GRAGEAS ACERCA DEL TEOREMA DE PITAGORAS

Patricio G. Herbst

Gragea Histórica

No hay dudas de que fue el mismo Pitágoras quien enunció el teorema que lleva su nombre y que probó el caso particular en que el triángulo rectángulo es isósceles.

La autoría de la demostración para el caso general permanece desconocida pues, como es sabido los miembros de la escuela pitagórica acostumbraban atribuir todos sus descubrimientos al Maestro.

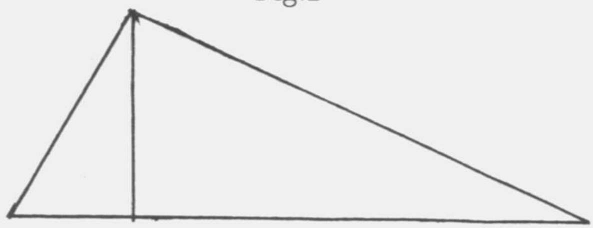
También es asunto de discusión cuál es la prueba pitagórica del teorema. Se sabe que la hermosa prueba sintética que da Euclides (Libro I. Proposición 47) fue reconocida como original por los comentaristas de la época. Esto sin embargo, deja aún un amplio margen de posibilidades. Los historiadores discurren entre dos de ellas:

- la prueba sintética por disección que usa de dos cuadrados (ver figura 1).

- la prueba por semejanza, que considera simultáneamente los tres triángulos semejantes determinados al trazar la altura respecto de la hipotenusa (ver figura 2).

Fig.1

Fig.2



Ambas podrían haber *funcionado* con los conocimientos de la época, sin que este funcionamiento fuera el que consideraríamos legítimo hoy en día.

A continuación presentamos dos generalizaciones del teorema de Pitágoras, donde sus demostraciones adscriben repectivamente a cada uno de los registros mencionados.

Gragea matemática: una generalización del teorema de Pitágoras debida a Pappus.

Teorema de Pappus

Sea (abc) un triángulo cualquiera y $(abmn)$ $(bcpq)$ paralelogramos cualesquiera.

Llamemos $R =$ recta mn

$S =$ recta pq

R y S se cortan en k.

Sea $T =$ recta bk y sean T_1, T_2 tq. $T_1 \parallel T \parallel T_2$ con $c \in T_2$, $a \in T_1$; consideremos el paralelogramo $(acxy)$ tal que $\overline{cx} \equiv \overline{bk}$, $x \in T_2$ $y \in T_1$.

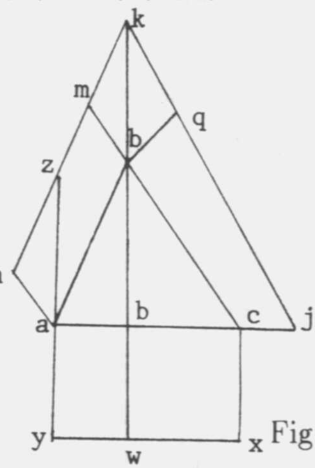


Fig. 3

Entonces: área $(acxy) =$ área $(abmn) +$ área $(bcpq)$.

Demostración: Sean v, w tq $\{v\} = T \cap \overline{ac}$, $\{w\} = T \cap \overline{xy}$ y sea z tq $\{z\} = T_1 \cap R$.
Observemos que $(abkz)$ es un paralelogramo tal que área $(abmn) =$ área $(abkz)$ (porque tienen la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas -R y la recta ab-).

Ahora observemos que área $(abkz) =$ área $(avwy)$ (porque $\overline{ay} \equiv \overline{za}$ y están contenidos entre las mismas paralelas - T y T_1 -). Entonces

$$\text{área } (abmn) = \text{ área } (avwy)$$

Similarmente se prueba que

$$\text{área } (bcpq) = \text{ área } (cvwx)$$

y la conclusión buscada sigue.

Gragea didáctica a propósito del Teorema de Pappus

Intuitivamente, una de las bondades del Teorema de Pappus es que su demostración además de elemental es fácil: ello es así porque *casi todo* lo que hay que considerar para la prueba ya está considerado en el enunciado. No puede decirse lo mismo de la mayoría de las pruebas sintéticas del Teorema de Pitágoras donde encontrar la figura conveniente y disecarla es lo más creativo de la prueba (y por ello bastante difícil de modelizar su construcción). Por otra parte el mismo enunciado del Teorema de Pitágoras aparece artificial.

El Teorema de Pappus puede servir para darle un origen *natural* al enunciado del Teorema de Pitágoras: una vez enunciado y probado el Teorema de Pappus, pueden imponerse codiciones sobre los paralelogramos de teorema, preguntando cosas como *si* $(abmn)$ *y* $(bcpq)$ *son rectángulos, será* $(acxy)$ *rectángulo ?* hasta fijar condiciones sobre (abc) para que *si* $(abmn)$ *y* $(bcpq)$ *son cuadrados,* $(acxy)$ *resulte cuadrado.* (Lector : piense en eso). Ese trabajo con el Teorema de Pappus origina el enunciado del Teorema de Pitágoras y la demostración de Pappus le es pertinente.

Gragea matemática: una generalización del Teorema de Pitágoras debida a Thabit-Ibn-Al Qurra

Teorema de Thabit-Ibn-Al Qurra

Sea (abc) un triángulo arbitrario y sean R, S rectas por a tales que

$R \cap bc = \{x\}$

$S \cap bc = \{y\}$

con $(< axc) \equiv (< bac)$

y $(< ayb) \equiv (< bac)$.

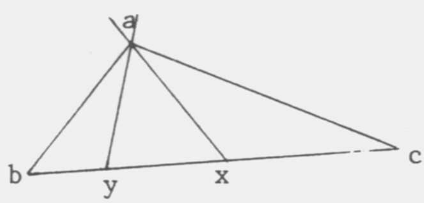


Fig.4

Entonces $||\overline{ab}||^2 + ||\overline{ac}||^2 = ||\overline{bc}||\,(||by|| + ||xc||)$.

Demostración:

$$(abc) \overset{(1)}{\simeq} (yba) \overset{(2)}{\simeq} (xac)$$

(1) pues $< bac \equiv < bya$ y $< abc = < aby$.

(2) pues $< bac \equiv < axc$ y $< acb = < acx$.

Entonces de la semejanza (1) se tiene en particular

$$\frac{||\overline{ab}||}{||\overline{bc}||} = \frac{||\overline{by}||}{||\overline{ab}||}$$

y de la (2)

$$\frac{||\overline{ac}||}{||\overline{bc}||} = \frac{||\overline{cx}||}{||\overline{ac}||}$$

y la conclusión buscada sigue.

Bibliografía:

Boyer, Carl "History of Mathematics" Ed. John Wiley & Sons.

Euclides, "Elementos" (Versión anotada de Sir Thomas Heath), Ed. Dover.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.

Universidad Nacional de Córdoba.