INTEGRALES COMPLEJAS Y SUMAS COMBINATORIAS

PAULO TIRAO*

Cada lector, según sus inquietudes y conociminetos, podrá aprovechar esta nota de manera particular.

Para algunos, las integrales complejas pueden parecer objetos demasiado abstractos, complicados y hasta inservibles. La relación y utilidad de éstas para evaluar explícitamente sumas combinatorias puede ser una buena razón para repasar, o estudiar por primera vez, las nociones básicas del análisis complejo. De todas formas incluimos en §2 un breve repaso sobre residuos.

Para aquellos ya familiarizados con el análisis complejo, restan algunas curiosas identidades combinatorias.

Sin embargo, para todos los lectores, quedará la posibilidad de encontrar y probar nuevas e interesantes identidades que involucren sumas con números combinatorios o números binomiales.

Describiremos un efectivo método para calcular este tipo de sumas. Una herramienta esencial es la integral de funciones de variable compleja. Los prerequisitos no son muy profundos: es necesario conocer las propiedades generales de la integral compleja y la definición y uso de los residuos.

Un punto interesante del método que describiremos es el hecho de utilizar análisis complejo para resolver problemas de combinatoria. De un lado los números complejos e infinitésimos, del otro los números enteros y objetos discretos.

Este fenómeno no es raro en matemática. Esperamos que esta nota sirva para ejemplificar como dos áreas, en principio distantes e independientes, se pueden relacionar y nutrir recíprocamente.

Por último debemos decir que un profundo y muy amplio desarrollo de este método se encuentra en el libro "Integral Representations and the Computation of Combinatorial Sums" de Egorychev G. ([E]). La mayoría de los ejemplos e identidades contenidas en esta nota han sido tomadas de este libro. Material extra sobre numeros combinatorios, sumas e identidades se puede encontrar en Gentile ([G]) (básico) y Knuth ([K]).

§1. Sumas Combinatorias

Sumas que involucran números combinatorios aparecen en diversas áreas de la matemática: combinatoria, matemática discreta, teoría de grafos, teoría de juegos, teoría de númeors, álgebra, etc.

*Becario posdoctoral, International Centre for Theoretical Physics, Trieste (Italia)

No estudiaremos aquí los problemas originales que dan lugar a tales sumas, nos concentraremos en como evaluar o calcular estas sumas.

Existen un sin número de identidades conocidas, algunas con nombre propio. Entre ellas los siguientes ejemplos[1]:

$$\text{(Hardy)} \qquad \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m-k}{k} \frac{1}{m-k} = \begin{cases} \frac{2(-1)^m}{m}, & m = 3n; \\ \frac{(-1)^{m-1}}{m}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{k}{m}(-1)^k = (-1)^r \delta_{mr}.$$

$$\text{(Hietale y Winter)} \qquad \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

$$\text{(Shoo)} \qquad \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 \binom{n+2m-k}{2m} = \binom{m+n}{n}^2.$$

$$\text{(teoría de grafos)} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{n-i-1}(n-i)^{i-1} = 2n^{n-2}.$$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (\alpha - k)^p = \begin{cases} 0, & 0 \le p < r; \\ r!, & p = r. \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbf{C})$$

Estas identidades han sido descubiertas y probadas a lo largo de mucho tiempo y usando muy diversos métodos, en general particulares para cada caso.

Una de las virtudes del método que describiremos es que permite, de alguna manera, unificar esta gran variedad de identidades.

Para no hacer demasiado larga y engorrosa esta exposición nos limitaremos a un pequeño número de identidades simples, pero interesantes.

Comencemos por algunas bien conocidas y fáciles de probar.

$$\textbf{(1.1)} \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n; \qquad\qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

Ejercicio 1.1. Probar la primera identidad en (1.1). [Ayuda: Considerar los coeficientes de $p(x) = (1+x)^n$. Luego considerar $p(1)$]

Ejercicio 1.2. Probar la segunda identidad en (1.1). [Ayuda: Modificar adecuadamente la ayuda del ejercicio precedente]

Listamos ahora varias sumas combinatorias, que intentaremos calcular.

[1] Como es usual, convenimos que: $\binom{n}{i} = 0$ para $i < 0$ y para $i > n$.

(1.3) $$P(p,q) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{p}{k}, \quad (p > q);$$

(1.4) $$Q(k,n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n};$$

(1.5) $$R(n) = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i};$$

(1.6) $$S(p,q,\alpha) = \sum_{i=0}^{p} \binom{\alpha - i}{q}, \quad (p \leq \alpha);$$

(1.7) $$T(r,s) = \sum_{k} \binom{r}{k} \binom{s}{k} k;$$

Antes de proseguir, el lector puede detenerse un momento a meditar sobre cada una de estas sumas y sobre como haría para calcularlas.

§2. Residuos (repaso)

En esta sección haremos un superficial e informal repaso sobre residuos, pensado sólo para aquellos con cierta familiaridad sobre funciones e integrales complejas.

Recomendamos al lector sin experiencia previa estudiar este material de algún libro de texto. A este efecto sugerimos los libros de Ahlfors ([A]), Churchill ([Ch]) y Conway ([C]).

Sea $f(z)$ una función meromorfa y supongamos que z_0 es un polo de $f(z)$. En un entorno de z_0 podemos escribir

(2.1) $$f(z) = \frac{a_k}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_1}{(z-z_0)} + g(z),$$

donde $g(z)$ es analítica (en ese entorno), $a_i \in \mathbf{C}$ y k es el *orden* del polo.

Sea γ un círculo con centro z_0 contenido en el entorno antes mencionado y *dando una sola vuelta en torno a* z_0. Denotaremos, de ahora en más, a una tal γ por $|z - z_0| = r$.

Ahora tenemos que

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-z_0|=r} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}\,dz + \cdots + \int_{|z-z_0|=r} \frac{a_1}{(z-z_0)}\,dz + \int_{|z-z_0|=r} g(z)\,dz.$$

Todos los sumandos son iguales a 0, salvo

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{a_1}{(z-z_0)} = (2\pi i) a_1.$$

Definición. El coeficiente a_1 es el residuo de $f(z)$ en $z = z_0$. Escribiremos $a_1 = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

Entonces vale

$$\boxed{\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = (2\pi i)\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)}$$

Ejemplo 2.1. Sea $f(z)$ meromorfa con un *polo simple* en $z = z_0$ ($k = 1$ en (2.1)). En este caso particular, multiplicando (2.1) por $(z - z_0)$ obtenemos

$$(z-z_0)f(z) = \frac{a_k}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_1 + (z-z_0)g(z);$$

entonces, es claro que

$$a_1 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Ejemplo 2.2. Sea $p(z)$ un polinomio. Si $p(z) = \alpha_n z^n + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=r} \frac{p(z)}{z^k}\,dz &= \sum_{i=0}^{n} \int_{|z|=r} \frac{\alpha_i z^i}{z^k}\,dz \\
&= \int_{|z|=r} \frac{\alpha_{k-1} z^{k-1}}{z^k}\,dz \\
&= (2\pi i)\alpha_{k-1}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\operatorname{res}_{z=0}\frac{p(z)}{z^k} = \alpha_{k-1} = \text{coeficiente de grado } k-1 \text{ de } p(z).}$$

§3. Representaciones integrales

La identidad básica de este método es la representación del número binomial $\binom{n}{i}$ por medio de una integral compleja.

$$\textbf{(3.1)} \qquad \binom{n}{i} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+z)^n}{z^{i+1}}\,dz.$$

Esta identidad se sigue claramente del Ejemplo 2.2.

Veamos que aspecto toma la suma $P(p,q)$ en (1.3) usando (3.1).

$$\begin{aligned}
P(p,q) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{p}{k} &= \sum_{k=0}^{q}(-1)^k \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+z)^p}{z^{k+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint\left(\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\frac{(1+z)^p}{z^{k+1}}\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+z)^p}{z}\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{-1}{z}\right)^k dz
\end{aligned}$$

$$\left[\text{sabemos que } \sum_{k=0}^{q}\left(\frac{-1}{z}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{-1}{z}\right)^{q+1}}{1+\frac{1}{z}} = \frac{(z^{q+1}+(-1)^q)z}{z^{q+1}(z+1)}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+z)^{p-1}(z^{q+1}+(-1)^q)}{z^{q+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint (1+z)^{p-1}\,dz + \oint \frac{(1+z)^{p-1}(-1)^q}{z^{q+1}}\,dz\right]
\end{aligned}$$

(la primera integral es igual a cero)

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^q}{2\pi i}\oint \frac{(1+z)^{p-1}}{z^{q+1}}\,dz \\
&= (-1)^q\binom{p-1}{q}
\end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\boxed{P(p,q) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{p}{k} = (-1)^q\binom{p-1}{q}}$$

Este ejemplo que hemos desarrollado exhaustivamente, pone en evidencia dos momentos fundamentales que permiten arrivar a buen puerto.

En primer lugar, luego de conmutar la suma con la integral, nos encontramos con una suma que sabemos sumar: una serie geométrica. Aquí ocurre parte del milagro. En segundo lugar, nos encontramos con una integral compleja que ahora sabemos calcular en parte: en este caso un sumando es cero.

Esta es la esencia del método que describimos. En otras situaciones, la aritmética puede ser más complicada. Como también sucede en general que la evaluación de alguna integral compleja sea más complicada; es en estos casos que el uso de los residuos puede ser de utilidad.

Cálculo de $Q(k,n)$.

$$\begin{aligned}
Q(k,n) &= \sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{n} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=o}^{k}\oint \frac{(1+z)^{n+i}}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+z)^n}{z^{n+1}}\sum_{i=0}^{k}(1+z)^i \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(1+z)^n(1-(1+z)^{k+1})}{z^{n+2}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint \frac{-(1+z)^n}{z^{n+2}}\,dz + \oint \frac{(1+z)^{n+k+1}}{z^{n+2}}\,dz\right] \\
&= \binom{n+k+1}{n+1}
\end{aligned}$$

El último paso se sigue por ser la primera integral nula; ¿por qué? Hemos probado que

$$\boxed{Q(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}}$$

Cálculo de $R(n)$.

$$\begin{aligned}
R(n) &= \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{\infty} i\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{1}\binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{(1+z)^i}{z^2}\, dz \times \oint \frac{(1+w)^n}{w^{i+1}}\, dw \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{(1+z)^i}{z^2} \frac{(1+w)^n}{w^{i+1}}\, dzdw \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{(1+w)^n}{z^2 w} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1+z}{w}\right)^i \right) dzdw
\end{aligned}$$

pero, $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1+z}{w}\right)^i = \frac{w}{w-(1+z)}$, si $|w| > |1+z|$;

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{|z|=1 \\ |w|=3}} \frac{(1+w)^n}{z^2(w-(1+z))}\, dwdz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \mathrm{res}_{w=1+z} \frac{(1+w)^n}{z^2(w-(1+z))}\, dz
\end{aligned}$$

(notar que el polo en $w = 1+z$ es simple)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(2+z)^n}{z^2}\, dz \\
&= \mathrm{res}_{z=0} \frac{(2+z)^n}{z^2} \\
&= n2^{n-1}.
\end{aligned}$$

El último residuo es el coeficiente de grado 1 de $(2+z)^n$. Para calcularlo directamente usamos la fórmula del binomio: $(2+z)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i z^{n-i}$, de donde se sigue que el coeficiente buscado se obtiene poniendo $i = n-1$.

Finalmente resulta que

$$\boxed{R(n) = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}}$$

Cálculo de $S(p, q, \alpha)$.

$$\begin{aligned}
S(p,q,\alpha) &= \sum_{i=0}^{p} \binom{\alpha - i}{q} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{p} \oint \frac{(1+z)^{\alpha-i}}{z^{q+1}}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^{\alpha}}{z^{q+1}} \left(\sum_{i=0}^{p} (1+z)^{-i} \right) dz
\end{aligned}$$

como $\sum_{i=0}^{p}(1+z)^{-i} = \frac{1-(1+z)^{-(p+1)}}{1-(1+z)^{-1}} = \frac{(1+z)^{p+1}-1}{(1+z)^{p}}$, resulta

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+z)^{\alpha}((1+z)^{p+1}-1)}{z^{q+2}(1+z)^{p}}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint \frac{(1+z)^{\alpha}(1+z)}{z^{q+2}}\, dz - \oint \frac{(1+z)^{\alpha-p}}{z^{q+2}}\, dz \right] \\
&= \binom{\alpha+1}{q+1} - \binom{\alpha-p}{q+1}
\end{aligned}$$

Concluimos, entonces, que

$$\boxed{S(p,q,\alpha) = \sum_{i=0}^{p} \binom{\alpha - i}{q} = \binom{\alpha+1}{q+1} - \binom{\alpha-p}{q+1}}$$

Cálculo de $T(r, s)$.
En este caso encontraremos nuevas dificultades que deberemos superar.

$$\begin{aligned}
T(r,s) &= \sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{k} k \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{k} k \oint \frac{(1+z)^{r}}{z^{k+1}}\, dz \times \oint \frac{(1+w)^{s}}{w^{k+1}}\, dw \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{(1+z)^{r}}{z} \frac{(1+w)^{s}}{w} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{zw}\right)^{k}
\end{aligned}$$

Aquí aparece la primera dificultad: la suma expresada no es un serie geométrica. Sin embargo la calcularemos de todos modos pues es casi la 'derivada' de una serie geométrica. Precisamente, si $f(v) = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i}$, entonces $f(v) = \frac{1}{1-v}$ para $|v| < 1$. Ahora bien, $vf'(v) = v\sum_{i=0}^{\infty} iv^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} iv^{i}$ y por otro lado $vf'(v) = v\left(\frac{1}{1-v}\right)' = \frac{v}{(1-v)^2}$. Es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} iv^{i} = \frac{v}{(1-v)^2}$. Continuamos,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|z|=2=|w|} \frac{(1+z)^{r}(1+w)^{s}}{(1-zw)^2}\, dz dw \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|w|=2} (1+w)^{s} \int_{|z|=2} \frac{(1+z)^{r}}{(1-zw)^2}\, dz\, dw
\end{aligned}$$

Aquí aparece la segunda dificultad. La integral interior que debemos evaluar es la integral de una función con un polo doble, lo que hace algo más complicado el cálculo del correspondiente residuo. Posponemos los detalles al punto (3.1.1). Continuamos (ver el resultado de (3.1.1)),

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2}(1+w)^s \operatorname{res}_{z=\frac{1}{w}} f(z)\,dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2}\frac{r(1+w)^{s+r-1}}{w^{r+1}}\,dw \\
&= r\binom{r+s-1}{r}
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\boxed{T(r,s)=\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}k = r\binom{r+s-1}{r}}
$$

(3.1.1) La función $f(z)=\frac{(1+z)^r}{(1-zw)^2}$ tiene un polo doble en $z=\frac{1}{w}$. Sabemos que podemos escribir (localmente)

$$
f(z)=\frac{b}{\left(z-\frac{1}{w}\right)^2}+\frac{a}{\left(z-\frac{1}{w}\right)}+g(z),
$$

donde $g(z)$ es una función analítica. Notemos que $\lim_{z\to\frac{1}{w}}\left(z-\frac{1}{w}\right)^2 f(z)=b$. Así podemos calcular b.

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{1}{w}}\left(z-\frac{1}{w}\right)^2 f(z) &= \lim_{z\to\frac{1}{w}}\frac{\left(z-\frac{1}{w}\right)^2(1+z)^r}{(1-zw)^2} \\
&= \lim_{z\to\frac{1}{w}}\frac{(1+z)^r}{w^2}=\frac{\left(1+\frac{1}{w}\right)^r}{w^2}.
\end{aligned}
$$

Ahora podemos calcular a mediante la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{z\to\frac{1}{w}}\left(z-\tfrac{1}{w}\right)\left[f(z)-\frac{b}{(z-\frac{1}{w})^2}\right] \\
&= \lim_{z\to\frac{1}{w}}\frac{(zw-1)}{w}\left[\frac{(1+z)^r}{(1-zw)^2}-\frac{(1+\frac{1}{w})^r}{(zw-1)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to\frac{1}{w}}\frac{(1+z)^r-(1+\frac{1}{w})^r}{w(zw-1)}
\end{aligned}
$$

(para calcular este último límite, usamos la regla de L'hopital)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to\frac{1}{w}}\frac{r(1+z)^{r-1}}{w^2}=\frac{r(1+\frac{1}{w})^{r-1}}{w^2} \\
&= \frac{r(1+w)^{r-1}}{w^{r+1}}.
\end{aligned}
$$

Hemos mostrado que $\operatorname{res}_{z=\frac{1}{w}} f(z) = \frac{r(1+w)^{r-1}}{w^{r+1}}$.

Nota. Los cálculos desarrollados es estos ejemplos han sido bastante directos. Este no será el caso para cualquier suma. En cada caso particular serán necesarias distintas manipulaciones aritméticas en distintas etapas.

Por otro lado pueden existir distintos caminos para resolver una suma dada, como también es posible arrivar a distintas expresiones del resultado.

De hecho, para los ejemplos desarrollados, existirán mejores soluciones que las que hemos dado nosotros.

En algunas ocasiones puede ser útil reescribir algunos de los números combinatorios presentes. Por ello incluimos en §5, como Apéndice, una lista de identidades para números binomiales.

Por último debemos decir que no se debe esperar resolver cualquier suma combinatoria mediante el sólo uso de este método.

§4. Ejercicios

Dejamos, para el lector interesado, algunos ejercicios que le servirán para probar y afianzar el método expuesto.

Ejercicio 4.1. Escribir la representación integral de cada una de las identidades en el Apéndice (salvo la primera). Observar que en esta nueva expresión, son también claras estas identidades.

Ejercicio 4.2. Proponemos aquí dos interesantes sumas muy similares entre sí. Guiaremos al lector en el cálculo de la primera de ellas. La segunda suma se puede evaluar en manera completamente análoga a como evaluaremos la primera.

Calcular las sumas:

$$p_n = \sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{n}{2j}; \qquad im_n = \sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{n}{2j+1}.$$

(1). Escribir la representación integral para p_n, observando que la suma se puede extender para $j = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

(2). Evaluar la suma geométrica que resulta luego de conmutar la integral con la suma.

(3). Escribir el integrando $f(z)$ como $f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^2}$ y observar que $1 + z^2 = (z+i)(z-i)$.

(4). Siendo i y $-i$ polos simples, calcular, como en el Ejemplo 2.1, los residuos de $f(z)$ en $z = i$ y en $z = -i$. COncluir que $p_n = \frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2}$.

(5). Escribir (en coordenadas polares) $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$ y $1 - i = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}$. (Un dibujo del plano complejo ayudará en lo que sigue.) Notar que $(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbf{R}$, $\forall n$. Concluir que

$$p_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{4}} 2^{\frac{n}{2}} & \text{if } n \equiv 0 \mod 4; \\ (-1)^{\frac{n-1}{4}} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \equiv 1 \mod 4; \\ 0 & \text{if } n \equiv 2 \mod 4; \\ (-1)^{\frac{n-3}{4}+1} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

[Ayuda: En una primera etapa calcular $|p_n|$, dejando así de lado al signo ± 1.]

(6). De manera análoga calcular im_n.

Ejercicio 4.3. Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k}; \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}, \quad m\geq 0,\ n\geq 0.$$

Ejercicio 4.4. Observar que $k^2 = 2\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$. Usando la segunda suma del ejercicio precedente calcular *la suma de los cuadrados*: $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Ejercicio 4.5. Calcular la suma:

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k}.$$

Ejercicio 4.6. Calcular la suma:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+i}{m}, \qquad \text{para } m\geq n.$$

§5. Apéndice

Todas las identidades que siguen son fáciles de verificar. A partir de ellas se pueden obtener muchas mas. El tenerlas presente al momento de enfrentar un problema como los descriptos en esta nota, puede ayudar a reescribir en parte o totalmente la expresión original. Podemos esperar que a partir de una nueva expresión seamos capaces de seguir adelante.

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!} \tag{5.1}$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \tag{5.2}$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} \tag{5.3}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m}{k}\binom{m-1}{k-1}, \quad (k\neq 0) \tag{5.4}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m}{m-k}\binom{m-1}{k}, \quad (k\neq m) \tag{5.5}$$

$$\binom{m}{k}\binom{r}{m} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k} \tag{5.6}$$

$$\binom{kp+q}{k}\frac{q}{kp+q} = \binom{kp+q}{k} - p\binom{kp+q-1}{k-1} \tag{5.7}$$

Referencias

[A] Ahlfors, L., *Análisis de una variable compleja; introducción a la teoría de funciones analíticas de una variable compleja*, Aguilar, Madrid.

[Ch] Churchill, R., *Variable compleja y sus aplicaciones*, 5 edición, McGraw-Hill, Madrid.

[C] Conway, J., *Functions of one complex variable*, GTM vol 11, Springer-Verlag, New York, 1978.

[E] Egorychev G., *Integral Representations and the Computation of Combinatorial Sums*, Translations of mathematical monographs 59, American Mathematical Society, 1984.

[G] Gentile, *Notas de algebra*, Eudeba, Buenos Aires.

[K] Knuth, D., *The art of computer programing*, vol 1, Addison-Wesley, 1973.