Números Amigos

María G. Romero(*) *y Jorge A. Vargas***

Para los filósofos griegos la amistad perfecta entre dos personas significaba que con las partes de una se construye la otra. Esto llevó a los Pitagóricos a estudiar los números amigos, que también han sido denominados "números congéneres" o "números se invicem amantes", el estudio de los números amigos ha continuado a través de los siglos. El propósito de esta nota es relatar algunas de sus etapas.

Euclides define que un segmento es *parte de otro* si el primero yuxtapuesto una cantidad finita de veces cubre exactamente el segundo. Ahora, en el caso de que tanto el primer segmento como el segundo se los obtiene yuxtaponiendo el segmento unidad un número finito de veces el concepto de *parte de otro* origina geométricamente el concepto de divisibilidad de números naturales. En efecto, (aquí damos un salto en el tiempo) nuestra hipótesis sobre los segmentos escrita en lenguaje matemático actual dice que hemos dado números naturales n, m de modo que el primer segmento es $n.\vec{u}$ y el segundo es $m.\vec{u}$, el hecho de que el primero *es parte de* el segundo se expresa en fórmula por $n.\vec{u} + \cdots n.\vec{u} = m.\vec{u}$, siendo el número de sumandos de la izquierda k. El álgebra de segmentos nos dice que esta igualdad es equivalente a la igualdad $n.k = m$. Esto es, n divide a m.

Para los griegos y los pitagóricos el concepto de números amigos refleja matemáticamente el concepto de amistad perfecta entre dos números. Esto es, dos números son amigos si a cada uno de ellos se lo obtiene de las partes del otro. Las partes de un número hemos visto son sus divisores, si interpretamos a "se lo obtiene de" como sumar llegamos a:

<ins>Definición:</ins> Dos números naturales distintos son amigos si a cada uno de ellos se lo obtiene sumando los divisores propios del otro.

Ejemplos: 1) 10 y 8 no son amigos puesto que los divisores propios de 10 son 1,2,5 cuya suma es 8, pero los divisores propios de 8 son 1,2,4 cuya suma es 7 distinto de 10.

2) 220 y 284 son amigos puesto que los divisores propios de 220 son 1,2,4,5,-10,20,11,22,44,55,110 cuya suma es 284, mientras que los divisores propios de 284 son 1,2,4, 71,142 cuya suma es 220 (Hecho descubierto por los pitagóricos, ¡imagínelos haciendo esta cuenta en números romanos!)

3) Un número primo n no es amigo de ningún número m mayor que uno. Puesto que al ser n primo tiene exactamente un divisor propio, el 1, por tanto la suma de los divisores propios de n es 1 distinto de m.

4) Si n es menor que 220, entonces n no es amigo de nadie.

Si $d_1 = 1, d_2, \cdots, d_k$ representan los divisores propios de n y $f_1 = 1, f_2, \cdots, f_r$ representan los divisores propios de m, entonces n y m son amigos sí y sólo si

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = m \text{ y } f_1 + f_2 + \cdots + f_r = n.$$

Pasaron varios siglos sin que se encontraran nuevos pares de números amigos hasta que en el siglo nueve de nuestra era, el matemático árabe Thâbit ben Korrah demostró usando argumentos geométricos (el álgebra que haremos es posterior al 1500) el siguiente:

Teorema 1: Si k es un número natural de modo que

$$p = 3.2^{k-1} - 1,\ q = 3.2^k - 1,\ r = 9.2^{k-1} - 1$$

son primos, entonces $n = 2^k pq$ y $m = 2^k r$ son amigos.

La demostración de este teorema la haremos en un momento, los ingredientes necesarios son: saber describir los divisores de un número si sabemos descomponer ese número en sus factores primos y sumar progresiones aritméticas.

Del enunciado del teorema surge la siguiente pregunta, si p, q, r son primos, y $n = 2^k pq$ y$m = 2^k r$, ¿ Qué condición deben satisfacer p, q, r de modo que n y m son invicem amantes? La respuesta está escrita en el teorema 2, del cual luego haremos una demostración.

Otra pregunta que surge del teorema es: ¿ Para qué valores de k los números p, q, r son primos? La respuesta conocida a esto es: para $k = 2, 4, 7$ son primos ya que se obtiene 5,11,17; 23,63,71; 191,383,1151 lo cual origina los pares de amigos 220,284; 23184,1136; 9363584,147328. Para cualquier otro k menor o igual a 200, el matemático francés Gerardin en 1908, calculó que uno de los tres números p, q, r no es primo y que los distintos pares que se obtienen nunca son amigos. Sugerimos como ejercicio, muy sencillo, hacer un programa en Basic o Pascal para verificar este hecho. Como premio, el lector diligente, podrá verificar lo calculado a mano por Dickson en 1913, y así arribar a que si $n < m$ son amigos con $n < 6333$ entonces el par n, m es uno de: $220, 284; 2^3.19.41, 2^5.199; 2^2.5.131, 2^2.17.43; 2^2.5.251, 2^2.13.107;$
$1184 = 2^5.37, 1210 = 2.5.11^2$.

Como informáramos antes, el primer par lo descubrieron los pitagóricos, el tercero, cuarto y quinto par fueron descubiertos por Euler alrededor de 1750 (quien encontró 60 pares de números amigos), el quinto par fue descubierto por Paganini en 1866. Por cierto, si el programa anda bien le permitirá descubrir otros pares de números amigos, entre ellos los pares de amigos descubiertos por

Dickson en 1913,

$$2^4.12959.50231, 2^4.17.137.262079; 2^4.10103.735263, 2^4.17.137.2990783.$$

Un par de problemas de los que no se conoce la solución son: ¿ Hay un número finito o un número infinito de pares de amigos? ¿ El método de Korrah nos provee de infinitos pares de números amigos?

Resumen de la historia: después del par descubierto por los pitagóricos, nadie descubrió ningún par hasta Fermat que en 1636 encontró que $17296 = 2^4.23.47, 18416 = 2^4.1151; 9363584 = 2^7.191.383, 9437056 = 2^7.73727$ son pares de amigos, nuevamente hay un intervalo hasta que Euler en 1750 encuentra 60 pares de números amigos, nuevo intervalo hasta el par que encontró Paganini en 1866, para luego pasar a los hallazgos de Dickson. Hoy en día con las computadoras encontrar pares de amigos no es tan difícil...

Ahora demostramos:

Teorema 2. Si p, q, r son primos impares y distintos de modo que

$$n = 2^k pq \quad \text{y} \quad m = 2^k r$$

son amigos. Entonces existen números naturales k, t tal que $t \leq k$ y a la vez se satisfacen las igualdades

$$p = 2^k + 2^{k-t} - 1, \; q = 2^k + 2^{k+t} - 1, \; r = [2^{2k-t}(2^{t+1} + 2^{2t} + 1)] - 1.$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, los divisores de n son

$$1, 2, \cdots, 2^k, p, 2.p, \cdots, 2^k.p, q, 2.q, \cdots, 2^k.q, p.q, 2.p.q, \cdots, 2^k.p.q$$

y los divisores de m son

$$1, 2, \cdots, 2^k, r, 2.r, \cdots, 2^k.r.$$

Por consiguiente la suma de los divisores de n es: $(1+2+\cdots+2^k)+p(1+2+\cdots+2^k)+q(1+2+\cdots+2^k)+pq(1+2+\cdots+2^k) = (1+2+\cdots+2^k)(1+p+q+pq) = (2^{k+1}-1)(p+1)(q+1)$

para lo cual hemos usado que $(1+2+\cdots+2^k) = 2^{k+1}-1$ y $(1+p+q+pq) = (p+1)(q+1)$.

La suma de los divisores de m es:

$$(1+2+\cdots+2^k)+r(1+2+\cdots+2^k) = (r+1)(1+2+\cdots+2^k) = (r+1)(2^{k+1}-1)$$

Ahora n, m amigos significa que

Suma de divisiores propios de $n = m$

Suma de divisores propios de $m = n$

Sumando n a la primera igualdad y m a la segunda igualdad obtenemos:

Suma de divisiores de $n = m + n$

Suma de divisores de $m = n + m$

Por lo tanto, se tiene que

Suma de divisiores de n = Suma de divisores de m

Recordando las expresiones de cada suma, obtenemos

$$(2^{k+1}-1)(p+1)(q+1) = (2^{k+1}-1)(r+1)$$

Simplificando $(2^{k+1}-1)$, resulta

$$(r+1) = (p+1)(q+1)$$

de donde

$$r = p+q+qp$$

Por otro lado, hemos remarcado que $n+m$ = suma de los divisores de n, esto es

$$(1+p+q+pq)(2^{k+1}-1) = n+m = 2^k pq + 2^k r$$

reemplazando en esta igualdad el valor de $r = p+q+pq$ obtenemos

$$(1+p+q+pq)(2^{k+1}-1) = 2^k pq + 2^k(p+q+pq)$$

Escribiendo $(2^{k+1}-1) = 2^k.2 - 1$ y usando en el primer miembro la propiedad distributiva se tiene que:

$$(1+p+q+pq)(2^{k+1}-1) = 2^k(2+2p+2q+2pq) - (1+p+q+pq)$$

Reemplazando la última expresión en la anteúltima identidad y operando se llega a

$$2^k(2+p+q) = (1+p+q+pq)$$

Ahora definimos $P = p+1, Q = q+1$, de esto

$$1+p+q+pq = PQ, 2+p+q = P+Q$$

Por consiguiente la penúltima identidad se reescribe

$$2^k(P+Q) = PQ$$

A ambos miembros de esta identidad sumamos $2^{2k} - 2^k(P+Q)$ de donde resulta

$$2^{2k} = PQ + 2^{2k} - 2^k(P+Q)$$

Recordando el segundo caso de factoreo y $2^{2k} = 2^k 2^k$, se obtiene

$$2^{2k} = (P-2^k)(Q-2^k)$$

Luego verificaremos que $(P-2^k) > 0$ y $(Q-2^k) > 0$, como 2 es primo, el teorema fundamental de la aritmética, nos dice que

$$(P-2^k) = 2^h \text{ y} (Q-2^k) = 2^d \text{ con } h+d = 2k$$

Ejercicio: si h, d son naturales tal que $h+d = 2k$, entonces existe un número natural t menor o igual a k de modo que $h = k-t, d = k+t$
Aplicando el ejercicio llegamos a que

$$P = 2^k + 2^{k-t}, Q = 2^k + 2^{k+t}$$

Por consiguiente

$$p = P - 1 = 2^k + 2^{k-t} - 1 \text{ y } q = Q - 1 = 2^k + 2^{k+t} - 1$$

recordando que $r = p + q + qp$ el álgebra nos dice que

$$r = PQ - 1 = (2^k + 2^{k-t})(2^k + 2^{k+t}) - 1 = [2^{2k-t}(2^{t+1} + 2^{2t} + 1)] - 1$$

lo cual concluye la prueba del teorema 2.

Para el caso $t = 1$, se obtiene la terna propuesta por Korrah. Pero, todavía no hemos probado el teorema de Korrah. Por suerte, los cálculos necesarios están ya realizados. Recordemos el enunciado del teorema de Korrah. Sí k es un número natural de modo que $p = 3.2^{k-1} - 1, q = 3.2^k - 1, r = 9.2^{k-1} - 1$ son primos entonces $n = 2^k pq$ y $m = 2^k r$ son amigos. Primero notemos que suma de divisores propios de n = suma de divisores de n menos n, por cierto lo mismo vale para m. Por otro lado, como k es tal que p, q, r son primos la suma de los divisores de n o m las hemos calculado, por consiguiente

$$\text{suma de divisores propios de } n = (2^{k+1} - 1)(p+1)(q+1) - 2^k pq$$
$$\text{suma de divisores propios de } m = (2^{k+1} - 1)(r+1) - 2^k r$$

Ahora el lector diligiente reemplazará los valores de p, q, r y basándose en las leyes de la potenciación obtendrá que n, m son amigos. (Es una cuenta de aritmética de primer año).

Ejercicio: Hemos definido el concepto de números amigos para números distintos, ¿cuál sería el concepto de número amigo de si mismo?

Ejercicio: Euler se propuso encontrar pares de números amigos del tipo

$$apq, ar \quad \text{donde} \quad a, p, q, r \text{ son primos}$$

Para esto, denotó por A la suma de todos los divisores de a, y definió como nosotros $P := p + 1, Q := q + 1$, y llegó a que la condición para que los números propuestos sean amigos se traduce en la ecuación,

$$a(P + Q) = (2a - A)PQ \quad \text{!`verificar!}$$

Luego Euler consideró la fracción reducida de $\frac{a}{2a-A}$, es decir, escribimos

$$\frac{a}{2a-A}=\frac{b}{c} \text{ con } mcd(b,c)=1,$$

ahora le proponemos se convierta en Euler y verifique la igualdad

$$(cP-b)(cQ-b)=b^2.$$

Por lo tanto, dados a, r, calculamos b, c y luego factoreamos b^2 en factores diferentes, por consiguiente calculamos P, Q, finalmente verificamos si p, q son primos y así obtenemos nuevos pares de amigos. Ultimo ejercicio: ¿Cómo definiría ternas de números amigos?

Para concluir verificamos que si $2^{2k}=(P-2^k)(Q-2^k)$, y k, P, Q naturales, entonces $(P-2^k)>0$ y $(Q-2^k)>0$.

Si uno de los factores fuera negativo, el otro también sería negativo y por consiguiente $(2^k-P)>0$ y $(2^k-Q)>0$. Como, $2^{2k}=2^{2k}-Q2^k-P(Q-2^k)$ tendríamos que 2^{2k} es igual a $2^{2k}-$ número positivo, lo cual es absurdo.

Bibliografía:

Dickson L.E., History of the theory of numbers, Vol. I, Chelsea Pub. Co, New York.

(*)Facultad de Ingeniería.
Universidad San Juan Bosco de la Patagonia. 9000 Comodoro Rivadavia.

(**) Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.