¿Sumar $1 + 2^n + ... + m^n$ para cualquier n ? ¡ Es fácil !

Esteban Cichero

Resumen. En este artículo obtenemos en forma directa mediante métodos elementales la suma de las n-ésimas potencias de los primeros m enteros positivos:

$$P_n(m) \equiv \sum_{k=1}^{m} k^n$$

La deducción se basa enteramente en los conceptos de recursión y prueba por Inducción Completa y parte de una idea simple: disponer la suma $1 + 2^n + ... + m^n$ en un arreglo triangular de potencias (n-1)-ésimas.

La solución de este problema es bien conocida: las funciones $P_n(m)$ son polinomios de grado $n+1$ en la indeterminada m que se expresan en términos de los polinomios y números de Bernoulli. Al obtener los coeficientes de $P_n(m)$ recobramos como subproducto de nuestro trabajo esta importante familia de números racionales.

Sin embargo, hay algo nuevo: el cálculo directo de $P_n(m)$ no sólo nos permite ver más de cerca cómo está constituído cada número de Bernoulli B_n, sino que nos facilita la construcción de un eficaz algoritmo de cómputo para obtenerlos hasta cualquier N fijo deseado.

Indice

1. Introducción

La suma de las potencias n-ésimas de los primeros m enteros positivos

$$P_n(m) \equiv 1 + 2^n + \ldots + m^n$$

donde $m \in \mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $n \in \mathrm{N}_0 = \{0, 1, 2, ..\}$, se expresa usualmente mediante el polinomio de Bernoulli $B_{n+1}(x)$ de grado $n+1$ y variable real x, evaluado en $x = m+1$, y el número de Bernoulli $B_{n+1} \equiv B_{n+1}(0) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1)$, en la forma

$$P_n(m) = \frac{1}{n+1} \left[B_{n+1}(m+1) + (-1)^n B_{n+1} \right]$$

Los polinomios $B_j(x)$ se definen mediante la función generatriz

$$\frac{t \exp(xt)}{\exp(t) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

En particular, los números B_j son los coeficientes del desarrollo en serie

$$\frac{t}{\exp(t) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

Todos los B_j de índice impar, excepto B_1, son nulos; todos los B_j tales que $j = 4k$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, son negativos salvo B_0; y los restantes B_j, de la forma $j = 4k + 2$, son positivos. Los números de Bernoulli constituyen una familia de números racionales, cuyas propiedades recursivas se derivan de la relación:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_j = 0 , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Citamos aquí los primeros números de Bernoulli no nulos

B_0	B_1	B_2	B_4	B_6	B_8	B_{10}	B_{12}	B_{14}	B_{16}	B_{18}	B_{20}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

El mínimo valor de $\mid B_{2s} \mid$ es $\frac{1}{42}$; la magnitud de B_{2s} crece rápidamente con s.

Conocidos los números de Bernoulli B_j para $j = 0, 1, 2, ..., n$, el polinomio de Bernoulli $B_n(x)$ se calcula con la fórmula

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$$

En este trabajo calculamos $P_n(m)$ sin presuponer casi ningún conocimiento de los polinomios de Bernoulli, excepto el hecho de dar por sentado que P_n es un polinomio de grado $n + 1$, lo cual por otra parte no es difícil de probar directamente.

Los coeficientes c_k del polinomio P_n son funciones de n y se indexarán de esta manera:

$$P_n(m) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k(n) m^{n+1-k} \tag{2}$$

2. Propiedades recursivas de $P_n(m)$

Disponemos la suma $1 + 2^n + ... + m^n$ en este arreglo triangular

$$\begin{array}{rcl}
1 + 2^{n-1} + 3^{n-1} + ... + m^{n-1} & = & P_{n-1}(m) \\
2^{n-1} + 3^{n-1} + ... + m^{n-1} & = & P_{n-1}(m) - P_{n-1}(1) \\
3^{n-1} + ... + m^{n-1} & = & P_{n-1}(m) - P_{n-1}(2) \\
 & \cdots & \\
m^{n-1} & = & P_{n-1}(m) - P_{n-1}(m-1)
\end{array}$$

Sumando miembro a miembro obtenemos

$$P_n(m) \quad = \quad mP_{n-1}(m) - \sum_{k=1}^{m-1} P_{n-1}(k) \tag{3}$$

A partir de esta ecuación obtendremos las correspondientes relaciones de recursión para los coeficientes $c_k(n)$. Para ello escribimos la Ec.(3) para $n + 1$

en la forma

$$P_{n+1}(m) = mP_n(m) - \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=0}^{n+1} c_k(n) j^{n+1-k} = mP_n(m) - \sum_{k=0}^{n+1} c_k(n) P_{n+1-k}(m-1)$$

Reemplazando $P_{n+1-k}(m-1) = P_{n+1-k}(m) - m^{n+1-k}$ y evaluando la suma del 2^{do} miembro para $k=0$ y $k=1$ podemos reordenar la ecuación (3) de este modo

$$(1 + c_0(n))\, P_{n+1}(m) = (m + 1 - c_1(n))\, P_n(m) - \sum_{k=2}^{n+1} c_k(n) P_{n+1-k}(m) \qquad (4)$$

Ahora ponemos todo en función de los coeficientes, a fin de obtener un sistema de ecuaciones para las funciones $c_k(n)$. Trabajamos de la siguiente forma:

a) desarrollamos la suma del 2^{do} miembro, agrupando según las potencias de m:

$$\sum_{k=2}^{n+1} c_k(n) \sum_{j=0}^{n+2-k} c_j(n+1-k) m^{n+2-k-j} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \left\{ \sum_{j=0}^{k-2} c_{2+j}(n) c_{k-2-j}(n-1-j) \right\} m^{n+2-k} + \sum_{j=0}^{n-1} c_{2+j}(n) c_{n-j}(n-1-j)$$

b) ponemos $P_{n+1}(m) = \sum\limits_{k=0}^{n+2} c_k(n+1) m^{n+2-k}$, $mP_n(m) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_k(n) m^{n+2-k}$, y cambiamos índices en $(1-c_1(n))\, P_n(m)$ para obtener $(1-c_1(n)) \sum\limits_{k=1}^{n+2} c_{k-1}(n) m^{n+2-k}$

c) sustituimos todo esto en la Ec(4), y en la expresión resultante, desarrollamos para $k=0$, $k=1$ y $k=n+2$.

Por igualación de coeficientes de potencias iguales de m en ambos miembros, llegamos al siguiente *sistema triangular de relaciones recursivas* (S):

$$
\begin{cases}
(1+c_0(n))\; c_0(n+1) = c_0(n) \\[2ex]
(1+c_0(n))\; c_1(n+1) = c_1(n) + (1-c_1(n))c_0(n) \\[2ex]
(1+c_0(n))\; c_k(n+1) = c_k(n) + (1-c_1(n))c_{k-1}(n) - \sum\limits_{j=0}^{k-2} c_{2+j}(n)c_{k-2-j}(n-1-j) \\[2ex]
(1+c_0(n))c_{n+2}(n+1) = \qquad (1-c_1(n))c_{n+1}(n) - \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_{2+j}(n)c_{n-j}(n-1-j)
\end{cases}
$$

Claro está que la 3^{ra} línea representa las n ecuaciones válidas para $2 \leq k \leq n+1$.

3. Calculando $P_n(m)$ para $n = 0, 1, 2...$

Para que la recursión definida por la Ec.(3) no sea vacía, necesitamos un primer elemento. Pero esto es muy fácil:

$$P_0(m) = \sum_{k=1}^{m} k^0 = \underbrace{1+1+...+1}_{m\ veces} = m$$

Seguimos con $P_1(m)$, utilizando la Ec.(3), pero que transformaremos del siguiente modo más conveniente para los cálculos:

Sumando y restando $P_{n-1}(m)$ al segundo miembro, la ecuación toma la forma

$$P_n(m) = (m+1)P_{n-1}(m) - \sum_{k=1}^{m} P_{n-1}(k) \tag{5}$$

De esta manera para $n = 1$ tenemos

$$P_1(m) = (m+1)P_0(m) - \sum_{k=1}^{m} P_0(k) = m^2 + m - P_1(m)$$

Por lo tanto:

$$P_1(m) = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$$

como nos enseñó Gauss.

Calculemos ahora la suma de los cuadrados:

$$P_2(m) \;=\; (m+1)P_1(m) - \sum_{k=1}^{m} P_1(k) = (m+1)P_1(m) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{m} k^2 + \sum_{k=1}^{m} k\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}P_2(m) &= mP_1(m) + \frac{1}{2}P_1(m) \\ P_2(m) &= \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m \end{aligned}$$

Para la suma de los cubos obtenemos:

$$P_3(m) = (m+1)P_2(m) - \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}P_3(m) &= mP_2(m) + \frac{1}{2}P_2(m) - \frac{1}{6}P_1(m) \\ P_3(m) &= \frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2 \end{aligned}$$

Para $n = 4$ tendremos

$$\frac{5}{4}P_4(m) = mP_3(m) + \frac{1}{2}P_3(m) - \frac{1}{4}P_2(m)$$

y tras un cálculo algo más tedioso obtenemos

$$P_4(m) = \frac{1}{5}m^5 + \frac{1}{2}m^4 + \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{30}m$$

Anotaremos también los polinomios P_5 y P_6, pues los valores de sus coeficientes serán necesarios como punto de partida para algunas pruebas formales por Inducción:

$$P_5(m) = \frac{1}{6}m^6 + \frac{1}{2}m^5 + \frac{5}{12}m^4 - \frac{1}{12}m^2$$

$$P_6(m) = \frac{1}{7}m^7 + \frac{1}{2}m^6 + \frac{1}{2}m^5 - \frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{42}m$$

Como relativo control de los cálculos realizados, verifíquese que la sucesión de coeficientes obtenidos para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ cumple esta obvia e importante condición:

Para todo $n \geq 0$, $P_n(1) = 1$, implica

$$\sum_{k=0}^{n+1} c_k(n) = 1$$

4. ¿Recursión? ¡Inducción!

Haremos las siguientes hipótesis:

$$n \geq 0 : \begin{cases} c_0(n) = \frac{1}{n+1} \\ c_{n+1}(n) = 0 \end{cases}$$

$$n \geq 1 : \left\{ c_1(n) = \tfrac{1}{2} \right.$$

$$n \geq 2 : \left\{ c_2(n) = \tfrac{n}{12} \right.$$

$$n \geq 3 \quad \text{y } 3 \leq k \leq n : \quad c_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = \text{impar} \\ (-1)^{\frac{k}{2}+1} \left| c_k(n) \right| & \text{si } k = \text{ par, con } \left| c_k(n) \right| > 0 \end{cases}$$

Esto es, $c_k(n) < 0$ si $k = 4s$ y $c_k(n) > 0$ si $k = 4s + 2$ para $s = 1, 2, ...$ tal que $k(s) \leq n$.

4.1 Cálculo de $c_0(n)$.

Hemos visto que $c_0(0) = 1$, de modo que aplicando la hipótesis inductiva a la primera ecuación del sistema de relaciones de recurrencia:

$$c_0(n+1) = \frac{c_0(n)}{1 + c_0(n)} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2} \quad \Box$$

4.2 Cálculo de $c_1(n)$.

Ya verificamos que $c_1(1) = \frac{1}{2}$, por lo tanto procedemos con el siguiente paso de la inducción:

$$\begin{aligned} c_1(n+1) &= \frac{c_1(n)+(1-c_1(n))c_0(n)}{1+c_0(n)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{n+2}{2(n+1)}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Cálculo de $c_2(n)$.

También comprobamos que $c_2(2) = \frac{1}{6}$, de modo que aplicando la hipótesis al caso $k = 2$ del sistema recursivo tenemos:

$$\begin{aligned} (1+c_0(n))c_2(n+1) &= c_2(n)+(1-c_1(n))c_1(n)-c_2(n)c_0(n-1) = \\ \frac{n}{12}+\frac{1}{4}-\frac{n}{12}\frac{1}{n} &= \frac{n+2}{12} \end{aligned}$$

Es decir, $\frac{n+2}{n+1}c_2(n+1) = \frac{n+2}{12}$, por lo tanto $c_2(n+1) = \dfrac{n+1}{12}$ □

4.4 Cálculo de $c_{n+1}(n)$.

Según hemos visto, $c_1(0) = c_2(1) = ... = c_7(6) = 0$. Supongamos pues que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, 1, ..., n$ se cumple que
$c_{k+1}(k) = 0$. Entonces, la última ecuación del sistema:

$$(1+c_0(n))c_{n+2}(n+1) = (1-c_1(n))c_{n+1}(n) - \sum_{j=0}^{n-1} c_{2+j}(n)c_{k-2-j}(n-1-j)$$

muestra inmediatamente que $c_{n+2}(n+1) = 0$, pues por hipótesis todos los términos del segundo miembro son nulos, y el factor $(1 + c_0(n))$ es distinto de cero. □

4.5 Cálculo de $c_k(n)$, para k impar.

Supongamos que para cada
$j = 2, 3, ..., n$ todos los coeficientes de índice impar $c_{2r+1}(j)$, con $1 \le r \le \left[\frac{j-1}{2}\right]$

son nulos. Por otra parte, ya comprobamos que para $n = 3$, $c_3(3) = 0$; para $n = 4$, $c_3(4) = 0$; y para $n = 5$, $c_3(5) = c_5(5) = 0$.

Sea $n \geq 3$ arbitrario. Usando la hipótesis, podemos escribir las ecuaciones recursivas válidas para $3 \leq k = 2r + 1 \leq n + 1$ en la forma:

$$(1 + \frac{1}{n+1})c_{2r+1}(n+1) = 0 + \frac{1}{2}c_{2r}(n) - \sum_{j=1}^{r} c_{2j}(n)c_{2r+1-2j}(n+1-2j)$$

donde sólo hemos usado que $c_{2r+1}(n) = 0$ y efectuamos un cambio de índice $2 + j = 2j'$ para eliminar todos los términos donde aparezca un coeficiente $c_{2+j}(n)$ con $2 + j$ impar.

Luego, la misma hipótesis aplicada ahora a los coeficientes $c_{2r+1-2j}(n + 1 - 2j)$ implica que todos los términos de la sumatoria son nulos, salvo el correspondiente a $j = r$ que vale $c_{2r}(n)c_1(n+1-2r)$. Como $n+1-2r \geq 1$ usamos que $c_1(n + 1 - 2r) = \frac{1}{2}$ y llegamos a la conclusión deseada:

$$\frac{n+2}{n+1}c_{2r+1}(n+1) \quad = \quad \frac{1}{2}c_{2r}(n) - \frac{1}{2}c_{2r}(n) = 0 \quad \square$$

4.6 Cálculo de $c_k(n)$,para k par.

Probaremos que todos los coeficientes $c_4(n), c_8(n), ..., c_{4s}(n), ...$ con $4 \leq 4s \leq n$ son negativos y que todos los coeficientes $c_6(n), c_{10}(n), ..., c_{4s+2}(n), ...$ con $6 \leq 4s + 2 \leq n$ son positivos.

Para ello, notemos que las ecuaciones que aún quedan por resolver se pueden escribir:

$$\frac{n+2}{n+1}c_{2r}(n+1) = c_{2r}(n) - \sum_{j=1}^{r} c_{2j}(n)c_{2r-2j}(n+1-2j) \qquad (6)$$

donde $4 \leq 2r \leq n + 1$, y que la hipótesis inductiva se formula así:

Sea un número natural $n \geq 4$. Para cada $k \in \mathbf{N}$ se verifica

$$\begin{aligned} c_{4s}(k) &< 0 \quad \text{cuando } 4 \leq 4s \leq k \leq n \\ c_{4s+2}(k) &> 0 \quad \text{cuando } 6 \leq 4s + 2 \leq k \leq n \end{aligned}$$

es decir, $0 \neq c_{2r}(k) = (-1)^{r+1} |c_{2r}(k)|$ para todo k y r tales que $4 \leq 2r \leq k \leq n$.

Tenemos como primeros casos $\quad c_4(4) = -\frac{1}{30} \quad$ y $\quad c_6(6) = \frac{1}{42}$.

Caso $2r = 4s$.

Aplicando las hipótesis realizadas en la Ec. (6) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} c_{4s}(n+1) &= c_{4s}(n) - \sum_{j=1}^{2s} c_{2j}(n) c_{4s-2j}(n+1-2j) = \\ &= -|c_{4s}(n)| - \sum_{j=1}^{2s} |c_{2j}(n)| \, |c_{4s-2j}(n+1-2j)| < 0 \quad \Box \end{aligned}$$

Caso $2r = 4s + 2$.

En este caso resulta.

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} c_{4s+2}(n+1) &= c_{4s+2}(n) - \sum_{j=1}^{2s+1} c_{2j}(n) c_{4s+2-2j}(n+1-2j) = \\ &= |c_{4s+2}(n)| + \sum_{j=1}^{2s+1} |c_{2j}(n)| \, |c_{4s+2}(n+1-2j)| > 0 \quad \Box \end{aligned}$$

5. Los coeficientes $c_k(n)$ de P_n

Usaremos en adelante la siguiente notación:

$$C_k \equiv c_k(k)$$

Por otra parte, como hemos probado que $c_{n+1}(n) = 0$, actualizamos las fórmulas:

$$P_n(m) = \sum_{k=0}^{n} c_k(n) m^{n+1-k} \ , \ \sum_{k=0}^{n} c_k(n) = 1$$

Obsérvese que

$$C_k = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(k) \tag{7}$$

En lo que sigue, obtendremos una expresión general para las funciones $c_k(n)$ a partir de las ecuaciones recursivas (6), que escribiremos:

$$\frac{n+2}{n+1} c_k(n+1) = c_k(n) - \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} c_{2j}(n) c_{k-2j}(n+1-2j) \tag{8}$$

donde k es un número *par*.

En particular, la ecuación correspondiente a $k = n + 1$, escrita para k, es:

$$\frac{k+1}{k} c_k(k) = - \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} c_{2j}(k-1) c_{k-2j}(k-2j)$$

En $j = \frac{k}{2}$ el término $c_k(k-1)\, c_0(0)$ es nulo, de modo que obtenemos la siguiente relación, válida para un número par $k \geq 4$, que nos será útil más adelante:

$$- \sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} c_{2j}(k-1) c_{k-2j}(k-2j) = \frac{k+1}{k} C_k \tag{9}$$

5.1. Solución de las ecuaciones recursivas. Números combinatorios y algo más...

Teorema 1. *Sea $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la familia de números racionales determinados por la condición de ser los coeficientes del término lineal en los polinomios de grado $n+1$ y término constante cero*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(n) x^{n+1-k}$$

cuya evaluación en $m \in \mathbb{N}$ iguala la suma $1 + 2^n + 3^n + ... + m^n$.

Entonces, para todo $n \in \mathbf{N}_0$ y cada $k \in \mathbf{N}_0$ tal que $0 \leq k \leq n$ se cumple

$$c_k(n) = \frac{\binom{n+1}{k}}{n+1} C_k \tag{10}$$

Prueba. Consideramos en primer lugar los casos particulares $k = 0, 1, 2$. Se verifica que $c_k(n)$ toma la forma propuesta usando $C_0 = 1$, $C_1 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} c_0(n) &= \frac{\binom{n+1}{0}}{n+1} C_0 = \frac{1}{n+1} \\ c_1(n) &= \frac{\binom{n+1}{1}}{n+1} C_1 = \frac{1}{2} \\ c_2(n) &= \frac{\binom{n+1}{2}}{n+1} C_2 = \frac{n}{12} \end{aligned}$$

pues la dependencia funcional con n de c_0, c_1 y c_2 se ha probado ya por inducción.

Cuando k es un número impar mayor o igual que 3, se sabe que $C_k = c_k(k) = 0$.

Por lo tanto, para $3 \leq 2s+1 \leq n$ se tiene

$$c_{2s+1}(n) = \frac{\binom{n+1}{2s+1}}{n+1} C_{2s+1} = 0$$

Consideremos finalmente que k es un número *par* mayor o igual que 4.

En tal caso, las funciones $c_k(n)$ satisfacen las ecuaciones de recursión (8):

$$\frac{n+2}{n+1} c_k(n+1) = c_k(n) - \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} c_{2j}(n) c_{k-2j}(n+1-2j)$$

Razonaremos por inducción completa sobre n.

Comprobamos que la proposición enunciada se cumple para $n = 4$. En este caso solo tenemos que computar $c_k(4)$ cuando $k = 4$:

$$c_4(4) = \frac{\binom{5}{4}}{5} C_4 = -\frac{1}{30}$$

Supongamos pues que (10) se cumple para todos los enteros $4, 5, \ldots$ hasta un cierto n.

La prueba consiste simplemente en reemplazar los coeficientes $c_0, c_2, c_4, \ldots, c_{k-2}, c_k$ en el segundo miembro de (8) utilizando la fórmula (10) y verificar que la expresión resultante toma la forma requerida por el método de Inducción para el primer miembro; esto es, que vale

$$\frac{n+2}{n+1}\frac{\binom{n+2}{k}}{n+2}C_k = \frac{\binom{n+2}{k}}{n+1}C_k$$

Hagamos primero las cuentas que justifican los pasos intermedios de dicho cálculo.

$$c_k(n) = \frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}C_k = \frac{n(n-1)\ldots(n+2-k)}{k!}C_k$$

implica

$$\frac{C_k}{k!} = \frac{c_k(n)}{n(n-1)\ldots(n+2-k)}$$

El primer miembro es independiente de n, siempre que k sea menor o igual que n. Teniendo en cuenta que en la suma del segundo miembro de la Ec.(8), es $2j \leq k$ escribimos la relación anterior en la forma:

$$\frac{C_{2j}}{(2j)!} = \frac{c_{2j}(k-1)}{(k-1)(k-2)\ldots(k+1-2j)} \tag{11}$$

Por definición de número combinatorio, se cumple que

$$n(n-1)...(n+3-k) = \frac{\binom{n+1}{k-1}}{n+1}(k-1)! \tag{12}$$

Luego, siempre teniendo como referencia el segundo miembro de (8), calculemos

$$c_{2j}(n)c_{k-2j}(n+1-2j) = \tag{13}$$

$$= \frac{\binom{n+1}{2j}}{n+1}\frac{\binom{n+2-2j}{k-2j}}{n+2-2j}C_{2j}C_{k-2j}$$

$$= \frac{(n+1)n...(n+2-2j)}{(n+1)(2j)!}\frac{(n+2-2j)(n+1-2j)...(n+3-k)}{(n+2-2j)(k-2j)!}C_{2j}C_{k-2j}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n+3-k)}{(2j)!(k-2j)!}C_{2j}C_{k-2j}$$

y tengamos en cuenta que el último término de la sumatoria en (8), $j = \frac{k}{2}$, vale

$$c_k(n)c_0(n+1-k) = \frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}\frac{\binom{n+2-k}{0}}{n+2-k}C_kC_0 = \tag{14}$$

$$\frac{(n+1)n...(n+2-k)}{(n+1)\,k!}\frac{1}{(n+2-k)}C_k = \frac{n(n-1)...(n+3-k)}{k!}C_k$$

Ahora sustituimos en el segundo miembro de la Ec.(8) las expresiones obtenidas en (11), (12),(13) y (14) y resulta:

$$c_k(n) - \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} c_{2j}(n)c_{k-2j}(n+1-2j) =$$

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}C_k - n(n-1)...(n+3-k)\sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}}\frac{C_{2j}}{(2j)!}\frac{C_{k-2j}}{(k-2j)!} - \frac{n(n-1)...(n+3-k)}{k!}C_k =$$

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}C_k - \frac{\binom{n+1}{k-1}}{n+1}(k-1)!\sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} \frac{c_{2j}(k-1)c_{k-2j}(k-2j)}{(k-1)(k-2)...(k+1-2j)(k-2j)!} - \frac{\binom{n+1}{k-1}}{n+1}\frac{C_k}{k} =$$

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}C_k - \frac{\binom{n+1}{k-1}}{n+1}\sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} c_{2j}(k-1)c_{k-2j}(k-2j) - \frac{\binom{n+1}{k-1}}{n+1}\frac{C_k}{k}$$

A continuación usamos la Ec.(9) para evaluar la suma del segundo término y las propiedades recursivas de los números combinatorios completan la prueba:

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}C_k + \frac{\binom{n+1}{k-1}}{n+1}\frac{k+1}{k}C_k - \frac{\binom{n+1}{k-1}}{n+1}\frac{1}{k}C_k =$$

$$\left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1}\right)\frac{C_k}{n+1} = \frac{\binom{n+2}{k}}{n+1}C_k \qquad \square$$

5.2. Dependencia de las funciones $c_k(n)$ de los números C_k.

Vimos que la solución del sistema recursivo triangular (S) es:

$$c_k(n) = \frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}C_k \tag{15}$$

La relación $C_k \equiv c_k(k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(k)$ y el valor inicial $c_0(0) = 1$ garantizan que esta definición no es circular, y proporcionan un esquema recursivo de cálculo de los $c_k(n)$ más eficiente que el basado directamente en la Ec. (3).

Para ello evaluemos la diferencia $(n+2)c_k(n+1) - (n+1)c_k(n)$ usando la Ec.(15):

$$\begin{aligned}(n+2)\frac{\binom{n+2}{k}}{n+2}C_k - (n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{n+1}C_k &= \frac{(n+1)...(n+3-k)}{(k-1)!}C_k = \\ &= k\frac{\binom{n+2}{k}}{n+2}C_k = kc_k(n+1)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $c_k(n)$ cumple la relación recursiva

$$c_k(n+1) = \frac{n+1}{n+2-k} c_k(n) \tag{16}$$

válida para $0 \leq k \leq n$ y equivalente a la Ec.(15), pero ciertamente más fácil de calcular para un $k =$ constante una vez conocido el número C_k, y que usamos así:

$$\begin{array}{l}
c_0(0) \\
\downarrow \\
c_0(1) \rightarrow c_1(1) \\
\downarrow \qquad\quad \downarrow \\
c_0(2) \rightarrow c_1(2) \rightarrow c_2(2) \\
\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \\
\vdots \qquad\quad\ \vdots \qquad\quad\ \vdots \\
c_0(n) \rightarrow c_1(n) \rightarrow c_2(n) \rightarrow \ldots c_k(n) \ldots \rightarrow c_n(n)
\end{array}$$

Las flechas verticales representan la operación definida por Ec. (16) y las horizontales el cálculo de $c_n(n) = C_n$ a través de la Ec.(7).

Con este programa de cálculo se pueden obtener fácilmente los polinomios $P_n(x)$ hasta el orden $n = N$ que se requiera, y con sus coeficientes, como probaremos en la Proposición siguiente, los números de Bernoulli B_n.

Además, nótese que una vez calculado un número C_n, se tiene la dependencia *explícita* de todos los coeficientes $c_k(n)$ con ese valor de n para todo k entre 0 y n.

6. ¿Y dónde están los números de Bernoulli ?

Proposición 2. Para todo número $n \in N_0$, $n \neq 1$, el coeficiente C_n del término lineal en x del polinomio $P_n(x)$ es el número de Bernoulli B_n. Además $B_1 = -C_1$.

Prueba. Puesto que para todo $n \geq 0$, $P_n(1) = 1$, reemplazando los coeficientes $c_j(n)$ en la igualdad $\sum_{j=0}^{n} c_j(n) = 1$ obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n+1}{j}}{n+1} C_j = 1 \tag{17}$$

Sea $n \geq 1$. Entonces $C_1 = \frac{1}{2}$ y al desarrollar la suma queda

$$\frac{1}{n+1} C_0 + C_1 + \frac{\binom{n+1}{2}}{n+1} C_2 + \ldots + C_n = 1$$

Restando 1 en ambos miembros

$$\frac{1}{n+1} C_0 - \frac{1}{2} + \frac{\binom{n+1}{2}}{n+1} C_2 + \ldots + C_n = 0$$

Si ahora definimos para todo $n \geq 0$ los números B'_n mediante

$$B'_n = \begin{cases} C_n & \text{si } n \neq 1 \\ -C_1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

tenemos

$$\frac{\binom{n+1}{0}}{n+1} B'_0 + \frac{\binom{n+1}{1}}{n+1} B'_1 + \ldots + \frac{\binom{n+1}{n}}{n+1} B'_n = 0$$

y cancelando el factor común $n+1$ vemos que estos B'_n cumplen para todo $n \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B'_j = 0$$

La Ec.(1) y la igualdad inicial $B'_0 = C_0 = 1$ garantizan entonces que estos B'_n son los viejos y conocidos números de Bernoulli B_n. □

¿Cúal es la dependencia con k de un coeficiente C_k ?

Está implícita en la ecuación (1), que según la Proposición anterior podemos escribir:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_k &= 1 - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} C_j \ , \quad \text{para } k \geq 1 \end{aligned}$$

Está claro que extraer la dependencia explícita $f(k)$ de estas relaciones está fuera de nuestro alcance, y a pesar de que para dar a luz a cada uno de estos números C_k, es necesario recorrer toda la "historia evolutiva" de la especie, la implementación del algoritmo indicado en (5.2) muestra que la tarea no es muy pesada. De hecho, con él graficamos rápidamente los polinomios P_n hasta un grado tan alto como $n = 26$.

Las curvas que obtuvimos reflejan interesantes propiedades de simetría; esto es, sugieren que las funciones

$$f_n(x) = P_n(x - \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{n+1} \left[B_{n+1}(x + \tfrac{1}{2}) + (-1)^n B_{n+1} \right] \quad , n \geq 1$$

son alternativamente pares e impares; es igualmente sugestiva la distribución de los ceros.

Nos gusta pensar que la potencial contribución de este trabajo consiste justamente en atraer la atención hacia estas propiedades de simetría, pues creemos que los polinomios de Bernoulli aún pueden generar nuevas y bellas aplicaciones en manos de matemáticos de mayor vuelo.

Referencia.

1. J. Spanier and K. Oldham, An Atlas of Functions, Hemisphere Publishing Corporation, 1987.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y Naturales.
Universidad Nacional de San Luis.