¿Cómo pintar un cubo?

Paulo Tirao [1]

El título nos puede llevar a formular muchas preguntas que involucren pintura y un cubo. ¿Cuánta pintura necesito para pintar un cubo? ¿Cuántos cubos distintos puedo pintar con tres colores, si deseo que todas las caras tengan el mismo color? ¿Cuántos colores necesito para pintar las caras de un cubo, de siete maneras distintas? ¿Cuántos cubos distintos puedo pintar con azul y blanco?

De las preguntas posibles hay muchas de respuesta muy sencilla y por lo tanto poco interesantes. Otras muy complicadas e imposibles de responder. Para lograr una buena pregunta a partir del título, comencemos por precisar la pregunta ¿cómo pintar un cubo? El cubo es un objeto geométrico y por lo tanto abstracto, sin menospreciar por ello a ciertos objetos de existencia concreta que identificamos como cubos. La ventaja de utilizar un cubo geométrico está en que podemos entonces aprovechar todo lo que sabemos de geometría del espacio. Aprovechamos la ocasión para decir que asumimos que el lector está familiarizado con las propiedades básicas de la geometría euclidea plana y del espacio, como también con las propiedades de las transformaciones rígidas tanto del plano como del espacio.

Para pintar nuestro cubo fijaremos el número de colores utilizables, al que llamaremos k (de kolor). Convendremos que una cara del cubo debe pintarse toda del mismo color. No permitiremos caras a rayas o con lunares. Nos interesa saber cuántos cubos *distintos* podemos pintar en estas condiciones. Debemos aclarar el sentido de la palabra *distintos*. Si a un cubo le pintamos la cara de arriba azul y el resto rojo y a otro le pintamos la cara de abajo azul y el resto rojo, podemos concluir que los hemos pintado de igual manera, pues moviendo uno de ellos de tal forma de llevar la cara de abajo hacia arriba, obtenemos el mismo *motivo*. Esta observación nos conduce a las siguientes definiciones.

Definición: Llamaremos coloración del cubo a una asignación de color a cada cara. Diremos que dos coloraciones son equivalentes si existe una rotación del cubo en el espacio que haga coincidir ambas coloraciones.

[1] Becario CONICOR

Notemos que la relación recién definida para las coloraciones es relación de equivalencia. Dejamos al lector la verificación.

Definición: Llamaremos *motivo* a cada clase de equivalencia de coloraciones.

Con esta definición dos coloraciones correspondientes a motivos distintos son esencialmente distintas; la diferencia no depende de la posición del observador. Como el cubo tiene seis caras y utilizaremos k colores, tenemos k^6 coloraciones posibles. Para contar cuantos motivos, con k colores, podemos obtener en un cubo introducimos una importante herramienta de la matemática: *la teoría de grupos.*

Recordemos algunas propiedades básicas de las transformaciones rígidas del plano y del espacio:

i) cada transformación rígida es una biyección del plano (espacio) en si mismo;
ii) si T es una transformación rígida, su inversa (como función) T^{-1} es también rígida;
iii) la transformación identidad, que denotamos I, es una tranformación rígida;
iv) si T y S son dos transformaciones rígidas, la composición $T \circ S$ es otra transformación rígida.

Observación: la propiedad iii) se deduce de ii) y iv), pues dada T consideramos T^{-1} y por iv) $T \circ T^{-1}$ es una transformación rígida, pero como $T \circ T^{-1} = I$ resulta iii).

Llamemos $\mathcal{T}$ al conjunto de todas las transformaciones rígidas del plano (o del espacio de acuerdo al contexto en el que trabajemos) y definamos el *producto* de dos transformaciones T y S como

$$TS = T \circ S,$$

es decir TS es la transformación rígida que a cada punto p le asigna el punto $(TS)(p) = (T \circ S)(p) = T(S(p))$. Revisando las propiedades i)–iv) y la definición del producto en $\mathcal{T}$ es claro que:

i) el producto es asociativo, pues:

$$\begin{aligned}((TS)R)(p) &= ((TS) \circ R)(p) = (TS)(R(p)) = (T \circ S)(R(p)) = T(S(R(p))) \\ &= T((S \circ R)(p)) = T((SR)(p)) = (T \circ (SR))(p) = T(SR)(p),\end{aligned}$$

para todo p del plano (o del espacio) y por lo tanto $(TS)R = T(SR)$;

ii) la transformación I es identidad para el producto de $\mathcal{T}$, es decir $IT = TI$ para toda $T \in \mathcal{T}$ (dejamos al lector esta verificación);
iii) para cada T de $\mathcal{T}$, T^{-1} es el inverso multiplicativo de T para el producto de $\mathcal{T}$, es decir $TT^{-1} = I = T^{-1}T$ (dejamos al lector esta verificación).

Podemos ahora generalizar esta situación dando la siguiente

Definición: Sea G un conjunto y $\cdot$ una operación en G. Diremos que $(G, \cdot)$, el conjunto junto con la operación $\cdot$, es un *grupo* si:

i) la operación $\cdot$ es asociativa, es decir $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ $\forall g, h, k \in G$;

ii) existe un elemento $e \in G$ tal que $g \cdot e = g = e \cdot g$ $\forall\, g \in G$;

iii) para todo elemento $g \in G$ existe un elemento $h \in G$ tal que $g \cdot h = e = h \cdot g$, donde e es el elemento del punto ii).

Observaciones a la definición:
- Sólo puede existir un único elemento e como en ii), pues supongamos tener también e', entonces $e = e \cdot e' = e'$.
- Para cada $g \in G$ existe un único h tal que $g \cdot h = e = h \cdot g$, pues si k es otro, entonces $g \cdot h = e = g \cdot k$, multiplicando esta igualdad a izquierda por h y asociando convenientemente resulta $e \cdot h = e \cdot k$ y por lo tanto $h = k$.

Las observaciones previas a la definición, sobre el conjunto $\mathcal{T}$ muestran que $(\mathcal{T}, \circ)$ es un grupo.

Una noción importante que necesitamos es la de *subgrupo* de un grupo dado.

Definición: Sea $(G, \cdot)$ un grupo y sea H un subconjunto no vacío de G. Diremos que H es subgrupo de G si:

i) $\forall\, h \in H$, $h^{-1} \in H$;

ii) $\forall\, h, k \in H$, $h \cdot k \in H$.

Resulta, en particular, que H con el producto $\cdot$ restringido a H constituyen un grupo. Además notemos que $e \in H$, pues dado $h \in H$ como $h^{-1} \in H$, por ii) resulta $h \cdot h^{-1} = e \in H$.

Volvamos a la geometría. Llamaremos figura del plano a un subconjunto cualquiera del plano. Los siguientes son algunos ejemplos.

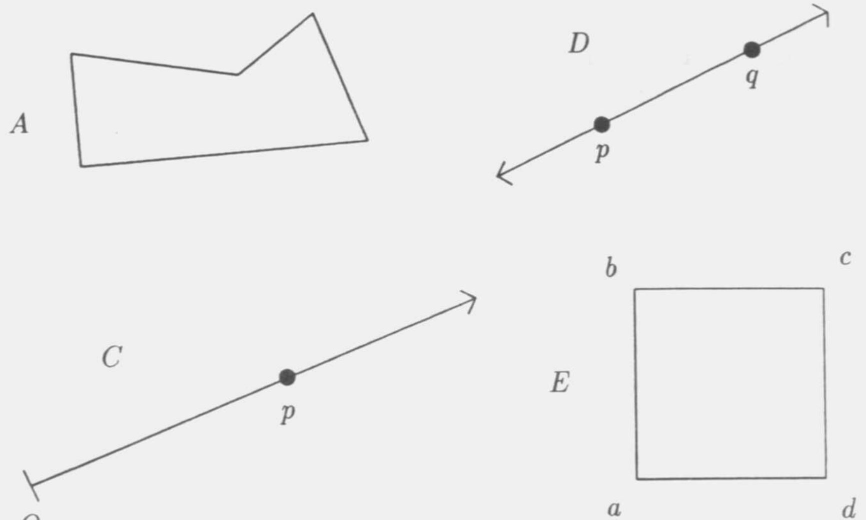


figura 1

Recordemos que hay cuatro tipos de transformaciones rígidas del plano: traslaciones, rotaciones, reflexiones axiales y reflexiones deslizantes.

Para la figura A, no es difícil concluir que si T es una transformación rígida, distinta de la I, entonces las figuras A y $T(A)$ (la transformada de A por T) son distintas (como conjuntos).

Para no hacer tediosa la exposición, en algunos casos no desarrollaremos las demostraciones rigurosas de ciertos hechos, aunque si daremos suficientes argumentos para convencer al lector.

Si pensamos ahora en la semirrecta C, la situación es diferente. Cualquier traslación L_v, con v un vector paralelo a C y del mismo sentido, transforma a C en un subconjunto propio de C. En cambio la reflexión S_C sobre la recta que contiene a C, transforma C en C, más aún $S_C(p) = p, \ \ \forall p \in C$. Aprovechamos este ejemplo para dar la siguiente

Definición: Dadas una figura A y una transformación rígida T, diremos que A es estable por T si $T(A) = A$ y que T fija a A si $T(p) = p, \ \ \forall p \in A$.

Con esta definición decimos que, si L_w es una traslación con w paralelo a la recta D, entonces D es estable por L_w y que la reflexión sobre la recta D, fija a D.

Por último analicemos el caso más interesante. El cuadrado E no es estable por ninguna traslación, sin embargo hay varias reflexiones que lo dejan estable. Las reflexiones sobre rectas que pasan por vértices opuestos y sobre rectas que pasan por los puntos medios de lados opuestos dejan estable a E. Además las rotaciones, con centro en el centro de E, de 90, 180 y 270 grados también dejan estable a E. De hecho éstas que mencionamos y la I, son todas las transformaciones que dejan estable al cuadrado.

Antes de proseguir notemos que, si llamamos R a la rotación de 90 grados, en sentido antihorario, con centro en el centro del cuadrado, la rotación de 180 grados no es otra cosa que $RR = R^2$ y la de 270 grados, en el mismo sentido, es R^3. Por otro lado llamemos S a la reflexión sobre la recta que pasa por los puntos a y c (figura 1) y calculemos RS. Recordemos que una transformación rígida, del plano queda determinada por la imágen de una semirecta y uno de los semiplanos que determina dicha semirecta. Consideremos la semirecta B y el semiplano α de la figura 2, entonces $(RS)(B) = R(S(B)) = R(B) = C$ y $(RS)(\alpha) = R(S(\alpha)) = R(\tilde{\alpha}) = \beta$. (Donde $\tilde{\alpha}$ es el complemento de α). Vemos entonces que RS es la reflexión sobre la recta D.

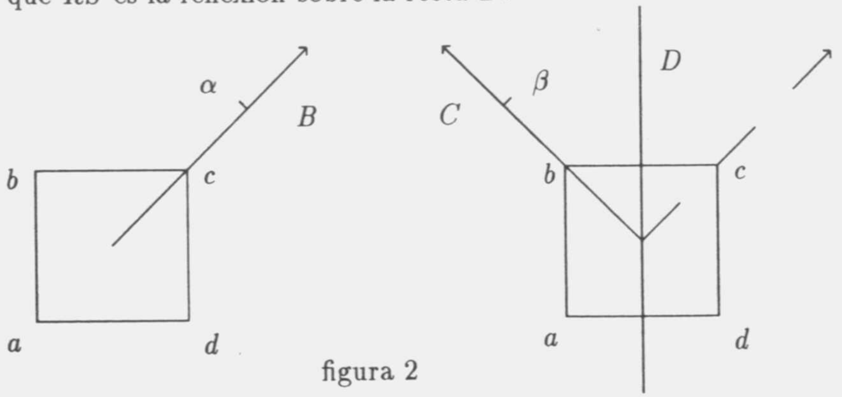


figura 2

Ejercicio: Calcular R^2S y R^3S.

Por último notemos que como $R^4 = I$, es decir $RR^3 = I = R^3R$, resulta $R^3 = R^{-1}$.

Hemos centrado la atención en el conjunto de transformaciones que dejan estable al cuadrado. En general interesa el conjunto de transformaciones que preservan una figura dada. Comencemos probando el siguiente

Teorema 1: Sea A una figura del plano y sea $\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{T} : T(A) = A\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un subgrupo de $\mathcal{T}$.

Demostración: Debemos mostrar que el producto (en $\mathcal{T}$) de dos elementos de $\mathcal{A}$ y el inverso (en $\mathcal{T}$) de un elemnto de $\mathcal{A}$ están en $\mathcal{A}$.

Sean T y S dos elementos de $\mathcal{A}$ y consideremos TS.

$$(TS)(A) = T(S(A)) = T(A) = A,$$

por lo tanto $TS \in \mathcal{A}$.

Ahora tomemos $T^{-1} \in \mathcal{T}$. Sabemos que $A = T(A)$, aplicando a ambos miembros T^{-1} resulta

$$T^{-1}(A) = T^{-1}(T(A)) = (T^{-1}T)(A) = A$$

por lo tanto $T^{-1} \in \mathcal{A}$, quedando demostrado el teorema. □

Ejercicio: Determinar el grupo de transformaciones que dejan estable al triángulo equilátero. Hacer lo mismo con un triángulo isósceles y con el pentágono.

Queremos mencionar que todo lo dicho hasta ahora es también válido para cuerpos en el espacio. Dejamos por un momento la geometría para pasar a los grupos.

De ahora en más nos referiremos a un grupo cualquiera G. Estudiemos tres funciones que existen para todo grupo G:

i) $\alpha : G \longrightarrow G$, definida por $\alpha(g) = g^{-1}$.

Notar que $(\alpha \circ \alpha)(g) = g$ y además $\alpha(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = \alpha(h)\alpha(g)$, pues $(h^{-1}g^{-1})(gh) = h^{-1}eh = e$ y $(gh)(h^{-1}g^{-1}) = geg^{-1} = e$.

La función α es la *inversión* de G.

ii) Aquí definiremos una familia de funciones, una para cada $g \in G$. Sea $\beta_g : G \longrightarrow G$, definida por $\beta_g(h) = g^{-1}hg$. Calculemos $\beta_g \circ \beta_{g^{-1}}$ y $\beta_{g^{-1}} \circ \beta_g$.

$$(\beta_g \circ \beta_{g^{-1}})(h) = \beta_g((g^{-1})^{-1}hg^{-1}) = \beta_g(ghg^{-1}) = g^{-1}(ghg^{-1})g = h,$$

es decir $\beta_g \circ \beta_{g^{-1}} = Id$. Análogamente se obtiene $\beta_{g^{-1}} \circ \beta_g = Id$. Por lo tanto resulta una inversa de la otra. En particular β_g es una biyección de G en sí mismo, para todo $g \in G$.

La función β_g se llama *conjugación por g*.

iii) Nuevamente definiremos una familia de funciones. Para cada $g \in G$ sea $l_g : G \longrightarrow G$, definida por $l_g(h) = gh$. Es fácil verificar que l_g y $l_{g^{-1}}$ son inversas y como antes resulta l_g una biyección de G en sí mismo. Más aún, si X es cualquier subconjunto de G, entonces $|l_g(X)| = |X|$, donde las barras verticales denotan cardinal.

La función l_g se llama *traslación izquierda por g.*

Introducimos ahora un tópico fundamental en el camino para contestar la pregunta que nos formularamos al comienzo. El concepto de *acción de un grupo en un conjunto.*

Definición: Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G en X es una función $A : G \times X \longrightarrow X$ que satisface:

$i)$ $A(e,x) = x, \quad \forall\, x \in X;$

$ii)$ $A(g, A(h,x)) = A(gh,x), \quad \forall\, g,h \in G,\ \forall\, x \in X.$

Estudiemos esta definición. De ahora en más obviaremos la letra A y escribiremos $g \cdot x = A(g,x)$. Con esta nueva notación reescribimos $i)$ y $ii)$.

$i')$ $e \cdot x = x, \quad \forall\, x \in X;$

$ii')$ $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \quad \forall\, g,h \in G,\ x \in X.$

A partir de una acción podemos definir ciertas funciones en X. Más precisamente, para cada $g \in G$ fijo definimos la función $f_g : X \longrightarrow X$, por $f_g(x) = g \cdot x$. Las propiedades $i)$ y $ii)$ dicen que

$$(f_g \circ f_{g^{-1}})(x) = f_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = e \cdot x = x,$$

por lo tanto $f_g \circ f_{g^{-1}} = Id$. Análogamente se prueba $f_{g^{-1}} \circ f_g = Id$. (Puede ser instructivo que el lector haga esta prueba.) Podemos entonces afirmar que cada f_g (una para cada g) es una biyección del conjunto X. Así cada $g \in G$ actúa en X *mezclando* sus elementos.

Cada acción de un grupo G en un conjunto X, produce una partición del conjunto X en *órbitas.* Aclaremos esto. Diremos que $x \sim y$ si existe algún $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Es decir, si alguna de las funciones f_g lleva x en y. Esta relación es de equivalencia:

$i)$ $x \sim x$, pues $e \cdot x = x$;

$ii)$ si $x \sim y$, entonces $y \sim x$, pues si $g \cdot x = y$, entonces $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot y$, es decir, $x = g^{-1} \cdot y$ y por lo tanto $y \sim x$;

$iii)$ si $x \sim y$ y $y \sim x$, entonces $x \sim z$, pues si $g \cdot x = y$ y $h \cdot y = z$, entonces $(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot y = z$, es decir $x \sim z$.

Como sabemos, toda relación de equivalencia en X produce una partición de X en clases de equivalencia; cada una de estas clases de equivalencia se llama *órbita*. Si $x \in X$, la órbita de x o la órbita a la cual x pertenece es

$$O_x = \{y \in X : \exists\, g,\; g \cdot x = y\} = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Otro concepto relacionado con acciones de grupos en conjuntos es el de *isotropía* de un elemento del conjunto X.

Definición: La isotropía de x_0 es el conjunto $G_{x_0} = \{g \in G : g \cdot x_0 = x_0\}$.

Notemos que utilizamos la letra G, pues la isotropía de x_0 está formada por ciertos elementos del grupo G. Más aún, G_{x_0} es un subgrupo de G. De acuerdo a la definición de la página 3 debemos verificar que,

i) si $h \in G_{x_0}$, entonces $h^{-1} \in G_{x_0}$;

ii) si $h, k \in G_{x_0}$, entonces $(hk) \in G_{x_0}$.

Comencemos con la segunda. Calculamos $(hk) \cdot x_0 = h \cdot (k \cdot x_0) = h \cdot x_0 = x_0$, esto dice que $hk \in G_{x_0}$. Por otro lado $h^{-1}x_0 = h^{-1} \cdot (h \cdot x_0) = (h^{-1}h) \cdot x_0 = e \cdot x_0 = x_0$.

De ahora en adelante llamaremos *subgrupo de isotropía de* x_0 a G_{x_0}.

Estamos ya en condiciones de reformular nuestro, ya viejo, problema: contar cuantos motivos del cubo existen, para k colores.

Llamemos X al conjunto de todas las coloraciones posibles con k colores; sabemos, entonces, que $|X| = k^6$ ($|\ |$ denotan cardinal). Además, consideremos el grupo G de todas las rotaciones, en el espacio, que preservan al cubo. El grupo G actúa en el conjunto X, de manera natural (por suerte). Entendamos mejor como es esta acción. Fijamos una posición del cubo y del observador; desde esta posición podemos numerar las caras, por ejemplo: la que nos enfrenta será la 1 y su opuesta la 2; la de arriba será la 3 y su opuesta la 4, la de la izquierda la 5 y su opuesta la 6.

Así a cada elmento de X (una coloración) lo podemos describir diciendo: la cara 1 es azul, la 2 verde, la 3 roja, la 4 blanca, etc, es decir, podemos visualizar los elementos de X como 6-uplas de colores.

Ejemplo: $x \in X$, $x =$(azul, verde, blanco, blanco, azul, rojo).

Ahora es fácil entender la acción de G. Tomemos un $g \in G$, es decir una rotación del cubo y un $x \in X$. Nos preguntamos qué coloración es $g \cdot x$. Dejando fijo al observador, rotamos el cubo según g y describimos los colores que vemos de acuerdo a la numeración anterior.

Ejemplo: Si $x =$(azul, verde, rojo, blanco, amarillo, violeta) y g es la rotación de 90 grados con eje pasando por el centro de las caras 5 y 6, que muestra la figura 3, entonces $g \cdot x =$(blanco, rojo, azul, verde, amarillo, violeta).

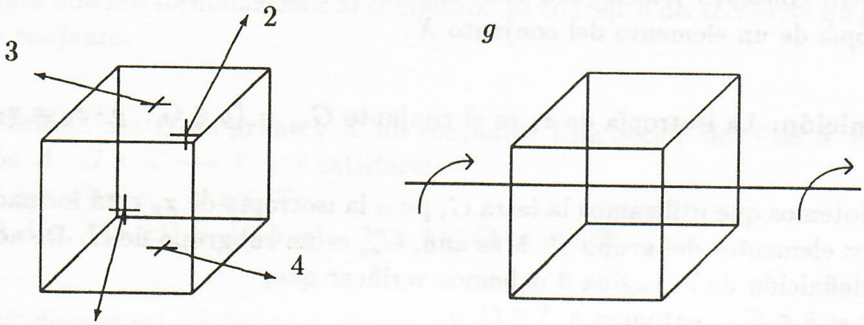


figura 3

Antes de continuar debemos verificar que la acción recién definida satisface las propiedades de la definición de acción, es decir, debemos probar que es una verdadera acción. Veamos, entonces

i) $I \cdot x = x$: como la función identidad no mueve al cubo, es claro que las 6-uplas de colores $I \cdot x$ y x son iguales.

ii) $g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x$: la coloración $h\cdot x$ se obtiene a partir de la coloración x luego de rotar el cubo según h; análogamente $g\cdot(h\cdot x)$ se obtiene de $h\cdot x$ rotando el cubo según g. Es decir, $g\cdot(h\cdot x)$ se obtiene a partir de x rotando el cubo según h y luego según g, lo que equivale a rotar el cubo según la composición $g \circ h$. Pero la función $g \circ h$ corresponde al elemento gh del grupo G, pues el producto de G está dado por la composición de funciones. Como esto vale cualesquiera sean g y h, hemos terminado.

Según nuestro primer enunciado del problema, las coloraciones x y $g\cdot x$ serán consideradas como la misma, para cualquier g, pues difieren en una rotación. Es decir, $O_x = \{g \cdot x : \ g \in G\}$ la órbita de x identifica un motivo del cubo, y por lo tanto contar motivos es equivalente a contar la cantidad de órbitas que en X determina G. Así hemos traducido el problema inicial a un problema de teoría de grupos, que todavía debemos resolver.

Un beneficio importante de esta traducción que hemos desarrollado, radica en el hecho de no aparecer como fundamental que el cubo sea tal. Podríamos tomar otro cuerpo geométrico o incluso alguna figura del plano y todavía considerar coloraciones de las caras del cuerpo o de los lados de la figura. Deberíamos, entonces, elegir el grupo G de acuerdo con la noción de "distintas coloraciones" que apliquemos y al cuerpo o figura en cuestión. Nuevamente la pregunta será ¿cuántas órbitas determina G en X?

En nuestro caso los posibles grupos G serán siempre finitos. Por lo tanto de aquí en más consideraremos sólo grupos G finitos.

Nuestro objetivo final es contar la cantidad de órbitas que determina un grupo G en un conjunto X en el que actúa. Denotaremos X/G al conjunto de órbitas y por lo tanto $|X/G|$ a su cardinal.

Comencemos a contar, en este caso, los elementos de una órbita O_x.

Lema 2: El cardinal de la órbita de un elemento x es igual al cardinal del grupo G, dividido el cardinal del subgrupo de isotropía de x. Es decir

$$|O_x| = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Demostración: Consideremos la función $f_x : G \longrightarrow O_x$, definida por $f_x(g) = g \cdot x$. Esta función es claramente sobreyectiva, por la definición de O_x. Ahora puede ocurrir que $f_x(g) = f_x(h)$, es decir que f_x no sea inyectiva. Pero

$$f_x(g) = f_x(h) \Leftrightarrow g \cdot x = h \cdot x \Leftrightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (h \cdot x)$$
$$\Leftrightarrow (g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}h) \cdot x \Leftrightarrow x = (g^{-1}h) \cdot x \Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x.$$

Así dado $g \cdot x \in O_x$, nos preguntamos ¿cuántos $h \in G$ hay tales que $h \cdot x = g \cdot x$? Hemos visto que $h \cdot x = g \cdot x$ si y sólo si $g^{-1}h \in G_x$, es decir, si y sólo si $g^{-1}h = k \in G_x$ si y sólo si $h = gk = l_g(k)$; como l_g es una biyección concluimos que hay exactamente $|G_x|$ elementos h tales que $f_x(h) = f_x(g)$.

Por lo tanto por cada $g \in G$ hay $|G_x|$ elementos que por la función f_x se correponden con el elemento $g \cdot x$. Esto dice que G tiene $|G_x||O_x|$ elementos o equivalentemente que $|O_x| = |G|/|G_x|$, como queríamos. □

Otro resultado que debemos conocer para resolver con éxito nuestro problema es el siguiente.

Corolario 3: Si x e y están en la misma órbita, entonces los respectivos subgrupos de isotropía tienen la misma cantidad de elementos.

Demostración: Si x e y están en la misma órbita, entonces $|O_x| = |O_y|$ y por lo tanto $|G_x| = |G|/|O_x| = |G|/|O_y| = |G_y|$, como queríamos. □

Finalmente tenemos todos los elementos para enunciar el resultado esperado.

Teorema 4:

$$|X/G| = \frac{(\sum_{g\in G} |X^g|)}{|G|},$$

donde $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$.

Nota: No confundir X^g con G_x; $X^g \subseteq X$ y $G_x \subseteq G$.

Demostración: Consideremos el producto cartesiano $G \times X = \{(g, x) : g \in G \text{ y } x \in X\}$. Además consideremos el subconjunto $A \subseteq G \times X$, $A = \{(g, x) : g \cdot x = x\}$ y calculemos $|A|$ de dos maneras distintas.

i) Para cada $g \in G$ contamos todos los $x \in X$ tales que $g \cdot x = x$, esto es $|X^g|$, por lo tanto $|A| = \sum_{g\in G} |X^g|$.

ii) Para cada $x \in X$ contamos todos los $g \in G$ tales que $g \cdot x = x$, esto es $|G_x|$, por lo tanto $|A| = \sum_{x\in X} |G_x|$.

Ahora, respecto a los cardinales $|G_x|$, tenemos un resultado previo que nos permite agrupar, en la última suma, los sumandos que corresponden a elementos x en una misma órbita; así , si $X/G = O_1 \cup \ldots \cup O_n$

$$\sum_{x\in X} |G_x| = \sum_{x\in O_1} |G_x| + \sum_{x\in O_2} |G_x| + \cdots + \sum_{x\in O_n} |G_x|,$$

pero en cada suma los sumandos $|G_x|$ son iguales (Corolario 3), entonces

$$\sum_{x\in X} |G_x| = |O_1|a_1 + |O_2|a_2 + \cdots + |O_n|a_n,$$

si $a_i = |G_x|$ para $x \in O_i$. Por otro lado el Lema 2 dice que $|O_i| = |G|/|G_{x_i}| = |G|/a_i$, por lo tanto

$$\sum_{x\in X} |G_x| = |G|n = |G||X/G|.$$

De i) y ii) resulta $|G||X/G| = \sum_{g\in G} |X^g|$ o equivalentemente

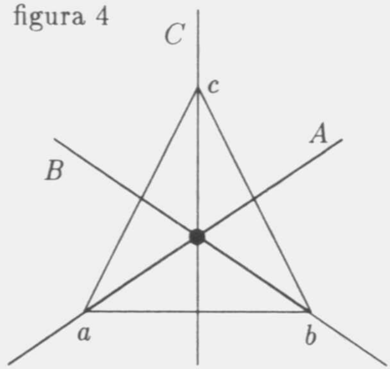
$$|X/G| = \frac{(\sum_{g\in G} |X^g|)}{|G|}.$$

□

A esta altura deberíamos estar convencidos que con esta fórmula podremos resolver nuestro problema inicial. Para ver como la aprovecharemos, contemos a modo de ejemplo cuántas formas diferentes de pintar los lados de un triángulo equilátero, con tres colores hay. En este caso identificaremos dos coloraciones si existe una transformación rígida que lleve una en la otra. Estas constituirán el grupo G. Es decir, no sólo usaremos rotaciones, sino también reflexiones.

Comencemos por determinar el grupo G. Si llamamos R a la rotación de 120 grados en sentido antihorario y S_L a la reflexión sobre la recta L, resulta $G = \{I, R, R^2, S_A, S_B, S_C\}$.

figura 4



Ejercicio: Ya sabemos que G es un grupo, en particular el producto de dos elementos de G es otro elemento de G. Decir qué elementos son: $S_A S_C$, RS_B, $S_C R^2$. Decir también cuáles son los inversos de cada uno de los elementos de G.

Sea X = {coloraciones de T con tres colores} y consideremos G actuando en X de manera análoga a la definida anteriormente. Como

$$|X/G| = \frac{(\sum_{g\in G} |X^g|)}{|G|},$$

calculemos $|X^g|$ para cada $g \in G$.
- $g = I$: $X^g = X$, pues toda coloración satisface $I \cdot x = x$, es decir $|X^I| = |X| = 3^3$.
- $g = R$: debemos contar las coloraciones que satisfagan $R \cdot x = x$; como R lleva el lado ab en el lado bc y a éste al lado ca, las coloraciones que verifican $R \cdot x = x$ son aquellas que asignan el mismo color a los tres lados. De éstas hay 3, una de cada color. Por lo tanto $|X^R| = 3$.
- $g = R^2$: con un argumento análogo al caso anterior se concluye que $|X^{R^2}| = 3$.
- $g = L_A$: la transformación L_A intercambia los lados ac y ab, preservando el lado cb. Así las coloraciones x tales que $L_A \cdot x = x$ son aquellas que asignan el mismo color a los lados ac y ab sin importar el color del lado cb. Entonces disponemos de tres colores para el lado cb y para cada una de estas elecciones, tenemos tres colores posibles para el par de lados ab y ac, es decir $|X^{L_A}| = 3.3 = 9$.
- $g = L_B$ y $g = L_C$: de manera análoga se obtiene $|X^{L_B}| = |X^{L_C}| = 9$.

Resumiendo tenemos $|X/G| = \frac{3^3+3+3+9+9+9}{6} = \frac{60}{6} = 10$.

Damos a continuación la lista de los 10 motivos diferentes del triángulo equilátero, con tres colores, A=azul, R=rojo y B=blanco.

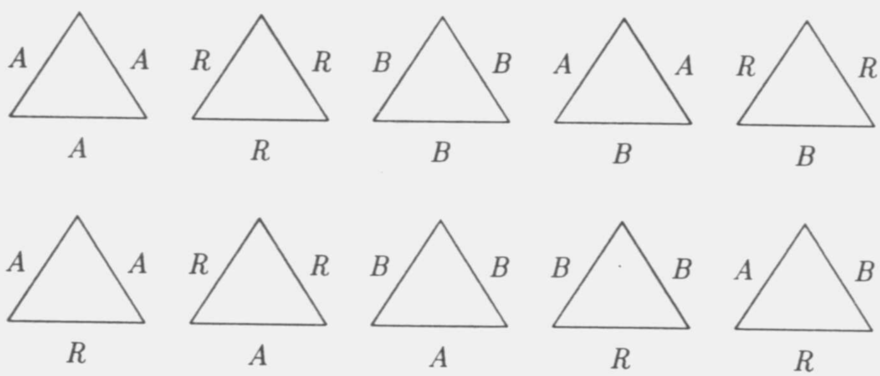


figura 5

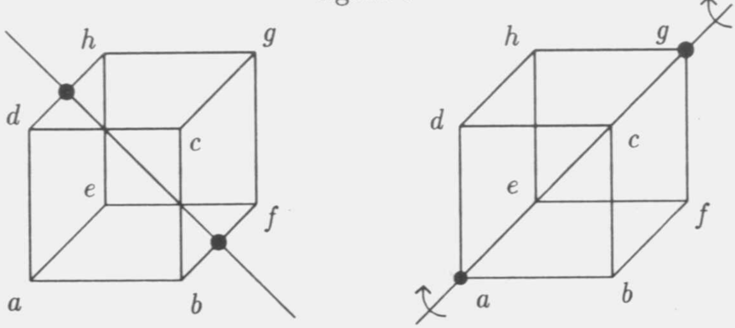
Con lo ya hecho, no es difícil pasar de tres colores a k colores. En este caso resulta $|X^I| = k^3$, $|X^R| = |X^{R^2}| = k$, $|X^{L_A}| = |X^{L_B}| = |X^{L_C}| = k^2$ por lo cual $|X/G| = \frac{k^3+k+k+k^2+k^2+k^2}{6} = \frac{k^3+3k^2+2k}{6} = \frac{k(k+2)(k+1)}{6}$.

Notemos que el numerador es siempre divisible por 6, pues alguno de los factores es par y alguno múltiplo de 3, resultando $|X/G|$ siempre entero, como debe ser.

Ejercicio: Verificar que hay 21 formas distintas de pintar un cuadrado con tres colores, utilizando la misma noción de *distintos* que para el triángulo equilátero. ¿Cuántas hay con k colores?

Finalmente enfrentemos el problema original. Consideremos el cubo C, k colores, el grupo G de rotaciones del cubo (no permitimos reflexiones) y la acción descripta anteriormente. Como en el caso del triángulo, comencemos determinando G. Podemos a priori calcular la cantidad de elementos de G. Para ello observamos que cada rotación produce una permutación de los pares de vértices opuestos de C y recíprocamente para cada permutación de pares de vértices existe una única rotación que la realiza, por lo tanto $|G| = 4!$.

figura 6



Ejemplo: Realicemos la permutación que intercambia los pares $\{d, f\}$ y $\{h, b\}$, dejando fijo el resto. La rotación de 180 grados sobre la recta que pasa por los puntos medios de los lados dh y bf realiza esta permutación.

Por otro lado la rotación de 120 grados sobre la recta que pasa por a y g, de la figura 6, produce la permutación: $\{c, e\} \to \{b, h\} \to \{d, f\} \to \{c, e\}$.

Basta entonces hallar 24 rotaciones en G, pues esas serán todas. Un modelo hecho con fósforos o cartulina puede ayudar en lo que sigue. La figura 6 puede también ayudar.

i) Para cada recta que pasa por los centros de caras opuestas tenemos las rotaciones de 90, 180 y 270 grados, en un sentido. Las rotaciones en el otro sentido ya han sido consideradas; ¿cómo? Como hay 3 de estas rectas ya hemos hallado 9 rotaciones.

ii) Cada recta que pasa por los puntos medios de aristas opuestas determina una rotación de 180 grados. De estas rectas hay 6, por lo tanto agregamos 6 nuevas rotaciones.

iii) Por cada recta que pasa por vértices opuestos existen dos rotaciones no consideradas aún, una de 120 grados y otra de 240 grados. Es decir estamos agregando 8 rotaciones más.

iv) Por último, no debemos olvidar la identidad I.

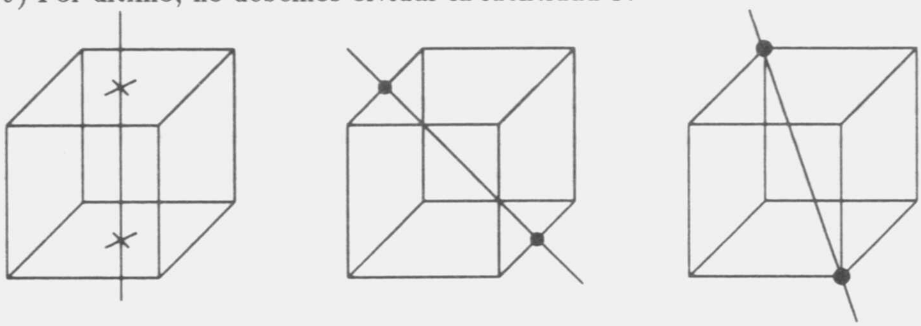


figura 7

Conclusión, hemos encontrado 9+6+8+1=24 rotaciones distintas

Calculemos ahora $|X/G| = (\sum_{g\in G} |X^g|)/|G|$.

- $g = I$: $|X^I| = k^6$;

- si g es una de las rotaciones de 90 ó 270 grados del punto i), entonces cada cara intersecada por la recta de rotación puede tener un color cualquiera, mientras que las 4 restantes deben tener el mismo color. Por lo tanto $|X^g| = k^3$. De estas rotaciones hay 6 en total.

- si g es una de las rotaciones de 180 grados del punto i), resulta $|X^g| = k^4$, ¿por qué? De éstas tenemos 3 distintas.

- si g es un rotación del punto ii) resulta $|X^g| = k^3$. De este tipo hay 6 distintas.

- si g es una de las rotaciones del punto iii), hay dos vértices distinguidos, aquellos por los que pasa la recta de rotación. Las tres caras que tienen en común a uno de esos vértices deben tener el mismo color. Entonces $|X^g| = k^2$. Estas rotaciones son 8 en total.

Habiendo analizado todos los casos posibles para $g \in G$, tenemos

$$|X/G| = \frac{k^6 + 6k^3 + 3k^4 + 6k^3 + 8k^2}{24} = \frac{k^2(k+1)(k^3 - k^2 + 4k + 8)}{24}.$$

Por ejemplo, para $k = 3$ resulta $|X/G|$=57. Es decir, hay 57 motivos distintos del cubo con tres colores. Para $k = 2$, existen 10 motivos diferentes.

Hemos contestado la pregunta inicial. Esto es importante. Pero más importante es la maquinaria desarrollada, pues nos permitirá responder preguntas similares para una gran variedad de objetos. El lector valorará todo esto si dedica algún tiempo para resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio: Mostrar los 10 motivos del cubo que hay con 2 colores.

Ejercicio: Mostrar que $k^2(k+1)(k^3-k^2+4k+8)$ es siempre divisible por 24.

Ejercicio: Probar que para el tetraedro hay $\frac{k^2(k^2+11)}{12}$ motivos distintos con k colores.

Ejercicio: Resolver el problema para el octaedro y el dodecaedro.

Ejercicio: Resolver el problema para el cuerpo que se obtiene pegando dos tetraedros por medio de dos de sus caras.

Problema para pensar

Se quieren fabricar tarjetas de identificación óptica. Cada tarjeta es una cuadrícula $n \times n$ con algunas perforaciones, una en cada casilla. (La tarjeta es indistinguible de uno y otro lado.)

¿Cuántas tarjetas "distintas" se pueden fabricar si $n = 4$? ¿Y si $n = 5$?

¿Puede contestar esta pregunta para todo n?

Facultad de Matemática Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba