LOS NUMEROS REALES Y CIERTOS RESULTADOS DE APROXIMACION

R. MIATELLO Y M.L. SALVAI

El objeto de esta nota es estudiar la distribución de ciertos conjuntos de numeros reales que poseen cierta estructura algebraica. Antes de abordar el tema específico que nos ocupará, daremos una breve introducción histórica.

Los números naturales son usualmente representados por puntos sobre una línea recta, cada punto separado del anterior por una unidad de longitud, como en el caso de un metro de carpintero. De manera similar, los números racionales se pueden representar sobre la misma recta, midiendo fracciones de longitud. La introducción del cero se atribuye a los hindúes y en el siglo XVII los algebristas italianos introdujeron los números racionales negativos. Gráficamente.

```
          -1/2    1/2
 ---|---|---|---|---|---
   -1       0       1
```

Los griegos fueron los primeros en observar que las fracciones resultan insuficientes a los fines de la geometría, mostrando en particular que la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 no puede ser un número racional; en términos geométricos, no existe una unidad de longitud (por más pequeña que ésta sea) tal que el lado y la diagonal de un cuadrado sean múltiplos naturales, ambos, de dicha unidad. Esto resultó un descubrimiento incómodo para los griegos pues introdujo cierta incompletitud lógica (temporaria) en la geometría euclídea, dado que en muchas demostraciones se suponía que dados dos segmentos cualesquiera, siempre existía una unidad de longitud común (tal es el caso, por ejemplo, en la demostración usual del teorema de Thales).

El hecho anterior se expresa usualmente diciendo que $\sqrt{2}$ "es" un número irracional, lo cual, en términos geométricos significa, que el punto P que se obtiene intersecando la recta con un círculo cuyo radio es la diagonal de un cuadrado de lado 1, no corresponde a un número racional. En otros términos, los números racionales no "llenan" la recta.

Muchos otros números irracionales aparecen cuando se evalúan valores racionales de ciertas funciones de la matemática . Observemos que los valores dados en las tablas de logaritmos o de funciones trigonométricas son evidentemente racionales pero en realidad éstos son sólo aproximaciones racionales de los verdaderos valores, que son irracionales, con pocas excepciones.

Los números reales incluyen a los números racionales e irracionales y constituyen el sistema central de la matemática. En geometría cualquier discusión sobre áreas o volúmenes lleva naturalmente a los números reales. Si consideramos nuevamente la representación de números por puntos sobre una línea recta encontramos que si bien todo segmento, por pequeño que éste sea, contiene una infinidad de números racionales, existen a la vez una infinidad de puntos que miden longitudes que no pueden ser expresadas por números racionales. Sin embargo una vez que se tienen en cuenta todos los números reales, cada punto de la recta corresponde a un número real y viceversa (ver por ejemplo, "Cálculo" de M. Spivak).

Existe otra división fundamental en los números reales en dos clases: los números algebraicos y los trascendentes. Un número real se dice algebraico si satisface alguna ecuación algebraica a coeficientes enteros. Por ejemplo cualquier número racional q satisface la ecuación $x-q = 0$; por otra parte, los números irracionales $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{2}$ satisfacen respectivamente las ecuaciones $x^2 - 5 = 0$ y $x^3 - 2 = 0$, y por lo tanto son también algebraicos. Los números no algebraicos son llamados trascendentes. Su existencia no es para nada obvia y fue probada por el matemático francés Liouville, quien construyó explícitamente ciertos números no algebraicos. Posteriormente fue probado que π es trascendente, con lo cual se dio una respuesta negativa al antiguo problema de la cuadratura del círculo, es decir, es imposible construir con regla y compás el lado l de un cuadrado con área igual al área de un círculo de radio 1. En efecto, de lo contrario se tendría que $l^2 = \pi$ donde l es "construíble con regla y compás" y por lo tanto algebraico (la prueba de este hecho es no trivial). Por lo tanto $l^2 = \pi$ también seria algebraico, un absurdo.

Otro resultado fundamental fue probado a fin del siglo XIX por el matemático alemán G. Cantor. Este no exhibió nuevos números trascendentes sino que probó que en cierto sentido existen "muchos más" números trascendentes que algebraicos. Para describir este resultado daremos un ejemplo ilustrativo. Observemos en primer lugar que la función

$\phi(q) = q + \sqrt{2}$ asocia en forma unívoca, a cada número racional q, un número irracional. Además es fácil ver que los números de la forma $q + \sqrt{2}$ no agotan el conjunto de los números irracionales, que denotaremos I. En efecto, si s es racional, $s + \sqrt{3}$ es un número irracional que no es de la forma $\phi(q)$ para q racional. De lo contrario

$$s + \sqrt{3} = q + \sqrt{2} \text{ o } (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = q - s \text{ racional; luego}$$

$$3 + 2 - 2\sqrt{6} = (q-s)^2.$$

o sea $$(5 - (q - s)^2)^2 = 24$$

imposible, pues 24 no es cuadrado de ningún número racional (¿por qué?). Este ejemplo sugiere que hay "más" números irracionales que racionales. Una demostración matemáticamente rigurosa de este hecho requiere probar: (a) que existe una función inyectiva $\phi: Q \to I$ y (b) que no existe una función biyectiva $\psi: Q \to I$. De hecho, si $\phi(q) = q + \sqrt{5}$, $q \in Q$, ϕ verifica (a) (y no (b)). Sin embargo, la demostración de (b) es menos sencilla. Se puede hacer utilizando la expansión decimal de los números reales.

Luego de esta introducción histórica pasamos a describir el objeto principal de esta nota. Como motivación supongamos que deseamos investigar cómo se distribuyen los valores de la sucesión $\cos(n)$, $n = 1,2,3,\ldots$, y en particular determinar, si existe, su límite. Los siguientes son valores de computadora dando $\cos(n)$ para $1 \leq n \leq 50$.

n	cos n	n	cos n	n	cos n
1	.540	18	.660	35	-.903
2	-.419	19	.988	36	-.127
3	-.989	20	.408	37	.765
4	-.653	21	.547	38	.955
5	-.283	22	.999	39	.266
6	-.960	23	.532	40	.666
7	-.753	24	.424	41	.987
8	-.145	25	.991	42	.399
9	-.911	26	.646	43	.555
10	-.839	27	.292	44	.999
11	-.004	28	.962	45	.525
12	-.843	29	.748	46	.432
13	-.907	30	.154	47	.992
14	-.136	31	.914	48	.640
15	-.759	32	.834	49	.300
16	-.957	33	.013	50	.964
17	-.275	34	.848		

Estos valores parecen indicar que la sucesión no posee límite pero no dan idea precisa de los llamados "puntos de acumulación" de la sucesión. Para analizar este problema, seremos conducidos naturalmente a usar nociones del Algebra: grupos, subgrupos e independencia lineal, que permitirán dar una respuesta sencilla a la pregunta anterior. Es un ejemplo que ilustra la unidad de la matemática, pues muestra que sus diversas ramas están fuerte y sutilmente relacionadas entre sí.

En lo que sigue necesitaremos introducir algunos conceptos teóricos.

1. Definición. Sean I un intervalo de números reales y $D \subset I$. Diremos que D es denso en I si para todo x en I existe una sucesión $\{x_n\}$ en D tal que $\lim x_n = x$.

Ejemplos. Q

(i) ϕ es denso en $\mathbb{R}$. (ejercicio)

(ii) $(0,1)-\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $[0,1]$.

Lema. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $D \subseteq I$. Entonces D es denso en I si y sólo si para todo intervalo abierto J tal que $I \cap J \neq \phi$ es $D \cap J \neq \phi$.

Prueba.

Supongamos que D es denso en I, y sean J un intervalo abierto y $x \in I \cap J$. Por hipótesis existe $\{x_n\}$ una sucesión en D tal que $\lim x_n = x$ y esto dice que $x_n \in J$ si n es mayor que cierto N. Como la sucesión está en D, $x_n \in D \cap J$, si $n > N$.

Para probar la recíproca tomemos $x \in I$. Por hipótesis, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe x_n en $D \cap (x-\frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. Luego $\lim x_n = x$. Esto demuestra que D es denso en I.

Ejemplo.

El lema anterior implica que, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, pues en todo intervalo abierto de números reales existe al menos un número racional.

Ahora consideremos la siguiente pregunta: ¿Para cuáles valores de $a \in \mathbb{R}$ es el conjunto $G_a = \{\cos(na) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ denso en $[-1, 1]$?

3. Lema. G_a es denso en $[-1,1]$ si y sólo si $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}2\pi = \{na + 2\pi m \mid n,\ m \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Prueba.

Notemos que $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}\,2\pi$ es la preimagen de G_a por la función coseno.

$\Leftarrow$) Sea $y \in [-1,1]$ y sea x tal que $\cos x = y$. Por la densidad de G_a en $\mathbb{R}$ existe una sucesión $\{x_n\}$ en G_a tal que $x_n \to x$. Por continuidad es $\lim \cos x_n = \cos x = y$, y además $\cos(x_n)$ es de la forma $\cos(ma)$ con $m \in \mathbb{Z}$ ya que $x_n \in \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}2\pi$. Esto prueba que G_a es denso en $[-1,1]$.

$\Leftarrow$) sea $x \in \mathbb{R}$; entonces $x \in [k\pi,(k+1)\pi)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Se tiene que $\cos|_{[k\pi,(k+1)\pi]}$ es biyectiva sobre $[-1,1]$ y admite inversa $\arccos_k : [-1,1] \to [k\pi, (k+1)\pi]$, que es continua pues cos lo es. Por la densidad de G_a en $[-1,1]$, existe $\{y_n\}$ una sucesión en G_a tal que $y_n \to y = \cos x$, luego $\arccos_k(y_n) \to \arccos_k y = x$; y como x es arbitrario y $\arccos_k(y_n) \in \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}2\pi$ resulta que este conjunto es denso en $\mathbb{R}$.

Observación. $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}2\pi$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$, esto es, dados x,y en G también $x-y$ pertenece a G. Daremos un criterio que permitirá decidir si un subgrupo de $\mathbb{R}$ es denso o no. Así, a través del lema anterior tendremos una respuesta para la pregunta anterior.

Definicion. Se dice que un subconjunto no vacío G de $\mathbb{R}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$ si $x-y \in G$ para todo $x,y \in G$. Notemos que

G verifica que $\quad$ i) $0 \in G$ (pues $G \neq \phi \Rightarrow$ existe

$$x \in G \Rightarrow 0 = x - x \in G) \qquad (4)$$

$$\text{ii) } x \in G \Rightarrow -x = 0 - x \in G \qquad (5)$$

$$\text{iii) } x, y \in G \Rightarrow x + y = x-(-y) \in G \quad (6)$$

7. Ejemplos.

Se verifica fácilmente que son subgrupos de $\mathbb{R}$ los siguientes conjuntos $\mathbb{Z}b = \{nb \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \{na+mb \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ (ya lo hicimos notar para $b = 2\pi$).

Dejamos al lector la verificación de que $\mathbb{Z}\,\frac{1}{3} + \mathbb{Z}\,\frac{11}{23} = \mathbb{Z}\,\frac{1}{69}$. (¿puede generalizar este hecho?).

Es obvio que también $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son subgrupos de $\mathbb{R}$.

8. Proposición.

Si G es un subgrupo de $\mathbb{R}$ que no es denso, entonces existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $G = \mathbb{Z}b$ (utilizamos la notación de (7)).

Prueba.

Tomaremos como definición de densidad la dada mediante el Lema 1.

Si $G = \{0\}$ ($0 \in G$ por (4)), el enunciado es trivial, pues se elige $b = 0$.

Si existe $x \in G$, $x \neq 0$, también $-x \in G$. Luego $\{x \in G \mid x > 0\}$ es no vacío. Sea $b = \inf \{x \in G \mid x > 0\}$. Claramente $b \geq 0$.

Supongamos que $b = 0$. Veamos que en ese caso G es denso en $\mathbb{R}$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un elemento de G en el intervalo $J = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Como $\inf \{x \in G \mid x > 0\} = 0$, existe $g \in G$ tal que $0 < g < \varepsilon$

$$0 \quad g \quad \varepsilon \qquad\qquad x_0-\varepsilon \quad x_0 \quad x_0+\varepsilon$$

Sea k el menor entero tal que $kg > x_0 - \varepsilon$. Si fuera $kg \geq x_0 + \varepsilon \Rightarrow (k-1)g = kg-g \geq x_0 + \varepsilon - g > x_0 > x_0 - \varepsilon$, con lo cual k no sería el menor entero tal que $kg > x_0 - \varepsilon$, un absurdo. Luego $kg < x_0 + \varepsilon \Rightarrow kg \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Como ε es arbitrario y obviamente $kg \in G$, resulta que G es denso en $\mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $b > 0$.

Si $b \notin G$, existe una sucesión decreciente $g_n \in G$ tal que $\lim_{n\to\infty} g_n = b$, $g_n \neq g_m$ si $n \neq m$.

Se sigue que $g'_n = g_n - g_{n+1} \longrightarrow b-b = 0$. Como $g'_n \in G$, esto implica que $b = 0$, un absurdo. Luego $b \in G$.

Probemos ahora que $G = \{kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$

La inclusión $\supset$ es evidente, por (9).

Comprobemos la recíproca. Sea $g \in G$, si $g \neq kb$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $mb < g < (m+1)b$ luego $0 < g-mb<b$. Como $g-mb \in G$, esto contradice la definición de b un absurdo. Por lo tanto $g = kb$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

10. Ejemplos.

El conjunto $\left\{\frac{m}{p^n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z}\right\}$, donde p es un primo fijo, es subgrupo de $\mathbb{R}$ y resulta denso por la proposición anterior, ya que no es de la forma $\mathbb{Z}b$. En efecto, existen en él números no nulos de módulo tan pequeño como se quiera, por ejemplo $\frac{1}{p^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

<u>Definición</u>. Se dice que la n-upla $a_1, \ldots, a_n$ $(a_i \in \mathbb{R})$ es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente si $m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n = 0$ con $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$, $m_1 = \ldots = m_n = 0$. Esto es equivalente a afirmar que si un número admite una expresión como combinación lineal entera de $a_1, \ldots, a_n$, dicha expresión es única.

11. Lema.

Sean a_1, $a_2 \in \mathbb{R} = \{0\}$. Entonces $G = \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2$ es denso en $\mathbb{R} \Longleftrightarrow a_1$ y a_2 son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes.

Prueba.

Demostraremos ambas implicaciones por el absurdo:

$\Rightarrow$) Supongamos que a_1, a_2 no son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes; entonces existen n, $m \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $0 = ma_1 + na_2$; luego $a_2 = -\frac{m}{n} a_1$ y en consecuencia

$$ka_1 + h\, a_2 = ka_1 + h\left[-\frac{m}{n} a_1\right] = (kn - hm)\,\frac{a_1}{n} \quad \text{si} \quad k, h \in \mathbb{Z}.$$

Como $ka_1 + h\, a_2$ es un elemento cualquiera de G, resulta $G \subset \mathbb{Z}\,\frac{a_1}{n}$, que no es denso en $\mathbb{R}$. Luego G no es denso en $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que G no es denso en $\mathbb{R}$, entonces por la

Proposición 8, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $G = \{nb | n \in \mathbb{Z}\}$. Como a_1, $a_2 \in G$, $a_1 = n_1 b$ y $a_2 = n_2 b$ para ciertos n_1, n_2 enteros no nulos. Luego, $n_2 a_1 - n_1 a_2 = n_2 n_1 b - n_1 n_2 b = 0$, y a_1, a_2 no son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes.

En consecuencia se tiene la respuesta a la pregunta formulada inicialmente.

12. Corolario. $\{\cos(na) | n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $[-1,1]$ si y sólo si a no es un múltiplo racional de π. En este caso para todo $y \in [-1,1]$ existe una subsucesión de $\cos(na)$ que tiende a y.

Prueba. Por el Lema 3 $\{\cos(na, | n \in \mathbb{R}\}$ es denso en $[-1,1]$ sii $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}2\pi$ es denso en $\mathbb{R}$ y por el lema anterior esto es equivalente a que a y 2π sean $\mathbb{Z}$-linealmente independientes. Ahora $a = \frac{n}{m} 2\pi$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ implica $ma - 2n\pi = 0$ con $m \neq 0$; y recíprocamente $na + m2\pi = 0$ con $n \neq 0$ ó $m \neq 0$ implica $a = 0$ ó $a = \frac{-m}{n} 2\pi$.

Sea S la circunferencia de radio 1 en $\mathbb{C}$:
$S = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \, | \theta \in \mathbb{R}\}$

Sea D un subconjunto de S. Diremos que D es denso en S si para todo elemento $x + iy$ de S existe $\{x_n + iy_n\}$ una sucesión en D tal que $x_n + iy_n \to x + iy$ (esto significa que $x_n \to x$ e $y_n \to y$).

13. Corolario. El conjunto $H_a = \{\cos(na) + i \operatorname{sen}(na) | n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en S si y sólo si a no es un múltiplo racional de π.

Prueba. Por el Corolario 12, es equivalente demostrar que H_a es denso en S si y sólo si $\{\cos(na) | n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $[-1,1]$.

La implicación $(\Rightarrow)$ es obvia.

Para probar la restante damos $x + iy \in S$. Se ve que $y = sg(y)\sqrt{1-x^2}$, donde $sg(y) = 1$ si $y \geq 0$ y $sg(y) = -1$ si $y < 0$.

Por hipótesis existe una sucesión de enteros $\{n_j\}$ tal que $\lim_n \cos(n_j a) = x$. Podemos elegir n_j tales que $sg(\operatorname{sen}(n_j a)) = sg(y)$, ya que $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$.

Así resulta $\lim \operatorname{sen}(n_j a) = \lim sg(y)\sqrt{1-\cos^2(n_j a)} =$
$= sg(y)\sqrt{1-x^2} = y$.

Luego $\cos(n_j a) + i\operatorname{sen}(n_j a) \to x + iy$ lo que prueba que H_a es denso en S.

En una próxima nota consideraremos algunas generalizaciones naturales de los teoremas anteriores. Por ejemplo, un problema análogo al del Lema 11 es el siguiente:

Bajo qué condiciones sobre $a, a' \in \mathbb{R}$ es posible aproximar cualquier vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ por $k(a,a')$ $(k \in \mathbb{Z})$ a menos de múltiplos enteros de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$.

Dicho de otra forma: dado (x, y) y $\epsilon > 0$ ¿ existen enteros k, m, m′ tales que <u>simultaneamente</u>

$$|ka - x - m| < \epsilon$$
$$|ka' - y - m'| < \epsilon?$$

Esta pregunta, así como la generalización a n dimensiones fue estudiada por matemáticos célebres del siglo pasado, como Lagrange, Jacobi, Dirichlet, Hermite y Kronecker.