Problemas varios

1) Pruebe que dado cualquier conjunto de seis números naturales con la propiedad de que en cualquier subconjunto de tres números existen dos que son coprimos, entonces existe un subconjunto de tres elementos coprimos dos a dos.

2) Construir un sólido de volumen finito y área lateral infinita.

3) Se escoge un número al azar de entre todos los números de cinco cifras tales que la suma de sus cifras sea 43. ¿ Cuál es la probabilidad de que el número sea divisible por 11?

4) Si n es un número natural, definamos $i(n)$ el número de veces que se puede escribir n como suma de números impares. Por ejemplo, como $4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ entonces $i(4) = 2$.

Definamos además $d(n)$ como el número de veces que se puede escribir n como suma de números distintos. Por ejemplo, como $4 = 3 + 1 = 2 + 2$, entonces $d(4) = 2$. Probar que, en general, $d(n) = i(n)$.

5) Una compañía está tratando de venderle a la AFA un nuevo test para detectar el uso de drogas en los partidos de fútbol. La compañía dice que el test siempre dará positivo cuando el jugador haya usado drogas.

"Pero eso no es suficiente" dice el presidente de la AFA.

"Sí! además, la probabilidad de que un jugador que no haya usado drogas arroje un test positivo es de sólo un 1% "

¿Es el test confiable?

(Respuesta: NO necesariamente. ¿Por qué?).

Pretorneo de las ciudades

Los siguientes problemas formaron parte del Pretorneo de las ciudades, realizado en abril de 1993.

Problema 1 (nivel juvenil).

101 jugadores de ajedrez participaron en varios torneos y se observó que:

a) En ningún torneo participaron todos los jugadores.

b) Cada par de jugadores se encontraron exactamente en un torneo.

Probar que hay un jugador que participó en por lo menos 11 torneos.

Aclaración. En un torneo de ajedrez los participantes juegan todos contra todos.

Solución.

Sea n el máximo número de participantes que hubo en un sólo torneo y sea T un torneo de n participantes. ($n < 101$)

Si $n \neq 11$: considero un jugador A que no participó en T. A debe encontrarse con cada uno de los participantes de 1 en torneos diferentes, pues dos jugadores que estuvieron en T no pueden coincidir en otro torneo. Por lo tanto, A debe participar en al menos 11 torneos.

Si $n \leq 10$: Un jugador encuentra a lo sumo a otros 2 en cada torneo y por lo tanto necesita de por lo menos 12 torneos para encontrarse con los 100.

En ambos casos, hay un jugador que estuvo en al menos 11 torneos.

Problema 1 (nivel mayor).

Probar que existe una sucesión de 100 enteros $a_n (1 \leq n \leq 100)$, todos diferentes, tales que $a_n^2 + a_{n+1}^2$ es un cuadrado perfecto para $1 \leq n \leq 99$.

Solución.

Consideramos: $a_0 = 2.3$, $a_1 = 2^3$, $a_2 = 3.5$, $a_3 = 2^2.3^2$, $a_{04k+r} = 2^{3k}.a_r$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

Verificación:

$a_0^2 + a_1^2 = 100$; $a_1^2 + a_2^2 = 289 = 12^2$; $a_2^2 + a_3^2 = 1521 = 39^2$.

$a_{4k+r}^2 + a_{4k+r+1}^2 = 2^{2.3.k}.a_r^2 + 2^{2.3.k}.a_{r+1}^2 = 2^{2.3.k}.(a_r^2 + a_{r+1}^2)$

$a_{4k+3}^2 + a_{4(k+1)}^2 = 2^{2.3.k}.a_3^2 + 2^{2.3.(k+1)}.a_0^2 = 2^{2.3.k}.2^4.3^{4+2^2.3.k+2.3}.2^2.3^2 =$

$= 2^{2.3.k}.(2^4.3^4 + 2^6.2^2.3^2) = N^2(3^2 + 2^4) = N^2.25.$

Libros

La Geometría en la formación de profesores—Dr. Luis A. Santaló— Entre los temas tratados podemos mencionar: Transformaciones geométricas en el plano, geometría del compás y construcciones, geometría computacional, máximos y mínimos geométricos, geometrías no euclideanas. Valor: \$ 20.

Problemas 1—Patricia Fauring y Flora Gutiérrez Giusti— Es una recopilación de los problemas que la O.M.A. propuso durante los años 1987, 1988 y 1989 para el entrenamiento de los participantes, todos ellos con sus respectivas soluciones. Valor: \$ 5.

Problemas 2—Erica Hinrichsen, Noemí Buschiazzo, Susana Filipputti y Susana S. de Hinrichsen— Es una recopilación de los problemas que la O.M.A. propuso durante los años 1990 y 1991 para el entrenamiento de los participantes con sus soluciones. Valor: \$ 25.

Todos estos libros pueden adquirirse en las respectivas secretarías regionales de la O.M.A.