Pretorneo de las Ciudades

Los siguientes problemas formaron parte del Pretorneo de Ciudades realizado en abril de 1995.

Nivel Juvenil

Problema 1.

En una fiesta hay varios chicos y varias chicas. ¿Es posible que cada uno de los chicos pueda bailar cada tema con una chica que es más linda o más inteligente que la del tema anterior y que además en cada tema haya un chico que baila con una chica que es más linda y también más inteligente que la del tema anterior? (Hay la misma cantidad de chicos que de chicas y todos bailan todos los temas).

Problema 2.

Se dan dos circunferencias no concéntricas en el plano, una en el interior de la otra. Construir un punto 0 interior a las dos circunferencias, tal que al trazar una semirrecta con origen en 0, si A y B son las intersecciones de la semirrecta con las circunferencias, la razón $\frac{0A}{0B}$ es siempre la misma, independientemente de la semirrecta trazada.

Problema 3.

Hallar 5 enteros positivos tales que el máximo común divisor de cada par de ellos sea igual a la diferencia entre los dos números.

Problema 4.

En la escuela de Camarones hay 20 alumnos. Cada par de ellos tiene una abuela en común. Demostrar que hay por lo menos 14 alumnos que tienen una abuela en común.

Nivel Mayor

Problema 1.

En una fiesta hay varios chicos y varias chicas. ¿Es posible que cada uno de los chicos pueda bailar cada tema con una chica que es más linda o más inteligente que la del tema anterior y que además en cada tema al menos el 80% de los chicos baila con una chica que es más linda y también más inteligente que la del tema anterior?
(Hay la misma cantidad de chicos que de chicas y todos bailan todos los temas).

Problema 2.

Demostrar que se pueden construir dos triángulos usando convenientemente las seis aristas de un tetraedro arbitrario.

Problema 3.

Sean a, b, c, d números reales tales que

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$$

Demostrar que entre cuatro números hay dos que suman cero.

Problema 4.

Se tiene una banda de 1×10, cuadraditos de 1×1. Se colocan en las casillas los números del 1 al 10 de la siguiente manera:
Primero se ubica el 1 en cualquier casilla, luego el 2 en una casilla vecina, luego el 3 en una casilla vacía que sea vecina de alguna de las dos ya ocupadas, y así siguiendo hasta ubicar el 10. ¿Cuántas permutaciones diferentes de 1,2,3, ..., 10 se pueden obtener de esta manera?