

Propiedades de refracción de cónicas

M. Avio, R. Azpiroz, E. Güichal, M.F. Lusente

Resumen. Dados una recta Δ , un punto F que no pertenezca a Δ y un número real ϵ ($0 < \epsilon < 1$), se define una elipse como el lugar geométrico de todos los puntos P del plano determinado por Δ y F , tales que el cociente entre las distancias de P a F y de P a Δ es constante, igual a ϵ . Si se traza la recta γ , tangente a la elipse en el punto P (que no sea uno de sus vértices), las rectas γ y γ se cortan en un punto N tal que los segmentos PF y NF son perpendiculares. Esta sencilla propiedad permite interpretar a la constante ϵ en términos de propiedades de refracción de la elipse. Se compara esta demostración con la dada por R. Descartes en el Discurso VIII de "La Dióptrica" y se comentan algunas experiencias que permiten visualizar esta propiedad. Resultados similares pueden ser demostrados para las hipérbolas.

1. Notación.

A, B, \dots, P, Q, \dots denotarán puntos del plano.

$\Delta, \gamma, \Sigma, \dots$ servirán para designar rectas en ese plano.

\overline{AB} denotará el segmento de recta con extremos en los puntos A y B .

$|AB|$ indicará la longitud del segmento $|AB|$.

$\angle PFR$ denotará el ángulo, con vértice en F , determinado por las dos semirectas con origen en F y que contienen a los puntos P y R , respectivamente.

$\theta, \alpha, \beta, \varphi, \dots$, denotarán números reales, correspondientes a las medidas, en el sistema natural, de algunos de los ángulos que aparecerán.

Como es habitual, identificaremos el ángulo con su medida y si, por ejemplo, θ es la medida del ángulo $\angle PFM$, notaremos $\angle PFM = \theta$. También escribiremos expresiones del tipo: $\sin \angle PFM = \sin \theta$, haciendo abuso de la notación, ya que en el primer miembro el símbolo "sen" denota una función que asocia un número real a un ángulo, mientras que en el segundo miembro, indica la notación habitual para la función trigonométrica de variable real: $y = \sin x$.

2. Una propiedad de la elipse.

Definiremos una elipse como el lugar geométrico de todos los puntos P del plano determinado por una recta Δ y un punto F que no pertenezca a ella, tales que el cociente entre las distancias de P a F y de P a Δ es constante, igual a ϵ , donde ϵ es un número real ($0 < \epsilon < 1$) denominado "excentricidad" de la elipse. El punto F será un "foco" de la elipse y la recta Δ será llamada la "directriz" correspondiente al foco F . Los dos puntos de la elipse que se encuentran respectivamente, más próximo o más alejado de la directriz, son llamados sus "vértices".

La propiedad que queremos probar está enunciada en la siguiente

Proposición. Si se traza la recta γ , tangente a la elipse en el punto P (que no sea uno de sus vértices), las rectas γ y Δ se cortan en un punto N tal que los segmentos \overline{PF} y \overline{NF} son perpendiculares.

El resultado mencionado es ya conocido y puede ser probado introduciendo algún sistema apropiado de coordenadas. La demostración que daremos está basada en la verificación directa de que el triángulo con vértices en P , N y F (ver Fig. 1) es un triángulo rectángulo (con su ángulo recto en F). Esto será consecuencia del teorema recíproco del de

Pitágoras (Proposición 48, Libro 1 de “Los Elementos”, de Euclides) ya que mostraremos que vale la siguiente relación:

$$(1) \quad |PF|^2 + |FN|^2 = |PN|^2$$

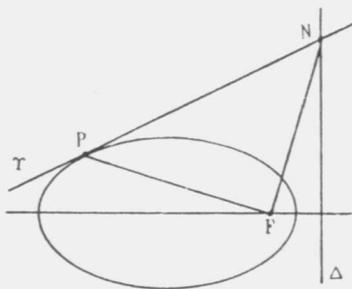


Figura 1

Observación. Aunque no queremos introducir en forma sistemática un sistema de coordenadas, se podrá observar que los cálculos que realizaremos para determinar las longitudes de los segmentos mencionados, están relacionados con un sistema de coordenadas polares, con el punto F como origen y con la recta perpendicular a Δ y que pasa por F , como eje polar.

Utilizaremos dos parámetros para definir exactamente a la elipse: uno de ellos será el número ϵ ya definido como su excentricidad y el otro será el número l , que nos da la mitad de la longitud del segmento o cuerda (denominado "lado recto" de la elipse), que pasa por F y es paralelo a la directriz. En la Fig. 2 se tiene que $l = |FR|$. Como R es un punto de la elipse y la distancia de R a Δ es igual a $|FM|$, donde M es el punto de intersección de Δ con la recta perpendicular a ella, que pasa por F , se tiene que

(2)

$$|FM| = \frac{l}{\epsilon}$$

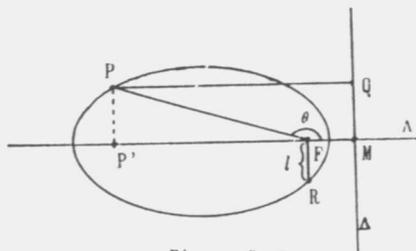


Figura 2

Dado un punto P de la elipse, designaremos con θ a la medida del ángulo $\angle PFM$; Λ a la recta perpendicular a Δ , que pasa por F ; Q al punto de Δ tal que $|PQ|$ da la distancia de P a Δ y P' al punto de Λ tal que $|PP'|$ es perpendicular a Λ . (Ver Fig. 2).

Por ser P un punto de la elipse, se tiene que $|PF| = \epsilon |PQ|$.

Si consideramos un punto P tal que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, se tendrá que:

$$\frac{|P'F|}{|PF|} = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

Es decir que: $|P'F| = -|PF| \cos \theta$.

Pero, por otra parte:

$$|P'F| = |P'M| - |FM| = |PQ| - |FM| = \frac{1}{\epsilon} |PF| - \frac{l}{\epsilon}$$

En consecuencia, se tiene que:

$$\frac{1}{\epsilon} |PF| - \frac{l}{\epsilon} = -|PF| \cos \theta$$

de donde se deduce :

(3)

$$|PF| = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

Ejercicio. Verificar que si $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, también se tiene que

$$|PF| = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

A continuación, encontraremos una relación que nos defina la medida α del ángulo que forma la recta Σ que pasa por dos puntos P_1 y P_2 de la elipse, con la recta Λ , suponiendo que los puntos han sido elegidos de modo tal que Σ no sea paralela a Λ . (Ver Fig. 3). Sea A el punto de intersección de Σ con una perpendicular a Σ que pasa por F y sea $\beta = \angle AFM$.

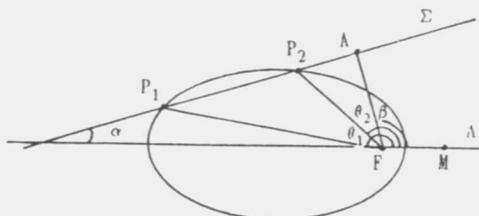


Figura 3

Se tiene entonces que:

$$|P_1F| \cos(\theta_1 - \beta) = |FA|$$

y que

$$|P_2F| \cos(\theta_2 - \beta) = |FA|.$$

en consecuencia:

$$|P_1F| \cos(\theta_1 - \beta) = |P_2F| \cos(\theta_2 - \beta).$$

Si usamos la relación (3) para P_1 y para P_2 , obtendremos que:

$$\frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta_1} \cos(\theta_1 - \beta) = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta_2} \cos(\theta_2 - \beta),$$

que puede escribirse como sigue:

$$(4) \quad \cos(\theta_1 - \beta) - \cos(\theta_2 - \beta) = \epsilon \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{sen} \beta.$$

Usando las fórmulas trigonométricas:

$$\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \operatorname{sen} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

$$\text{y} \quad \operatorname{sen} \varphi = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

la expresión (4) puede escribirse:

$$2 \operatorname{sen} \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \epsilon 2 \operatorname{sen} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \operatorname{sen} \beta$$

que, cuando $\theta_1 \neq \theta_2$, es equivalente a:

$$(5) \quad \boxed{\operatorname{sen} \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\beta}{2} = \epsilon \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \operatorname{sen} \beta}$$

Pero esta expresión tiene aún sentido cuando $\theta_1 = \theta_2$ y nos servirá para obtener la relación buscada, cuando la recta secante Σ se transforme en la recta γ , tangente a la elipse en el punto P.

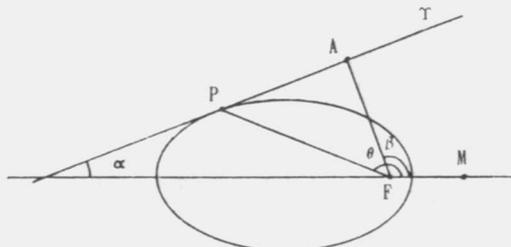


Figura 4

Si hacemos entonces $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ en (5), obtenemos (ver Fig. 4):

$$\text{sen}(\theta - \beta) = \epsilon \text{sen}\beta$$

que puede escribirse como sigue:

$$\text{sen}\theta \cos\beta - \cos\theta \text{sen}\beta = \epsilon \text{sen}\beta$$

o bien:

$$\text{sen}\theta \cos\beta = (\epsilon + \cos\theta) \text{sen}\beta,$$

de donde se deduce que:

$$\boxed{\text{tg}\beta = \frac{\text{sen}\theta}{\epsilon + \cos\theta}}$$

y como $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, resulta que:

(6)

$$\boxed{\text{tg}\alpha = -\frac{\epsilon + \cos\theta}{\text{sen}\theta}}$$

Esta fórmula nos permitirá calcular los elementos que nos faltan para probar la relación (1). En efecto, observando la figura siguiente, se puede verificar que:

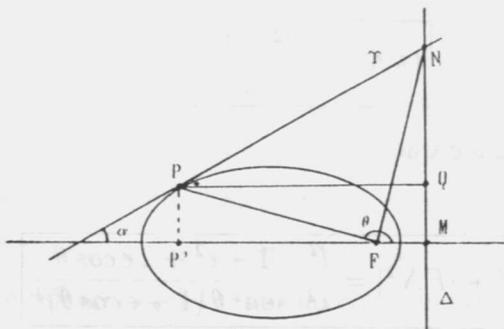


Figura 5

$$\begin{aligned}
|NM| &= |NQ| + |QM| = \\
&= |PQ|tg\alpha + |PP'| = \\
&= \frac{1}{\epsilon}|PF|tg\alpha + |PF|sen\theta = \\
&= |PF|(sen\theta + \frac{1}{\epsilon}tg\alpha) = \\
&= |PF|(sen\theta - \frac{\epsilon + \cos\theta}{\epsilon sen\theta}) = \\
&= -|PF|\frac{\epsilon\cos^2\theta + \cos\theta}{\epsilon sen\theta}
\end{aligned}$$

Luego: $|NM| = -\frac{l}{\epsilon} \frac{\cos\theta}{sen\theta}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo con vértices en F, M y N, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
|FN|^2 &= |FM|^2 + |NM|^2 = \\
&= \frac{l^2}{\epsilon^2} + \frac{l^2 \cos^2\theta}{\epsilon^2 sen^2\theta} = \\
&= \frac{l^2}{\epsilon^2} \frac{1}{sen^2\theta}
\end{aligned}$$

Esto es:

$$(7) \quad \boxed{|FN|^2 = \frac{l^2}{\epsilon^2} \frac{1}{sen^2\theta}}$$

De (3) y (7) se deduce que:

$$(8) \quad \boxed{|PF|^2 + |FN|^2 = \frac{l^2}{\epsilon^2} \frac{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos\theta}{sen^2\theta (1 + \epsilon \cos\theta)^2}}$$

Por último, de la figura 5, se desprende que:

$$|PN| = \frac{|PQ|}{\cos \alpha} = \frac{|PF|}{\epsilon \cos \alpha} = \frac{l}{\epsilon} \frac{1}{\cos \alpha (1 + \epsilon \cos \theta)}$$

es decir que:

$$\begin{aligned} |PN|^2 &= \frac{l^2}{\epsilon^2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} = \\ &= \frac{l^2}{\epsilon^2} \left(1 + \frac{(\epsilon + \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta}\right) \frac{1}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que:

$$(9) \quad \boxed{|PN|^2 = \frac{l^2}{\epsilon^2} \frac{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^2}}$$

Comparando (8) y (9), concluimos que

$$\boxed{|PF|^2 + |FN|^2 = |PN|^2}$$

Como queríamos demostrar.

3. Una consecuencia de esa propiedad.

Como una consecuencia inmediata de la propiedad demostrada en la sección anterior, veremos un resultado que puede ser interpretado en términos de refracción de un rayo de luz que pasara de un medio homogéneo a otro, de distinta densidad. Imaginemos un rayo luminoso que se propaga en el aire y penetra en un cuerpo cuya sección tiene forma de elipse. Si el rayo seguía en el aire una dirección paralela al eje mayor de dicha elipse, al penetrar en el cuerpo cambiará la dirección de su recorrido y si el índice de refracción del material con que está construido ese cuerpo coincide con el recíproco de la excentricidad de la elipse, la desviación del

rayo será tal que pasará por el foco de la misma. En efecto, veamos para ello la figura 6.

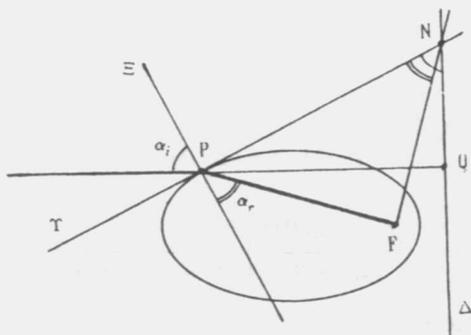


Figura 6

Por ser P un punto de la elipse, se tiene que $|PQ| = \frac{1}{\epsilon}|PF|$ y en consecuencia:

$$\frac{|PQ|}{|PF|} = \frac{1}{\epsilon}$$

Si dividimos numerador y denominador del primer miembro por el número que nos da la longitud del segmento \overline{PN} , obtenemos:

$$(10) \quad \frac{|PQ|}{|PN|} : \frac{|PF|}{|PN|} = \frac{1}{\epsilon}$$

Y observando que tanto el triángulo con vértices en los puntos P, F y N , como el triángulo con vértices en P, Q y N , son triángulos rectángulos, podemos escribir el cociente anterior en la forma:

$$(11) \quad \frac{\text{sen } \angle PNQ}{\text{sen } \angle PNF} = \frac{1}{\epsilon}$$

Si Ξ denota la recta perpendicular a γ en el punto P , es fácil comprobar que

$$\angle PNQ = \alpha_i; \angle PNF = \alpha_r$$

con lo cual la expresión (11) puede ser escrita en la forma:

$$(12) \quad \boxed{\frac{\text{sen } \alpha_i}{\text{sen } \alpha_r} = k, \text{ donde } k = \frac{1}{\epsilon}}$$

Pero esta fórmula expresa la ley de refracción de Snell, esto es: el cociente entre los valores de los senos de los ángulos de incidencia y de refracción que forma un rayo de luz con la recta normal a la elipse en el punto P, es constante.

Este resultado geométrico fue probado por R. Descartes en el Discurso VIII de "La Dióptrica", uno de los tres ensayos que aparecen a continuación de su "Discurso del método", publicado en 1637, aunque no llega a obtener la ley correcta para la propiedad de refracción de la luz, pues estaba convencido de que la velocidad de la luz se incrementaba cuando pasaba de un medio a otro de mayor densidad. Para demostrar esa propiedad de la elipse, Descartes utiliza una construcción geométrica basándose en otras propiedades de esa curva: a) que es posible encontrar otro punto F' (el otro foco) tal que la suma de las distancias de P a F y a F' es constante para cualquier punto P de la elipse y b) que los radios focales, es decir, los segmentos \overline{PF} y $\overline{PF'}$, forman ángulos iguales con la recta γ , tangente a la elipse en P y en consecuencia, la recta normal Ξ es bisectriz del ángulo $\angle FPF'$.

Por el punto P (ver Fig. 7) se trazan las rectas tangente y normal a la elipse y un segmento \overline{PA} paralelo al diámetro mayor \overline{DK} y de igual

longitud que \overline{PF} y desde A y F , dos perpendiculares a la recta normal Ξ , que determinan los puntos L y G .

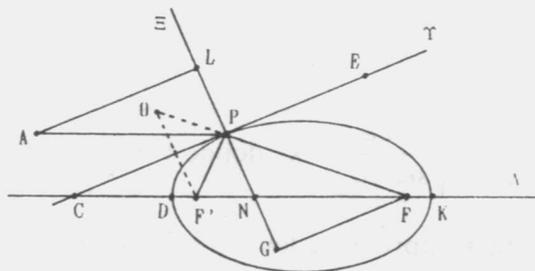


Figura 7

Si observamos que los triángulos ΔALP y ΔFGN son semejantes y tenemos en cuenta que $|AP| = |PF|$, resulta que:

$$(13) \quad \frac{|AL|}{|GF|} = \frac{|AP|}{|NF|} = \frac{|AP|}{|NF|}$$

Por el punto F' , que denota el otro foco de la elipse, trazamos una paralela a \overline{PN} hasta intersectar la prolongación de \overline{PF} , en el punto O . Los triángulos ΔPNF y $\Delta OF'F$ son semejantes, de modo que se tiene que:

$$(14) \quad \frac{|PF|}{|NF|} = \frac{|OF|}{|F'F|} = \frac{|OP| + |PF|}{|F'F|} = \frac{|PF'| + |PF|}{|F'F|} = \frac{|DK|}{|F'F|}$$

Las dos últimas igualdades son consecuencias de las propiedades a) y b) citadas antes. Si denotamos con k a la constante definida por el último cociente que aparece en (14), se tiene que $k > 1$ y de (13) y (14) se deduce que:

$$\frac{|AL|}{|GF|} = k.$$

Si dividimos el numerador y el denominador del primer miembro por $|AP|$, que es igual a $|PF|$, por construcción, obtenemos que:

$$\frac{|AL|}{|AP|} : \frac{|GF|}{|PF|} = k.$$

que puede ser expresado en la forma: $\frac{\text{sen } \angle APL}{\text{sen } \angle GPF} = k$, que coincide con (12).

Un resultado análogo, válido para cada una de las ramas de una hipérbola (y cuya demostración queda a cargo del lector), puede ser enunciado de la siguiente forma:

Definición. Una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano determinado por una recta Δ y un punto F que no pertenezca a ella, tales que el cociente entre las distancias de P a F y de P a Δ es constante, igual a ϵ donde ϵ es un número real ($\epsilon > 1$).

Proposición. Si se traza la recta Υ , tangente a a la hipérbola en el punto P (que no sea uno de sus vértices), las rectas Υ y Δ se cortan en un punto N tal que los segmentos \overline{PF} y \overline{NF} son perpendiculares.

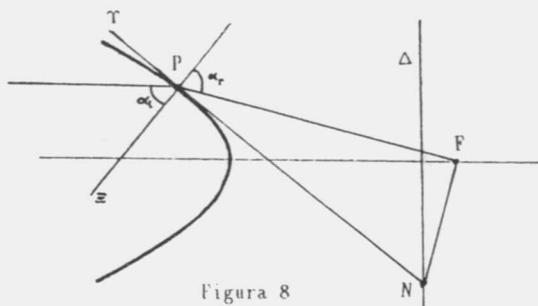


Figura 8

4. Comprobación práctica.

Como un medio de comprobar prácticamente la propiedad mencionada,

buscamos construir una elipse que permitiera verificarla en forma visual. Luego de analizar varios materiales posibles (vidrio, acrílico, etc.) que nos presentaban grandes dificultades para su cortado y pulido, decidimos la utilización de un material epoxi, ARALDIT β , que era empleado en estudios realizados en el Laboratorio Experimental de Tensiones, del Departamento de Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur.

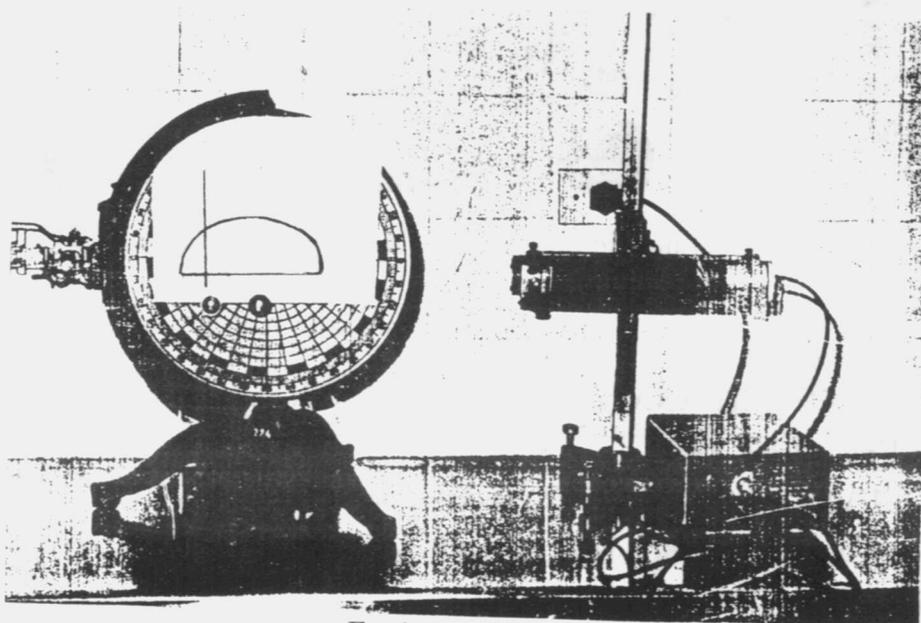
Se cortó en primer lugar una semicircunferencia de dicho material, que fue utilizada para determinar su índice de refracción con respecto al aire, obteniéndose el valor $k = 1,591 \pm 0,003$ para un haz de luz emitido por un Laser He-Ne de un diámetro de 0,59 mm y una longitud de onda $\lambda = 632,8mm$. Con ese dato se construyó luego la mitad de una elipse de excentricidad $\epsilon = 1/k$ y utilizando el mismo haz se tomaron varias fotografías que permitían verificar la propiedad estudiada.

La primera de las reproducciones que ilustran este trabajo muestra el equipo utilizado: Un disco de Haut sobre el que ha sido fijada la media elipse, en la que se ha señalado una recta que marca la dirección de su semieje mayor y otra recta perpendicular a ésta, que la interseca en el foco. A la derecha se observa el emisor del Laser, sostenido sobre un soporte que permite su desplazamiento, de modo tal que la emisión del haz de luz sea paralelo al semieje mayor de la elipse.

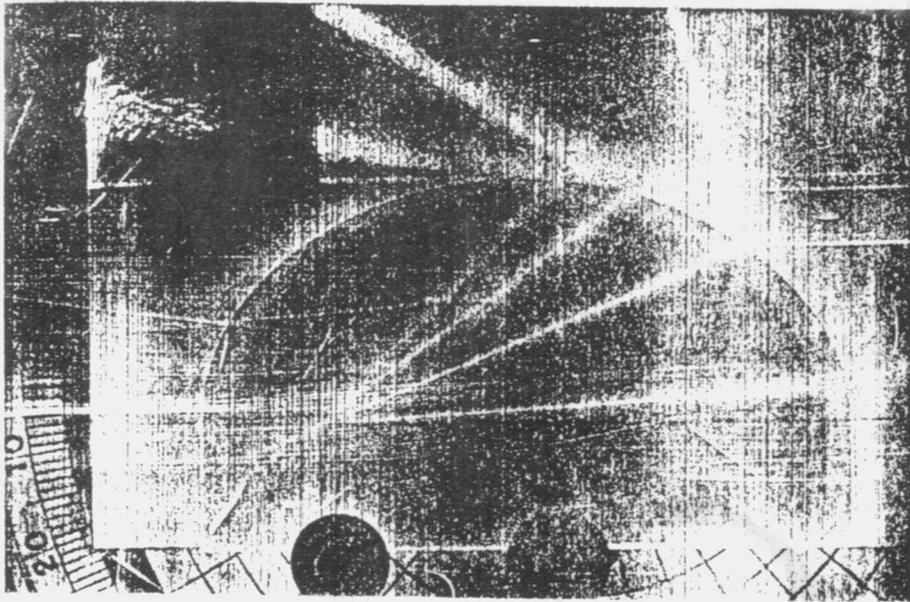
La segunda fotografía, con exposiciones múltiples, tomada con una cámara reflex con tiempos de exposición de 10-30 seg., muestra cómo se desvía parte del haz al penetrar en el otro medio, pasando siempre por el foco de la elipse. Se puede observar también que parte del haz se refleja, formando , en cada caso, un ángulo de reflexión igual al de incidencia.

5. Agradecimientos.

Queremos expresar nuestro profundo reconocimiento a la colaboración que nos prestara el Sr. F. Hoya, del Laboratorio de Análisis Experimental de Tensiones, del área de Estabilidad del Departamento de Ingeniería y su Director, Ing. J.C. Paloto, en la construcción de la elipse y el Ing. Dante Patrignani, docente a cargo del Laboratorio de Óptica del Departamento de Física, en el estudio de las propiedades ópticas del material utilizado y de las excelentes fotografías obtenidas. Sin sus ayudas hubiera sido imposible completar el trabajo descrito en la sección anterior.



Equipo utilizado.



Refracción del haz de luz, para cuatro posiciones de emisión.

Bibliografía

1. ELEMENTARY ANALYTICAL CONICS. J.H. Shackleton Bailey. Oxford Univ. Press, 1950.
2. OEUVRES de DESCARTES, publiées par Charles Adam & Paul Tannery. Vol. VI Discours de la méthode & Essais. Paris 1973. Librairie Philosophique J. Vrin

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur.
Bahía Blanca.