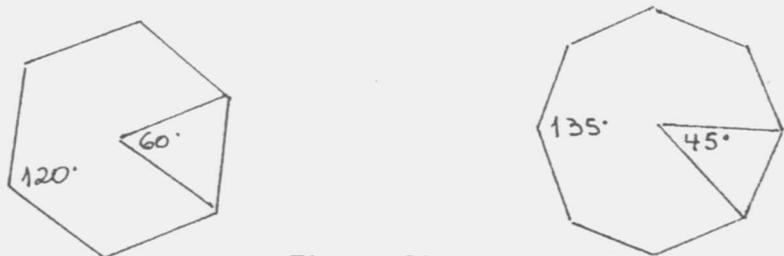


Figura 21

El ángulo interior del polígono de ocho lados es de 135° y el de seis de 120° . (Figura 21).

Como la llave generalmente no se ajusta muy bien, siempre

es mejor que no esté redondeada para que no resbale.

¿Por qué no usamos el pentágono?

Debemos considerar otro aspecto.

Si observamos las siguientes figuras, comprobamos que el exágono tiene lados opuestos paralelos, no así el pentágono (figura 22).

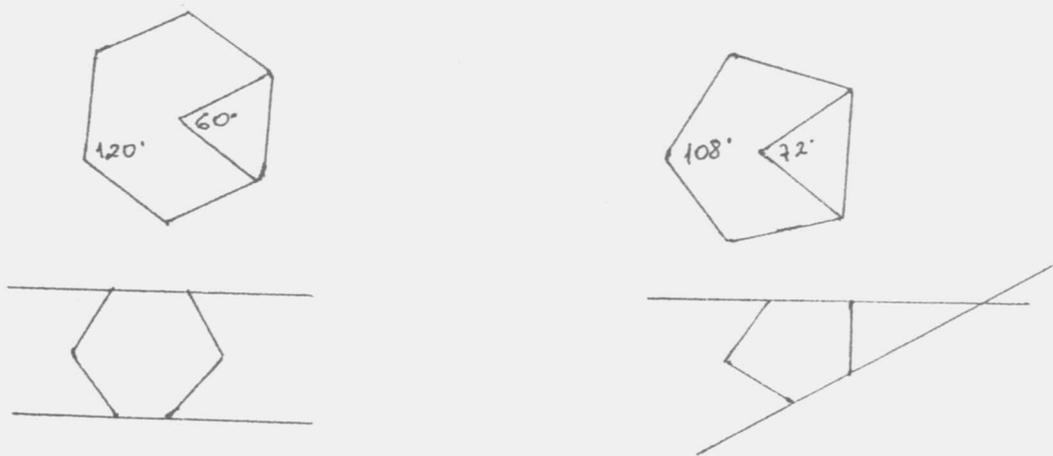


Figura 22

La llave usada para tornillos exagonales tiene bordes paralelos, lo que facilita el ajuste de la llave.

Las llaves pentagonales pueden ser de dos clases:



Figura 23



Figura 24

La primera (figura 23) puede escapar del bulón con facilidad y la segunda (figura 24) se puede colocar solo por arriba.

La conclusión de este análisis es que el exágono es el polígono más adecuado; por ese motivo las cabezas de los bulones son generalmente exagonales.

IV. 1°. Resolución geométrica de la ecuación de segundo grado.

Consideremos el problema de determinar, con regla y compás, las raíces de la ecuación: $x^2 + bx + c = 0$ [3].

Supongamos $c \neq 0$ pues, si $c = 0$, las raíces de la ecuación son 0 y $-b$.

1er. caso: $c > 0$

En este caso las raíces x_1 y x_2 de la ecuación tienen el mismo signo y: $|x_1| + |x_2| = |b|$; $|x_1| \cdot |x_2| = c$.

Construcción:

Tracemos una recta r y sobre ella, marquemos los segmentos \overline{MN} , \overline{NO} y \overline{OP} de longitud, respectivamente c ; 1 y $|b|$ (figura 25).

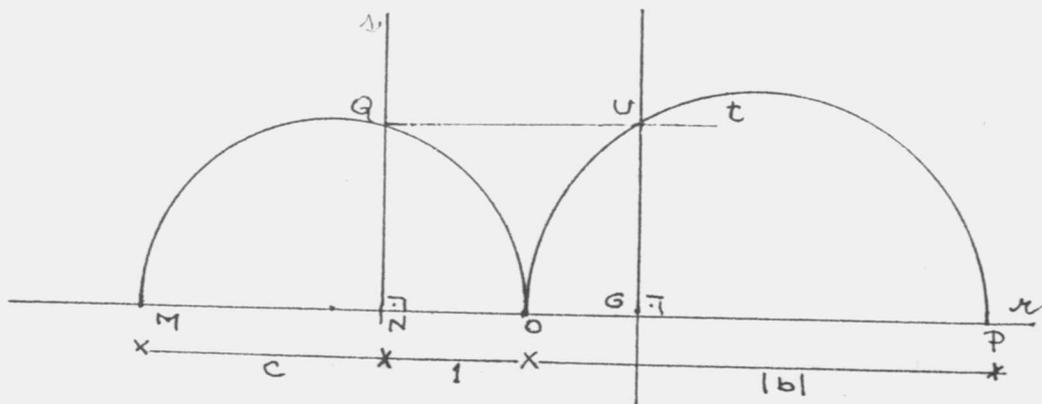


Figura 25

Tracemos dos semicircunferencias de \overline{MO} y \overline{OP} como diámetros. Por N levantemos la perpendicular s a la recta r, determinando el punto Q en la semicircunferencia de diámetro \overline{MO} .

De este modo $\overline{NQ}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{NO} = c$, y, $\overline{NQ} = \sqrt{c}$.

Por Q tracemos t||r, determinando U en la semicircunferencia de diámetro \overline{OP} . Por el punto U tracemos la recta v \perp r, determinando G en r, de manera que los segmentos \overline{OG} y \overline{GP} representan los valores absolutos de las raíces de la ecuación, ya que $\overline{GU} = \overline{NQ} = \sqrt{c}$ y $\overline{GU}^2 = \overline{OG} \cdot \overline{GP}$.

Luego $\overline{OG} \cdot \overline{GP} = c$ y por construcción $|b| = \overline{OG} + \overline{GP}$.

Entonces \overline{OG} y \overline{GP} son dos segmentos cuya suma es $|b|$ y cuyo producto es c.

Si $b < 0$, las raíces son: $x_1 = \overline{OG}$ y $x_2 = \overline{GP}$.

Si $b > 0$, las raíces son: $x_1 = -\overline{OG}$ y $x_2 = -\overline{GP}$.

Observación: Si la recta t, soporte de \overline{QU} no intercepta a la semicircunferencia de diámetro \overline{OP} , esto es, si $\sqrt{c} > \frac{1}{2} |b|$, las raíces son imaginarias y la construcción no permite determinarlas.

Lo mismo ocurre en el caso particular de $b = 0$.

2do. caso: $c < 0$.

En este caso, las raíces tienen signos contrarios y siendo x_1 la raíz de mayor valor absoluto debemos tener: $|x_1| - |x_2| = |b|$; $|x_1| \cdot |x_2| = |c|$.

El problema consiste en determinar dos segmentos de recta cuya diferencia sea $|b|$ y cuyo producto sea c.

Conclusión: como en el primer caso determinaremos los puntos M, N, O y P en la recta r y un punto Q sobre la

semicircunferencia. Tenemos como antes $\overline{NQ} = \sqrt{c}$.

Traslademos \overline{NQ} una dirección paralela a \underline{g} obteniendo un segmento \overline{OU} . Unamos U al centro I de la circunferencia, determinando el diámetro \overline{GH} , de manera que los segmentos \overline{UH} y \overline{UG} representan las raíces de la ecuación, ya que $\overline{UH} - \overline{UG} = \overline{GH} = |b|$ (diámetro) (figura 26).

Por otro lado, por ser \overline{OU} tangente y \overline{HU} secante al círculo de diámetro \overline{OP} , aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle OUI$, tenemos:

$$\overline{OU}^2 = \overline{NQ}^2 = |c| = \overline{UH} \cdot \overline{UG}.$$

Entonces \overline{UH} y \overline{UG} son dos segmentos cuya diferencia es $|b|$ y cuyo producto es $|c|$.

Si $b < 0$, las raíces son $x_1 = \overline{UH}$ y $x_2 = -\overline{UG}$.

Si $b > 0$, las raíces son $x_1 = -\overline{UH}$ y $x_2 = \overline{UG}$.

Observación: En estos casos el problema tiene siempre solución. Si $b = 0$, tenemos un caso particular en que $I = O = G = H$. (circunferencia de centro I y radio 0), y las raíces son \overline{UO} y $-\overline{UO}$.

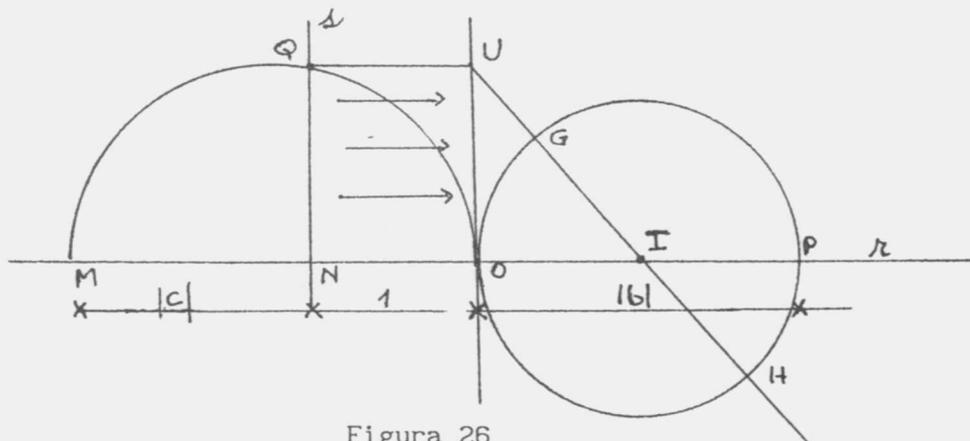


Figura 26

2°. Ecuación de segundo grado: Completando cuadrados:
[4].

Introducción: observamos actualmente que el camino relativo a la resolución de la ecuación de segundo grado es restringido prácticamente a la representación de la fórmula y, algunas veces a las relaciones entre coeficientes y raíces.

Generalmente la curiosidad surge en la relación de la manera de como aparece la fórmula, y no en cuanto a su utilización.

Hallamos conveniente que se muestre y justifique que durante su representación el surgimiento de la fórmula de resolución.

Tratamos aquí algunos puntos que ayudarán a los profesores en su tarea, particularmente aquellos que deseen rever en clase o estudiar las funciones de segundo grado y la forma de determinar sus raíces.

Un poco de historia: En el período Babilónico antiguo, los babilonios ya manipulaban operaciones algebraicas y resolvían ecuaciones de segundo grado completas, pues algunas formas de factorización eran bien conocidas. Transportaban términos en ecuaciones de modo semejante a lo que hacemos hoy.

Sabemos también que los babilonios efectuaban operaciones como sumar longitudes con áreas, no teniendo aplicación a problemas prácticos.

Algunos siglos más tarde los griegos desarrollarán Algebra, desde el punto de vista geométrico. Para demostrar la identidad: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, por ejemplo,

representaban $(a+b)^2$ como área de un cuadrado de lado $(a+b)$.

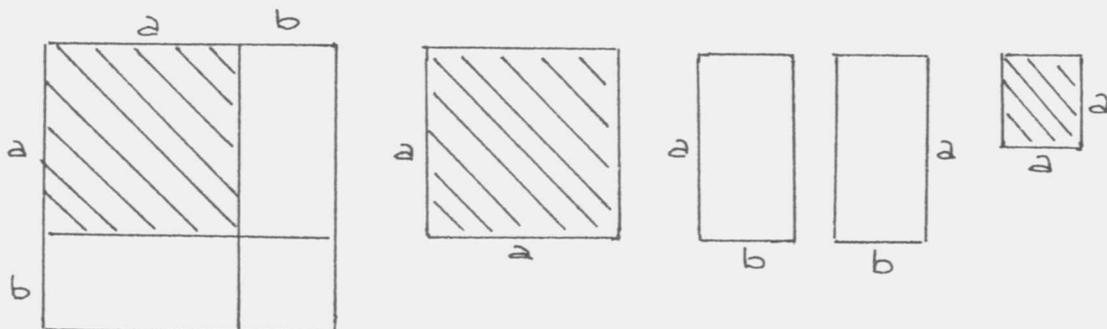


Figura 27

En el siglo IX, el matemático árabe al-Khowarizini, resuelve algunos tipos de ecuaciones cuadráticas siguiendo ciertas reglas algebraicas, justificando los resultados geoméricamente, representando los términos de la ecuación por cuadrados o rectángulos (semejante a los griegos) y completando un cuadrado mayor.

Para dejar claro, veamos como se justifica geoméricamente, por ejemplo, la solución positiva de $x^2 + 8x = 9$, que es $x = 1$ encontrada algebraicamente.

Tomemos un cuadrado de lado x para representar x^2 y cuatro rectángulos de ancho x y largo 2 para representar $8x$. De acuerdo a la figura 28: $\text{área} = x^2 + 4 \cdot (2x) = x^2 + 8x$.

De esa forma obtenemos una figura de área igual a 9 , ya que $x^2 + 8x = 9$.

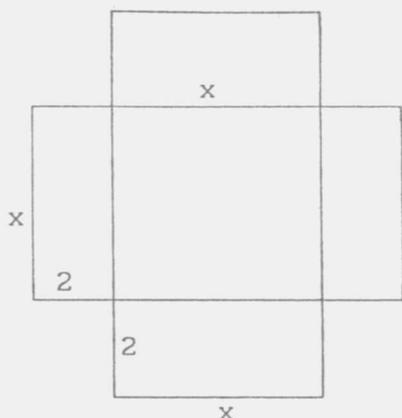


Figura 28

Para completar el cuadrado debemos adicionar cuatro cuadrados de lado 2; de acuerdo a la figura anterior: $\text{área} = 9 + 4.4 = 25$.

Obtenemos así un cuadrado de área 25, por lo que el lado del cuadrado mayor es 5 y de este modo obtenemos: $x = 5 - 2.2 = 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.BOSCO PITOMBEIRA, "Un problema de geometría", Revista Professor Matemática-10.(1987), pág. 41-47.
- [2] GIMENES L.M.-JACUBOVIC J., "Por que o parafuso e sextevado?", Revista do Professor Matemática, 4(1984), pág. 9-11.
- [3] NELSON TUNALA, "Resolução geométrica da equação do 2do. grau", Rev. Prof. Matem. 12 (1988), 33-36.

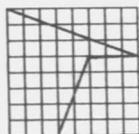
[4] L.P. PASTOR, "Ecuaciones do 2do. grau: completando cuadrados", Revista Professor Matemática, 6-(1985), pág. 36-38.

[5] E. ROSA. "Manía de Pitágoras", Revista Professor Matemática, 2 (1983), pág. 14-17.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA,
LICEO AERONAUTICO MILITAR,
AVENIDA FUERZA AEREA 1901,
FUNES - SANTA FE.

MISCELANEAS

Se corta el cuadrado según lo indican los trazos marcados. Se reubican las partes y resulta el rectángulo de la derecha.



El área del cuadrado es $8 \times 8 = 64$ mientras que el área del rectángulo es $5 \times 13 = 65$. ¿Qué sucedió?

E. Gentile

Mueva uno $| + | = |$

Mueva dos $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$
