Una Prueba del Teorema Fundamental del Algebra

Diego Vaggione

El objetivo de este trabajo es proveer una prueba del Teorema Fundamental del Algebra al lector que maneje con cierta madurez conceptos tales como los de sucesión de números complejos, convergencia, subsucesiones, continuidad de funciones complejas, así como la interpretación geométrica de **C**.

Un modelo muy usual de prueba del Teorema Fundamental del Algebra consiste en derivar éste del Teorema de Liouville usando conceptos topológicos elementales. La dificultad presentada por tal esquema es que las pruebas del Teorema de Liouville envuelven el concepto de integral lo cual hace que el lector crea que una prueba del Teorema Fundamental del Algebra es algo engorroso aún con la posibilidad de usar argumentos topológicos elementales.

La prueba dada en este trabajo sigue el mismo esquema salvo por el hecho de que se reemplaza el Teorema de Liouville por el Teorema del Módulo Máximo para funciones racionales (esto a los fines de evitar el problema antes mencionado). Una de las ventajas de este esquema de prueba es que la mayoría de los resultados involucrados en el camino hacia el Teorema Fundamental del Algebra tienen interés propio.

1. Notación y Resultados Asumidos. Como es usual **C** denotará el conjunto de los números complejos. Con $Re(z)$ e $Im(z)$ denotaremos la parte real y la parte imaginaria del número complejo z. Con $|z|$ denotaremos el módulo de z, es decir:

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}.$$

Se supone que el lector maneja con cierta madurez los conceptos de sucesión de números complejos, convergencia, subsucesiones, continuidad de funciones $f : A \to B$, con $A, B \subseteq \mathbf{C}$, así como la interpretación geométrica de $\mathbf{C}$ que identifica a éste con el plano $\mathbf{R}^2$ vía el mapeo

$$z \to (Re(z), Im(z)).$$

Vía tal identificación tenemos definido en $\mathbf{C}$ el producto escalar, a saber:

$$< z, w >= Re(z)Re(w) + Im(z)Im(w), \; z, w \in \mathbf{C},$$

el cual cumple la siguiente igualdad:

$$< z, w >= |z||w|cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre z y w (pensados como vectores del plano). Otras propiedades básicas del producto escalar son:

$$< z, w_1 + w_2 >=< z, w_1 > + < z, w_2 >$$

$$< z_1 + z_2, w >=< z_1, w > + < z_2, w >$$

$$< rz, w >=< z, rw >= r < z, w >$$

$$|z|^2 =< z, z >,$$

$z, z_1, z_2, w_1, w_2, w \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{R}$.

Usaremos la desigualdad del triángulo, es decir

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

o su obvia consecuencia

$$|z+w| \geq |z| - |w|.$$

También se supondrá que el lector maneja la representación polar de un complejo z, por medio de la cual se puede probar el siguiente

Lema 1.1: Toda ecuación de la forma $z^n = a$, con $n \in \mathbf{N}$ y $a \in \mathbf{C}$ tiene una solución en $\mathbf{C}$.

Dados $a \in \mathbf{C}, R \geq 0$, con D(a, R) denotaremos al conjunto

$$\{z \in \mathbf{C} |\ |z-a| < R\},$$

y con $\overline{D(a,R)}$ denotaremos al conjunto

$$\{z \in \mathbf{C} |\ |z-a| \leq R\}.$$

2. Máximos y Mínimos de Funciones Continuas.

Lema 2.1: (a) Si $\{r_n : n \in \mathbf{N}\} \subseteq [a,b] \subseteq \mathbf{R}$ y $\lim_{n\to\infty} r_n = r$, entonces $r \in [a,b]$.

(b) Si $\{z_n : n \in \mathbf{N}\} \subseteq \overline{D(a,R)}$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, entonces $z \in \overline{D(a,R)}$.

Demostración: (a) Si $r \notin [a,b]$, entonces $r < a$ o $r > b$. Supongamos que $r < a$, entonces hay un $\epsilon > 0$ tal que $\{x||x-r| < \epsilon\} \cap [a,b] = \emptyset$, y por lo tanto a partir de cierto $N \in \mathbf{N}$ los r_n's no están en $[a,b]$, lo cual es absurdo. Si $r > b$ se llega a un absurdo en forma similar.

(b) Ya que $< |z_n - a| : n \in \mathbf{N} >$ tiene límite $|z - a|$ (¿por qué?), por (a) se tiene que $|z - a| \in [0, R]$.

Sea $A \subseteq \mathbf{C}$. Diremos que z es un punto de acumulación de A si $\forall \epsilon > 0$ hay un $a \in A - \{z\}$ tal que $|z - a| < \epsilon$. Nótese que si A está contenido en $\mathbf{R}$, entonces el concepto recién definido de punto de acumulación de A coincide con el que se define usualmente cuando se trabaja con conjuntos de reales.

Lema 2.2: (a) Sea $< r_n : n \in \mathbf{N} >$ una sucesión de números reales tal que el conjunto $\{|r_n| : n \in \mathbf{N}\}$ es acotado superiormente. Entonces hay una subsucesión $< r_{n_k} : k \in \mathbf{N} >$ la cual es convergente.

(b) Sea $< z_n : n \in \mathbf{N} >$ una sucesión de números complejos tal que el conjunto $\{|z_n| : n \in \mathbf{N}\}$ es acotado superiormente. Entonces hay una subsucesión $< z_{n_k} : k \in \mathbf{N} >$ la cual es convergente.

Demostración: (a) Sean $a, b \in \mathbf{R}$ tales que $[a, b] \supseteq \{r_n : n \in \mathbf{N}\}$. Supongamos que el conjunto $\{r_n : n \in \mathbf{N}\}$ no tiene puntos de acumulación. Sea:

$$b_1 = Sup\{x \in [a, b] | [a, x] \cap \{r_n : n \in \mathbf{N}\} \, es \, un \, conjunto \ finito\}. \quad (1)$$

Queda como ejercicio verificar que tal supremo existe. Si $b_1 < b$, entonces ya que b_1 no es un punto de acumulación de $\{r_n : n \in \mathbf{N}\}$, hay un $\epsilon > 0$ tal que en el conjunto $(b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon)$ no hay ningún r_n, lo cual nos dice que b_1 no es el supremo dado por (1). O sea que $b_1 = b$ y por lo tanto tenemos que $\{r_n : n \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto finito, situación en la cual es fácil dar una subsucesión convergente (ejercicio). Nos queda el caso en el que el conjunto $\{r_n : n \in \mathbf{N}\}$ tiene un punto de acumulación x. Definamos la sucesión de naturales $< n_k : k \in \mathbf{N} >$ recursivamente de la siguiente forma:

$$n_1 = \text{menor n tal que } r_n \in (x-1, x+1)$$
$$n_{k+1} = \text{menor n tal que } n > n_k \text{ y } r_n \in (x - \tfrac{1}{k+1}, x + \tfrac{1}{k+1}),\ k \geq 1.$$

Queda como ejercicio para el lector probar que la subsucesión $< r_{n_k} : k \in \mathbf{N} >$ converge a x (use que $\forall k \in \mathbf{N},\ r_{n_k} \in (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$).

(b) Aplicando (a) a la sucesión $< Re(z_n) : n \in \mathbf{N} >$, se tiene que hay una subsucesión $< Re(z_{n_k}) : k \in \mathbf{N} >$ la cual converge a un real r. Similarmente, aplicando (a) a la sucesión $< Im(z_{n_k}) : k \in \mathbf{N} >$, se tiene que hay una subsucesión $< Im(z_{n_{k_e}}) : e \in \mathbf{N} >$ la cual converge a un real s. Ya que

$$\lim_{k \to \infty} Re(z_{n_k}) = r,$$

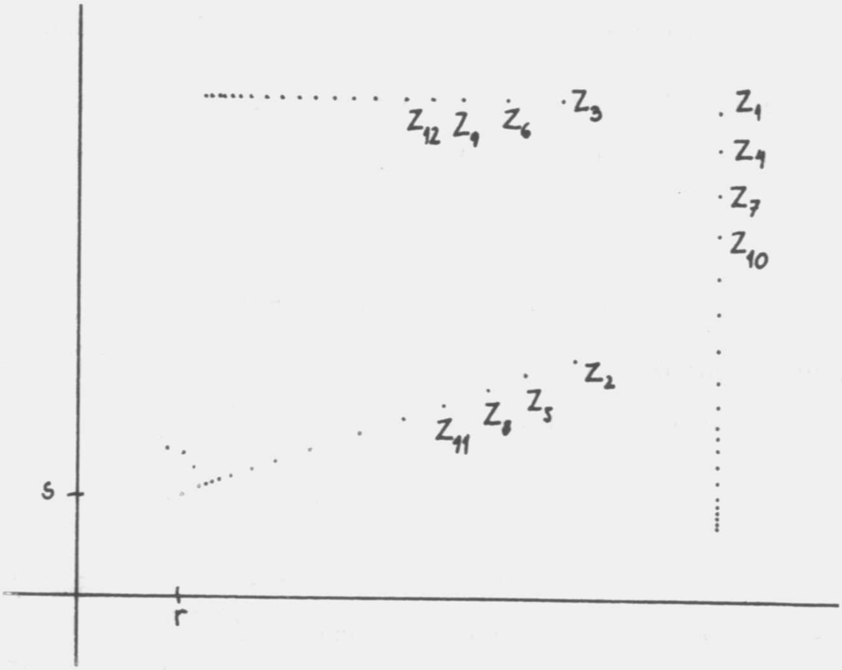
se tiene que

$$\lim_{e \to \infty} Re(z_{n_{k_e}}) = r,$$

con lo cual

$$\lim_{e \to \infty} z_{n_{k_e}} = \lim_{e \to \infty} (Re(z_{n_{k_e}}) + iIm(z_{n_{k_e}})) = r + is.$$

El siguiente gráfico puede resultar útil.



$$
\begin{aligned}
n_1 &= 2 & \qquad k_1 &= 1\\
n_2 &= 3 & k_2 &= 3\\
n_3 &= 5 & k_3 &= 5\\
n_4 &= 6 & k_4 &= 7\\
n_5 &= 8 & &\vdots\\
n_6 &= 9 & &\\
n_7 &= 11 & &\\
&\vdots & &
\end{aligned}
$$

Pregunta: ¿Es posible definir en (a) n_k = menor n tal que $r_n \in$

$(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ y evitar así una definición recursiva como la dada?

Teorema 2.3: Sea $f : \overline{D(a,R)} \to \mathbf{R}$ una función continua. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo, es decir hay elementos $z_m, z_M \in \overline{D(a,R)}$ tales que

$$f(z_m) \leq f(z) \leq f(z_M), \quad \forall z \in \overline{D(a,R)}.$$

Demostración: Supongamos que $\{f(z) : z \in \overline{D(a,R)}\}$ es acotado superiormente. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea $z_n \in \overline{D(a,R)}$ tal que

$$f(z_n) \geq (Sup\{f(z) : z \in \overline{D(a,R)}\}) - 1/n.$$

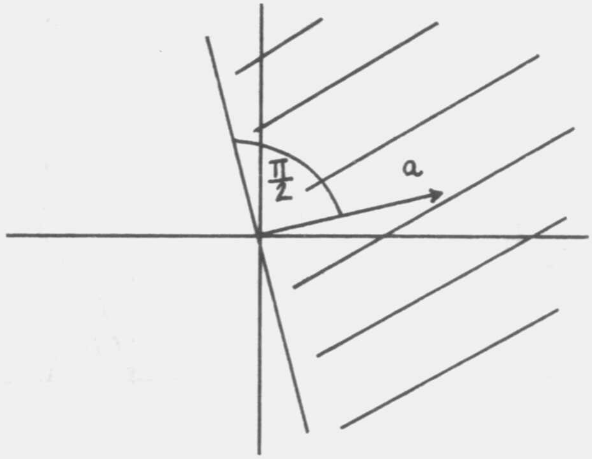
Por el Lema 2.2, $< z_n : n \in \mathbf{N} >$ tiene una subsucesión $< z_{n_k} : k \in \mathbf{N} >$ que es convergente a un z_M, el cual pertenece a $\overline{D(a,R)}$ por Lema 2.1. El lector fácilmente podrá verificar que $f(z_M) = \text{Sup } \{f(z) : z \in \overline{D(a,R)}\}$. Si la imagen de f no fuera acotada superiormente, entonces para cada $n \in \mathbf{N}$ habría un $z_n \in \overline{D(a,R)}$ tal que $f(z_n) \geq n$, lo cual procediendo análogamente al caso acotado conduce a un absurdo (ejercicio). Queda como ejercicio probar que f alcanza un mínimo.

3. El Teorema del Módulo Máximo para Funciones Racionales.

Dado $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$, con S_a denotaremos el conjunto

$$\{z \in \mathbf{C} | < z, a > \geq 0\}.$$

Si recordamos que $< z, w > = |z||w| cos\theta$, donde $\theta =$ ángulo entre z y w, entonces podremos notar que S_a es el semiplano dado por el siguiente dibujo:



Lema 3.1: Sea f tal que $f(D(a,\epsilon)) \subseteq S_d$ para algún $\epsilon > 0$ y $d \neq 0$. Entonces si $\lim\limits_{z \to a} f(z)/c(z-a)^k$ existe, éste debe ser igual a cero.

Demostración: Supongamos $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{c(z-a)^k} = b \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b = 1$ y que $d = 1$ (tómese $\tilde{f} = d^{-1}f$ y $\tilde{c} = bd^{-1}c$). Claramente hay una sucesión z_n tal que $z_n \to a$ y $c(z_n - a)^k$ es un real menor o igual que cero, para todo $n \in \mathbf{N}$ (use el Lema 1.1). Se tiene:

$$
\begin{aligned}
1 = \lim_{n \to \infty} f(z_n)/c(z_n - a)^k &= Re(\lim_{n \to \infty} f(z_n)/c(z_n - a)^k) \\
&= \lim_{n \to \infty} Re(f(z_n))/c(z_n - a)^k \leq 0.
\end{aligned}
$$

El Lema 3.1 tiene un significado geométricamente claro. Llamemos g a la función $c(z-a)^k$. Nótese que $g(z)$ tiende a cero en la dirección y sentido que se quiera si se elige bien la manera en la que z tiende a a. Más concretamente dado un argumento θ hay una sucesión $\{z_n : n \in \mathbf{N}\}$

la cual tiende a a tal que $\forall n \in \mathbf{N}$, $arg(g(z_n)) = \theta$. Gráficamente

Si $\frac{f(z)}{g(z)} \to b \neq 0$, entonces a medida que vayamos variando arbitrariamente los valores de θ, la función f deberá comportarse de manera que los valores $arg(\frac{f(z_n)}{g(z_n)})$ tiendan a $arg(b)$, lo cual le será imposible si sus valores (en un entorno de a) están confinados a un semiplano dado.

De la discusión anterior debería extraerse la importante observación de que en general saber que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = b \neq 0$$

da más información acerca de la relación en el límite entre f y g que saber que $\lim_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 0$ ya que el segundo caso es equivalente a que $|f(z)|$ tienda a cero más rápidamente que $|g(z)|$, lo cual no nos dice nada de la relación en el límite entre $arg(f(z))$ y $arg(g(z))$.

Finalmente cabe destacar que decir que una función es analítica en una región G (o sea que existe $f'(z)$ para todo z en G) es en realidad una condición mixta que consiste en decir que sobre ciertos puntos de G se verifica la fuerte condición $\exists f' \neq 0$ y sobre el resto la más débil $\exists f' = 0$.

Lema 3.2: Sea $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, con $n \geq 1, a_n \neq 0$. Entonces si $p(a) = 0$, $p(z) = q(z)(z-a)$, donde

$q(z) = a_n z^{n-1} + (a_{n-1} + a_n a)z^{n-2} + (a_{n-2} + a_{n-1}a + a_n a^2)z^{n-3} + ... + (a_1 + a_2 a + ... + a_n a^{n-1})$.

Demostración: Es un simple chequeo.

Un conocido corolario del lema anterior es que un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces contadas con su multiplicidad.

Dados dos polinomios p, q, sin ceros en común, podemos definir una función R con dominio $D_R = \{z \in \mathbf{C} | q(z) \neq 0\}$, dada por

$$R(z) = p(z)/q(z), \ z \in D_R$$

Las funciones definidas de esta manera serán las llamadas funciones racionales. Nótese que en virtud del lema anterior, el dominio de una función racional es siempre el plano menos una cantidad finita de puntos.

Ejercicio: Una función racional asume una cantidad finita de veces cada valor de su imagen.

Teorema del Módulo Máximo para Funciones Racionales.

Sea R una función racional. Supongamos que $|R(a)| \geq |R(z)|$, $\forall z \in D(a, \epsilon)$ con $\epsilon > 0, a \in D_R$. Entonces R es constante.

Demostración: Supongamos R es no constante. Sean p, q sin ceros en común tales que $R(z) = p(z)/q(z)$, $\forall z \in D_R$. Se tiene que

$$R(z) - R(a) = \frac{q(a)p(z) - p(a)q(z)}{q(a)q(z)}, \ \forall z \in D_R \tag{2}$$

y ya que el polinomio $q(a)p(z) - p(a)q(z)$ es no constante (¿por qué?) y se anula en a, se tiene que por el Lema 3.1 hay un $k \geq 1$ y un polinomio $c(z)$ tales que

$$q(a)p(z) - p(a)q(z) = c(z)(z-a)^k, \ \ \forall z \in \mathbf{C}, \tag{3}$$

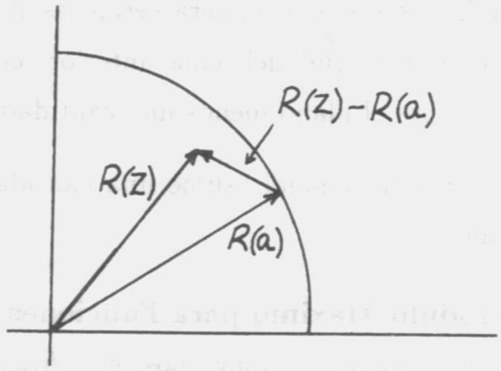
y además $c(a) \neq 0$. Usando (2) y (3) se deduce que

$$\frac{R(z) - R(a)}{(z-a)^k} = \frac{c(z)}{q(a)q(z)}, \ \ \forall z \in D_R - \{a\}.$$

Pero entonces claramente se tiene que

$$\lim_{z \to a} \frac{R(z) - R(a)}{(z-a)^k} \neq 0. \tag{4}$$

Si atendemos el siguiente dibujo:



veremos que $R(z) - R(a) \in S_{-R(a)}$, $\forall z \in D(a, \epsilon)$ (queda como ejercicio probar que $R(a) \neq 0$ ya que R es no constante). Para probar esta última aserción geométricamente clara, recordemos que

$$< R(z), R(a) > = |R(z)||R(a)|cos\theta,$$

donde $\theta =$ ángulo entre $R(z)$ y $R(a)$ (pensados como vectores de $\mathbf{R}^2$), lo cual nos dice que

$$
\begin{aligned}
< R(z) - R(a), -R(a) > &= < R(a), R(a) > - < R(z), R(a) > \\
&= |R(a)|^2 - |R(z)|\,|R(a)| cos\theta \\
&\geq |R(a)|^2 - |R(z)|\,|R(a)| \geq 0,
\end{aligned}
$$

$\forall z \in D(a, \epsilon)$. Pero entonces por el Lema 3.1 (aplicado a $f(z) = R(z) - R(a)$) hemos llegado a una contradicción (ver (4)), la cual proviene de suponer que R es no constante.

Lema 3.3: Sea $p(z) = a_n z^n + ... + a_0$, con $a_n \neq 0$ y $n \geq 1$. Entonces $\lim_{z \to \infty} |p(z)| = \infty$, es decir $\forall N \in \mathbf{N}$ existe un $M \in \mathbf{N}$ tal que $|z| \geq M \Rightarrow |p(z)| \geq N$.

Demostración: Sea M_1 tal que

$$|z| \geq M_1 \Rightarrow |\frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}| \leq \frac{|a_n|}{2}.$$

Sea M_2 tal que

$$|z| \geq M_2 \Rightarrow |z|^n \frac{|a_n|}{2} \geq N.$$

Si $|z| \geq M_1$ y $|z| \geq M_2$, entonces

$$
\begin{aligned}
|p(z)| &= |z|^n\,|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}| \\
&\geq |z|^n(|a_n| - |\frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}|) \\
&\geq |z|^n \frac{|a_n|}{2} \geq N.
\end{aligned}
$$

Es decir que basta con tomar $M = max(M_1, M_2)$.

Ahora estamos en condiciones de probar el:

Teorema Fundamental del Algebra.
Si p(z) es un polinomio no constante, entonces p(z) tiene una raíz.

Demostración: Sea M tal que $|z| \geq M \Longrightarrow |p(z)| \geq |p(0)|$. Sea f la restricción de $|p(z)|$ a $\overline{D(0, M)}$. Ya que f es contínua, por Teorema 2.3, f alcanza su mínimo en un $z_m \in \overline{D(0, M)}$. Fácilmente puede notarse que $\forall z \in \mathbf{C}$,

$$|p(z)| \geq |p(z_m)|,$$

lo cual nos dice que $p(z_m) = 0$ ya que de lo contrario la función racional 1/p(z) tendría en z_m un punto de módulo máximo contradiciendo el Teorema del Módulo Máximo.

Agradecimientos

El contenido de este trabajo fue expuesto a manera de minicurso en diciembre de 1992 en la Universidad Nacional de Salta. Quiero agradecer la hospitalidad de la gente de dicha ciudad. También le agradezco al Dr. Roberto Miatello por varias útiles conversaciones sobre el tema.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.