Un problema-experiencia para integrar conocimientos.

Alía de Saravia, Dolores

Resumen

Se presenta un problema clásico del área de las curiosidades matemáticas, la "transformación de un cuadrado en un rectángulo de área diferente", como motivador del estudio y/o de la aplicación y/o de la experimentación de varios aspectos de matemática básica.

El problema se describe como formando parte de una situación áulica, ficticia, en la que los alumnos son aspirantes a ser profesores de matemática. De cada alumno se espera que, además de interpretar, resolver y experimentar sea protagonista en producir enunciados precisos de ejercicios, en los temas que más le interesen, a partir de propuestas no tan precisas por parte del profesor o profesores y de los otros alumnos; y que sea también espectador y crítico de las actividades de los demás.

1 Introducción

La realización de experiencias en la enseñanza de la matemática, y en especial de la geometría tiene tanto defensores como detractores. Si alguien comenta que es interesante que un alumno verifique, "cortando los tres ángulos de un triángulo de papel y acomodándolos" que la suma de los esos ángulos es de 180^o, otro podrá aducir que, de un modo similar, el alumno puede convencerse de que un cuadrado de 8×8 se transforma en un rectángulo de 13×5.

Si se espera que una teoría tenga aplicaciones prácticas, creemos que una posición, en algún sentido intermedia, es más adecuada: es más sencillo fijar los conceptos teóricos si se tiene la memoria de una experiencia realizada al respecto; las experiencias "engañosas" son también útiles, siendo conveniente, por un lado desarrollar la habilidad de evaluar a las mismas en cuanto a la credibilidad que merecen y por otro ampliar el conocimiento de la teoría para poder cubrirlas; es muy gratificante comprobar que lo observado experimentalmente está avalado por la teoría y también el detectar y explicar, gracias a la teoría, "resultados" experimentales imposibles; y en definitiva, si una experiencia engañosa no puede ser explicada razonablemente en base a la teoría disponible habrá llegado el momento de ampliar o modificar la teoría.

Hoy en día además de la experimentación directa con los objetos que la matemática pretende simular, es posible también simular experiencias con computadora ampliando, en algún sentido, la cantidad y calidad de los fenómenos "observables".

2 Técnica didáctica

Nos proponemos utilizar una ligera variante de la "técnica de resolución de problemas". Dicha técnica se define en [1] del modo siguiente: "Consiste en un grupo de actividades seleccionadas y organizadas por el docente alrededor de una situación problemática, desconocida para el alumno y que estimula en los educandos un proceso activo creativo de estudio semejante al que desarrollan los investigadores matemáticos". Hablamos de variante de esa técnica en el sentido de que el docente tendrá seleccionadas varias actividades, pero no organizadas para que todos los alumnos las realicen a todas, sino, a lo sumo, organizadas en varios subconjuntos intentando adaptarse mejor a las diferentes características e inclinaciones que muestren sus distintos alumnos.

Es por ello que no se preparará una guía de trabajo para todos los alumnos sino que se irán proponiendo diferentes versiones de un problema, algunas dirigidas a todos los alumnos y otras sólo a algunos de ellos.

Los alumnos no conocerán de entrada todo lo que se espera de ellos ya que se pretende acercarlos más a la actividad de investigación matemática haciéndoles sentir que los resultados que vayan encontrando sugerirán cuáles otros resultados buscar.

Los enunciados de problemas del docente, sobre todo los primeros tendrán cierto grado de imprecisión a fin de dejar, también para los alumnos, la tarea de extraer ejercicios, de enunciado preciso, relacionados con el problema.

En lo que sigue se señalarán como "propuestas" los enunciados supuestamente presentados por el docente del curso; y se señalarán como "ejercicios" los enunciados supuestamente producidos por los alumnos.

Luego de cada propuesta los alumnos serán invitados a preparar ejercicios relacionados con las propuestas ya vistas, generalizándolas, concretándolas, con aclaraciones agregadas para evitar confusiones de interpretación, etc.

En lo que sigue se han agrupado todas las propuestas de parte del docente por un lado y todos los ejercicios supuestamente producidos por los alumnos por el otro.

Puede llegar a ocurrir que algún alumno empiece a avanzar por caminos cuyo "final" no es conocido por el docente. En ese caso, el profesor advertirá de ese hecho al alumno y le sugerirá que deje planteada la actividad para otra ocasión.

La primera y segunda propuesta se pretende que sean trabajadas por todos los alumnos en forma individual. El objetivo de esto, es conseguir una buena cantidad de respuestas ingenuas antes de que un mejor conocimiento del problema haga eso imposible; y quizás evitar que los alumnos que sepan "todo" acerca del problema que nos interesa por habérselo encontrado por ejemplo a través de [2], [3] o [4] impidan que los alumnos restantes lo descubran por sí mismos.

Para las propuestas restantes se fomentará el trabajo en grupo.

3 Planteo del problema-experiencia. Propuestas del docente

Se intenta que los alumnos tengan acceso no sólo a los materiales habituales de estudio, lápiz y papel y si es posible computadoras con software adecuado, sino también a papel cuadriculado, tijeras y goma de pegar. Se plantea a la clase la primera y la segunda versión del problema pidiéndoles que en estas etapas trabajen en forma individual, y entreguen una respuesta, por escrito, y en unos pocos minutos (Se aceptarán respuesta "no se me ocurrió nada" o "yo conocía un método pero ahora no lo recuerdo", etc.).

Propuesta 1: *Dado un cuadrado de papel cuadriculado de* 8×8 *cuadraditos, cortarlo en pedazos para reubicarlos formando un rectángulo que no sea un cuadrado.*

Probablemente haya muchas respuestas que indiquen, con palabras, con dibujos o con los pedazos del cuadrado reubicados, que cortando al cuadrado por una paralela al lado por su centro se obtienen dos rectángulos de 4×8 que pueden acomodarse para obtener un rectángulo de 4×16 cuadraditos. Quizás haya alguna solución con tres cortes, paralelos a uno de los lados, para llegar a un rectángulo de 32×2 cuadraditos.

Con la confianza ganada por los alumnos en la resolución de la primera versión del problema, se plantea:

Propuesta 2: *Dado un cuadrado de papel cuadriculado de* 8×8 *cuadraditos, cortarlo en pedazos para reubicarlos formando un rectángulo que no sea un cuadrado ni tampoco un rectángulo "muy alargado"; es decir queremos que el lado mayor del rectángulo sea menor que el triple del lado menor.*

Es posible que algunos alumnos interpreten que los lados del rectángulo deban ser naturales. No se ha pedido eso, pero el hablar de papel cuadriculado puede sugerirlo.

Luego de algunos minutos, si nadie llegó a una de las soluciones "esperadas" por el profesor, se agrega la sugerencia:

Propuesta 3: *Utilizar tres cortes como sugiere la Figura 1, y decidir cuánto deben valer x e y, con $x < y$ y sabiendo que $x + y = 8$.*

En esa figura no se muestra, a propósito, ningún cuadriculado.

Posiblemente ahora se consigan algunas respuestas correctas y otras más "simples" pero incorrectas:

$$\text{correctas:} \begin{cases} x = 4(3 - \sqrt{5}) = 3.06 \\ y = 4(\sqrt{5} - 1) = 4.94 \end{cases} \qquad \text{incorrectas:} \begin{cases} x = 3, \\ y = 5 \end{cases}$$

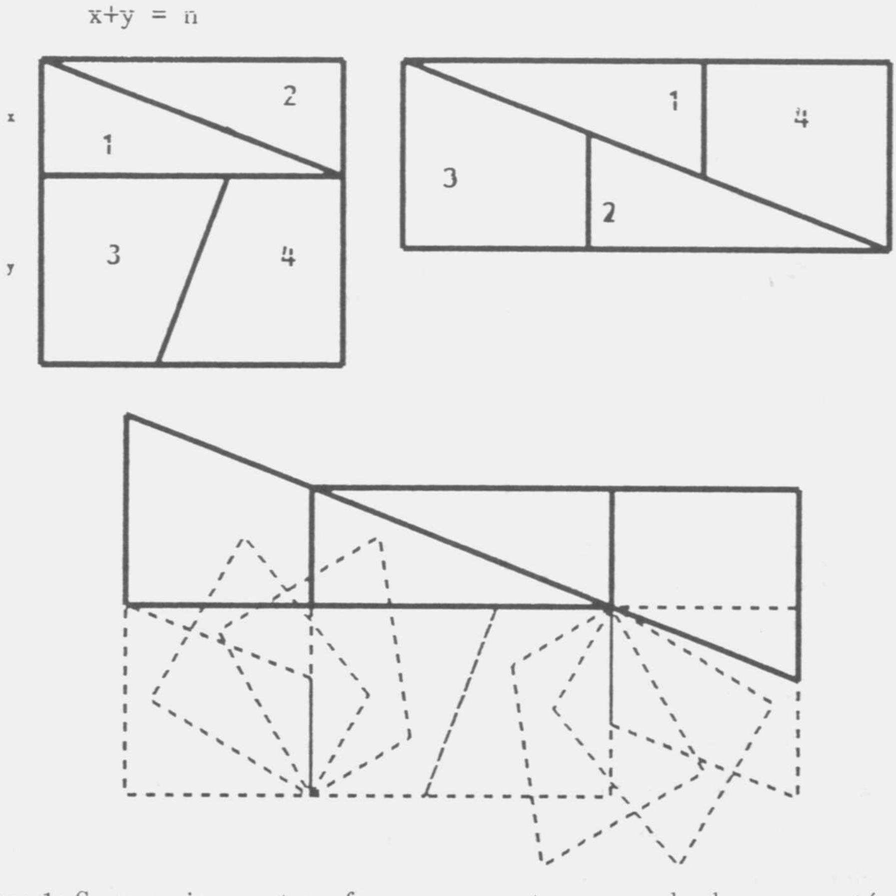

Figura 1: Sugerencia para transformar, por cortes, un cuadrado en un rectángulo.

Respuestas correctas: Las respuestas correctas, posiblemente hayan sido conseguidas resolviendo, en definitiva, una ecuación de segundo grado, y no se habrá hecho todavía la experiencia de cortar el cuadrado en pedazos y reacomodarlos. Se invitará a los alumnos a hacer la experiencia, si ya no la hicieron, con lo que se obtendrá un rectángulo con los cuadriculados de las distintas partes que no "pegan" del todo bien (aunque no es muy apreciable a simple vista). Será el momento de preguntarles si no habrá alguna solución más "linda" con x e y naturales. Cuando estén convencidos de que no, se les puede pedir que enuncien, en forma de "ejercicio" lo que han encontrado. Ejemplos de respuestas posibles son los ejercicios 1, 2 y 3 (pág. 12 y 13).

Como consecuencia de lo probado en esos ejercicios, se concluye que la sugerencia dada para resolver el problema conduce a una única solución que no es respetuosa del diseño cuadriculado, Figura 2.

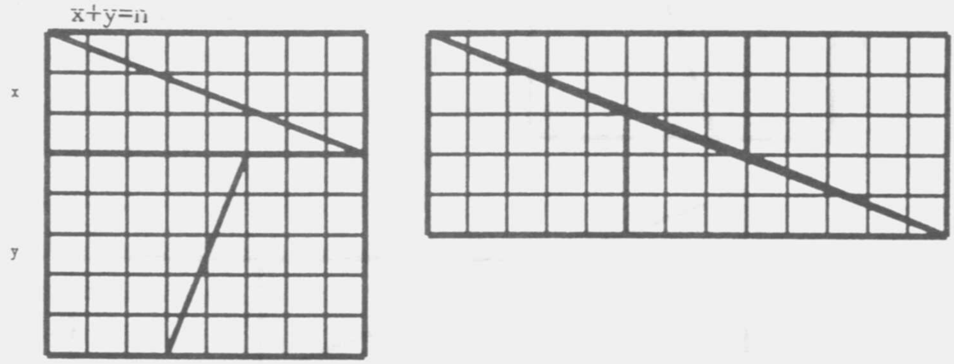

Figura 2: Resultado para $x = n/2(3 - \sqrt{5})$ e $y = n/2(\sqrt{5} - 1)$

Respuestas incorrectas: Las respuestas incorrectas probablemente hayan recibido, antes de ser presentadas, la "comprobación experimental" y seguramente los cuadriculados empalman, en algún sentido bien. Será el momento de advertirles que quizás hayan quedado huecos o superposiciones que no se distinguen a simple vista o que los bordes de los pedacitos que parecen formar la diagonal, no están todos alineados (Ver Figura 3). Y que es necesario realizar la verificación teórica. Es probable que verifiquen que el área del rectángulo resultante es menor, en 1 cuadradito, que la del cuadrado original.

Aquí es importante convencer a los alumnos de que una equivocación, si bien no es un motivo de orgullo, tampoco es algo vergonzoso que hay que olvidar lo más pronto posible; puede dar lugar, al ser enfrentada adecuadamente, a modificaciones interesantes del problema original; en definitiva ayudan a aprender.

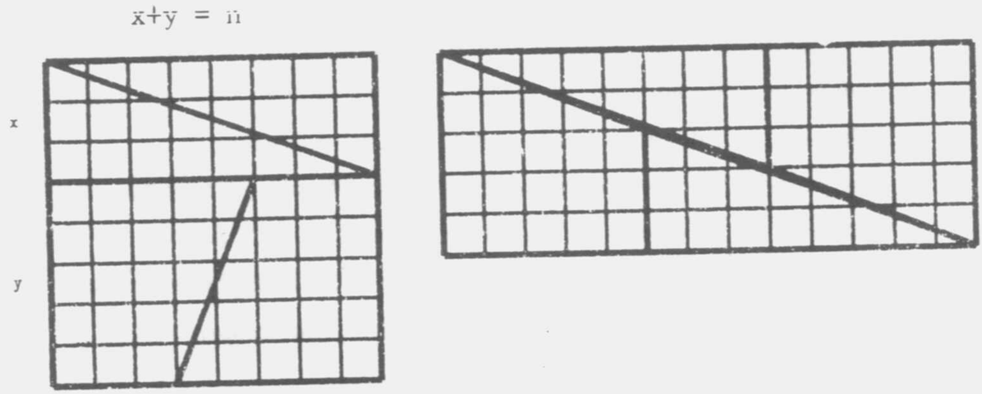

Figura 3: Resultado para $x = 3$ e $y = 5$

Se les puede sugerir que continúen experimentando para descubrir si hay otros cuadrados de $n \times n$ que sirvan como ejemplos engañosos de modificación del área por corte. Los alumnos podrían proponer un ejercicio como el 5 (pág. 13).

Propuesta 4: *Volviendo al caso de los rectángulos "muy alargados", analizar para qué valores de n hay soluciones con rectángulos de lados naturales (enteros positivos) obtenibles por cortes todos paralelos a uno de los lados (uno o más cortes). Y cuántas soluciones hay, contando como una sola a todos los* *rectángulos congruentes.*

n: 3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
x: 1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
y: 2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
diferencia: -1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Tabla 1: Lado menor y diferencia de áreas, de valor absoluto 1, entre el rectángulo $(n+y) \times y$ y el cuadrado $n \times n$

Como respuesta al ejercicio 5 (pág. 13) algunos alumnos, quizás con ayuda computacional, pueden llegar a preparar una tabla como la 1 y conjeturar que los cuadrados y rectángulos que sirven para preparar estas falsas transformaciones de cuadrados en rectángulos tienen mucho que ver con la sucesión de Fibonacci. El docente puede colaborar proponiendo:

Propuesta 5: *Demostrar que cualquier terna de términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci, a partir de la terna 1,2,3 nos da una solución para preparar un problema de un cuadrado que se transforma en un rectángulo de área una unidad de más o una unidad de menos respecto de la del cuadrado.*

Los alumnos podrían enunciar los ejercicios 6 y 7 (pág. 13) al respecto.

Comunicadas a todos los alumnos las respuestas obtenidas a la segunda propuesta se puede comentar que la respuesta mala es un ejemplo de los peligros de interpretación a los que puede llevar una experimentación totalmente aislada de la teoría. Pero también se puede considerar que es una aproximación a la solución buena; (resultará ser la mejor aproximación posible si medimos esa aproximación a través de áreas) en números naturales, a la solución buena; y que esa solución aproximada es más fácil de transmitir y llevar a la práctica (por ser de valores enteros); y que, en definitiva, los resultados prácticos de ambas no son muy diferentes.

Propuesta 6: *Dado un cuadrado de lado n, con n natural se consideran todos los modos posibles de cortarlo en cuatro regiones poligonales y reacomodar* *dichas regiones como sugiere la figura 1. El borde exterior de la figura que se obtiene es un rectángulo. Se pide:*

- *Calcular el área del cuadrado dado y del rectángulo formado en términos de* n *e* y.
- *Encontrar, si existe, (o justificar que no existen), el* y *tal que el valor absoluto de la diferencia de las áreas del rectángulo y del cuadrado sea la menor posible, para los casos siguientes:*
  - *Tanto* y *como* x *pueden ser reales positivos cualesquiera. Si existe solución llamémoslo,* η_n.
  - *Tanto* y *como* x *deben ser naturales. Llamémoslo, si existe,* y_n.
  - y *deben ser racional. Llamémoslo, si existe* r_n.
- *Encontrar valores de* n *entero positivo y el* y_n *correspondiente de modo que el valor absoluto de la diferencia de áreas sea exactamente 1. Formalizar los resultados encontrados.*
- *Si* n *es entero positivo y además* η_n *está definida para todos los valores de* n *(o para todos los valores de* n *desde uno en adelante), justificar que la sucesión* η_n *es divergente pero que* $\frac{\eta_n}{n}$ *es convergente. Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{n}$.
- *Lo mismo, pero cambiando* η_n *por* y_n.
- *¿ Se puede hacer lo mismo con* r_n*?*
- *¿Es monótona la sucesión* $h_n = \frac{y_n}{n}$*?*
- *Construir un ejemplo de subsucesión de* h_n *que sea creciente, y otro que sea decreciente.*

(Se aceptarán respuestas del tipo algorítmicas: "entre los números del conjunto finito ..., la solución buscada es el que cumpla ..." y naturalmente cuantos menos elementos tenga ese conjunto finito mejor será).

Algunos alumnos, con ayuda computacional podrían producir gráficos como los de la figura 4 y 5 (pág. 12) que permitirán conjeturar respuestas a algunas de las preguntas de la última propuesta.

Además, los ejercicios supuestamente producidos por los alumnos (pág. 12 y 13) también sirven como ayuda para esta última propuesta.

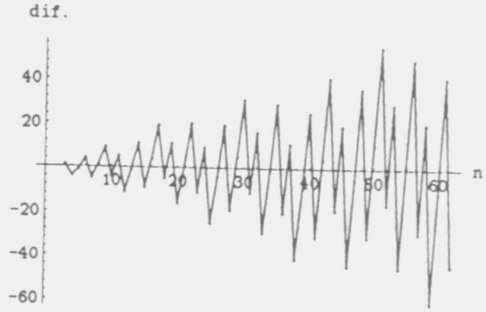

Figura 4: Diferencia de área entre el "mejor" rectángulo de lados naturales para el cuadrado de lado n.

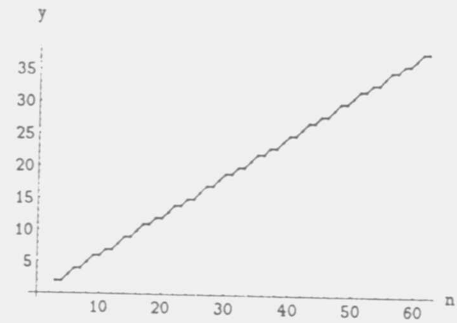

Figura 5: Lado menor del "mejor" rectángulo de lados naturales para el cuadrado de lado n.

4 Ejemplos de posibles enunciados producidos por los alumnos

Cualquiera de los ejercicios 1, 2 y 3 siguientes podría formar parte de la justificación de que el problema de la propuesta 2 (pág. 6), no tiene soluciones naturales, los ejercicios 2 y 3 servirían para lo mismo en relación a cualquier cuadrado de lado n natural (no importa si n es o no es 8).

Ejercicio 1: *Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas* $x, y \in \mathbf{R}$

$$x + y = 8, \qquad (x + 2y)y = 64$$

- *Resolverlo*

- *Demostrar que ninguna de las soluciones para x o para y es un natural*

Ejercicio 2: *Justificar que las soluciones para y de la ecuación $(n+y)y = n^2$, con n natural, no son naturales.*

Ejercicio 3: *Justificar que la ecuación siguiente no tiene soluciones naturales para x e y: $(x+2y)y = (x+y)^2$*

Sobre cortes que no son necesariamente solución del problema:

Ejercicio 4: *Se corta un cuadrado de $n \times n$ en cuatro regiones y se reacomodan como sugiere la figura 1 cubriendo casi exactamente un rectángulo de $(2n-x) \times (n-x)$ Determinar forma y tamaño de la región poligonal faltante o superpuesta.*

Sobre soluciones "engañosas":

Ejercicio 5: *¿Hay soluciones enteras positivas para n y x, con $x < n$, de la ecuación*

$$|(2n-x)(n-x) - n^2| = 1?$$

o para n e y de la ecuación

$$|(n+y)y - n^2| = 1$$

Ejercicio 6: *Justificar que si*

$$\begin{cases} f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \\ f_{k+3} = f_{k+2} + f_{k+1}, \end{cases}$$

entonces

$$f_{k+2}^2 - f_{k+1}f_{k+3} = -(f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2})$$

Ejercicio 7: *Demostrar por inducción, que si f_k es el término general de la sucesión de Fibonacci entonces $|f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2}| = 1$. Más concretamente, si $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$ entonces*

$$f_{k+1}^2 - f_k f_{k+2} = (-1)^{k+1}$$

Bibliografía

1 C.P. de Aranega y otros. "La técnica de resolución de problemas en la Enseñanza-Aprendizaje de la matemática.", Vol 3, No 3, 1988 pág. 41–61.

2 R.E.M. Vol 1, No. 2, 1982, pág. 73. Problema 13 propuesto por J. Vargas

3 R.E.M. Vol. 6 No. 2, 1991, pág. 26. Problema propuesto por E. Gentile.

4 E.P. Northrop Riddles in Mathematics,Penguin Books, 1967, pág. 54.

Universidad Nacional de Salta

Buenos Aires 177 - 4400, Salta