Computación y Matemática 1

Juan Carlos Dalmasso

La computadora ha cambiado y cambiará muchas cosas en nuestra sociedad. Constantemente hardware y software son más potentes y más accesibles monetariamente. Pero, ¿cómo es y cómo será su influencia en la enseñanza de las matemáticas?

Históricamente las computadoras, como su nombre en nuestro país lo indica, hicieron sentir su influencia en las matemáticas como herramientas de cálculo numérico. En esta primera etapa, los algoritmos utilizados y los lenguajes de programación que se usaban eran lo suficientemente complicados como para que sólo especialistas pudieran entenderlos. De este modo, la computadora se utilizaba sólo en la enseñanza universitaria en cursos destinados a futuros especialistas.

Luego, en la medida que las facilidades gráficas se hicieron más poderosas y accesibles al público común, los gráficos ayudaron a interpretar cualitativamente cantidades masivas de datos ("un dibujo vale más que mil palabras") lo que es importante tanto en ciencia como en el manejo empresarial. Pero también estas facilidades permitieron la aparición del Logo, lenguaje desarrollado fundamentalmente por S. Papert teniendo en mente a la educación de los niños en la escuela primaria con la geometría de la tortuga. Si bien el Logo ha perdido algo de su ímpetu original, hoy se lo usa cotidianamente y aún siguen apareciendo nuevos artículos sobre él. Aunque en medida mínima, también se lo usa en cuestiones de "inteligencia artificial" a nivel profesional.

En España se denominan "ordenadores", nombre que aparte de la diferencia en género apunta a las posibilidades en informática

Casi simultáneamente con la aparición del lenguaje Logo, N. Wirth hacía la presentación de su lenguaje Pascal, desarrollado como herramienta en la enseñanza de la programación para sus alumnos universitarios. Sin embargo, el lenguaje Pascal tuvo una enorme difusión, excediendo su uso como lenguaje profesional de programación al de lenguaje educacional. El énfasis del Pascal era completamente diferente al del Logo, haciendo mayor hincapié en la parte de programación estructurada y algoritmos numéricos y seminuméricos. Con la aparición de las computadoras personales en las escuelas primarias y secundarias, unos 10 años atrás, estos dos lenguajes (Logo y Pascal) fueron adoptados en la enseñanza primaria y secundaria.

El Massachusetts Institute of Technology - MIT- fue un factor importante en el desarrollo de muchas herramientas computacionales, entre ellas el Logo (íntimamente relacionado con "inteligencia artificial") y el sistema de los Macsyma de cálculo matemático simbólico. El Macsyma fue de alguna forma el padre de los muchos sistemas disponibles hoy en las computadoras personales que integran las posibilidades de cálculo numérico, cálculo simbólico y gráficas en dos y tres dimensiones como Derive, Mathemática, Maple, Reduce, entre otros (además del Macsyma). Estos paquetes de software, casi específicamente destinados a matemática, a su vez han causado una revolución en la enseñanza, muy comparable a la revolución causada por las calculadoras portátiles. Más aún, algunos de estos paquetes pueden incorporarse como módulos a calculadoras con posibilidades gráficas. En países como Estados Unidos, donde hay una gran disponibilidad de computadoras personales, desde hace años se está trabajando en la enseñanza de matemática con la ayuda de estos paquetes. Pero aún, no se ha asentado el polvo. constantemente aparecen artículos señalando las ventajas y desventajas del uso de estos sistemas en el aprendizaje.

Es que es muy fácil dejarse llevar y dar mayor preponderancia al medio antes que al fin. Esto no debe sorprendernos y podemos concentrarnos en un ejemplo sencillo: en algunas escuelas aún se enseña el agoritmo para la extracción de la raíz cuadrada, cuando casi cualquier calculadora puede realizar esta operación casi instantáneamente. Entonces tenemos que preguntarnos: ¿cuál es la importancia del algoritmo de extracción de la raíz cuadrada? Podemos decir que es instructivo si es que en su enseñanza destacamos cómo se combinan la estructura de posición decimal y la expansión del cuadrado del binomio para obtener el agoritmo; ciertamente es inútil si sólo queremos recordar una técnica para obtener un resultado (la calculadora es mucho más eficiente). Observamos que, por otra parte, la calculadora difícilmente use ese algoritmo para extraer la raíz cuadrada. Creo que tradicionalmente el algoritmo de la raíz se ha enseñado dando mayor importancia al medio (el algoritmo) que al fin (para qué queremos el resultado). Pero ¿es esto un error?. ¿Vale más la pena estudiar los algoritmos que usan las calculadoras y computadoras para extraer raíces cuadradas? ¿O es mejor dejar que sencillamente las calculadoras y computadoras hagan su trabajo y enseñar otros temas?

Podemos hacernos preguntas similares en todo tipo de técnicas usadas en matemáticas: desde las sencillas como el algoritmo de la suma o producto hasta técnicas de derivación o integración en matemáticas más avanzadas. ¿Debemos eliminar el uso de las calculadoras y, en corto tiempo, las computadoras? Atención: ¿qué proporción de almaceneros hacen sus cuentas con lápiz y papel y qué proporción usa calculadoras o máquinas registradoras?

De aquí a preguntarnos para qué sirven las matemáticas, y en particular para qué las enseñamos, estamos a un paso. Y eso es muy saludable pues habíamos caído en dos trampas: la enseñanza de técnicas repetitivas y el excesivo formalismo, en detrimento del estudio de las propiedades básicas, y más profundamente, de la creatividad y la solución de problemas concretos de la realidad que nos rodea.

Cuando se piense en nuesvos planes de estudio, necesariamente habrá que hacer una reflexión profunda sobre estos temas. Deberá tenerse en cuenta que las nuevas tecnologías que van apareciendo hacen y harán rápidamente obsoletas muchas propuestas. Los programas de estudio tendrán que ser flexibles, permitiendo adaptaciones rápidas a esta realidad ya que, al menos parcialmente, sus contenidos necesariamente tendrán que ir cambiando en ciclos de pocos años (posiblemente 4 ó 5). Por cierto, los docentes de todos los niveles tendremos que mantenernos actualizados constantemente para que estos cambios puedan llevarse al aula. Es un desafío que entusiasma.

EJERCICIOS

1) Tomando como modelo el algoritmo de la división, que da un cociente y un resto, ver cómo funciona el algoritmo para la extracción de la raíz cuadrada e interpretar el "resto" que se va obteniendo en cada paso.

2) Otro método "clásico" para extraer la raíz cuadrada es el de Newton, que es un caso de aplicación particular de un método general que usa derivadas. Recordemos brevemente que este método iterativo obtiene aproximaciones sucesivas de $B = \sqrt{A}$, donde $A > 0$, de la siguiente forma:

Dado $X > 0$ "aproximación" de B, se toma como nuevo X la cantidad $y = (x + A/x)/2$.

i) Hacer experiencias con calculadoras para distintos valores de A y distintos valores iniciales de X. Por ejemplo, si A = 2 y X = 1, valores sucesivos de X obtenidos en una calculadora son:

$$1; 1,5; 1,416667; 1,414216; 1,414214$$

ii) Si se dispone de computadora o calculadora programable, hacer un programa que usando el método de Newton aproxime la raíz de un número dado con error especificado.

iii) Demostrar que

$$Y - B = (X - B)^2/(2X)$$

y por lo tanto es $y > B$ siempre, salvo que $X = B$ (en cuyo caso también es $Y = B$).

iv) A partir de iii) demostrar que después de la primera iteración los valores de X e Y satisfacen

$$B < Y < (B + X)/2 < X$$

(si X no es B).

v) De la misma forma, después de la primera iteracción los valores de X e Y satisfacen.

$$|Y - B| < (X - B)^2/(2B)$$

(si X no es B). Este resultado se conoce como "convergencia cuádrica", y nos dice que "de alguna forma" el error en una iteración es el cuadrado del error en la iteración previa. Así, si el error es del orden de 10^{-5}, "podemos esperar" que en la próxima iteración el error sea del orden de 10^{-10}.

vi) Hacer experiencias con calculadoras o computadoras para ir viendo el error cometido con la raíz dada por la calculadora o computadora. Por ejemplo, en la experiencia anterior donde $A = 2$ y $X = 1$, los sucesivos errores fueron:

$$0,4142135;\ 8,5786462\ 10^{-2};\ 2,4532080\ 10^{-3};\ 2,1457672\ 10^{-6}$$

Olimpíada Matemática Argentina
Santa Fe 1548 - 9no. P.
1060 - Buenos Aires.