

# Engranajes y mejores aproximaciones racionales

Lucio R. Berrone

## Resumen

Motivado por la construcción de sistemas de ruedas dentadas con determinada relación de transmisión, se discute el problema de aproximar un número real  $\xi$  por una fracción racional  $P/Q$  de manera que el error de aproximación sea menor que el que resultaría de tomar cualquier otra fracción con denominador más pequeño.

## 1 Introducción

Desde los ciclómetros de Herón de Alejandría y de Vitruvio, pasando por las fantásticas máquinas que habitaban la desvelada imaginación de Leonardo, las ruedas dentadas desempeñan un rol especial entre los variados componentes de muchos mecanismos. En la actualidad, a dos siglos de la Revolución Industrial, estamos ya definitivamente acostumbrados al uso de aparatos mecánicos o electromecánicos que funcionan a base de engranajes. La caja de velocidades del automóvil, el reloj y el sistema que hace que un ventilador oscile, para poner unos pocos ejemplos, todos incorporan sistemas más o menos complejos de engranajes. A fuerza de encontrarlas con tanta frecuencia, nadie parece necesitar que le expliquen qué cosa son o cómo están construidas las ruedas dentadas. Sin embargo, adoptando la moral de Sganarelle, el 'Cornudo Imaginario' de Molière, diremos aquí que ([9], pág. 210)

*"...en este caso, la máxima apariencia puede dar al espíritu una creencia falsa. Acordaos bien de este ejemplo, y aunque lo veáis todo, no creáis nunca nada."*

En efecto, en el diseño y construcción de engranajes se presentan problemas de naturaleza tanto teórica como técnica que resultan nada triviales y a cuya solución se consagra, en las carreras de Ingeniería Mecánica, un grueso capítulo en materias como 'Elementos de Máquinas'. Al análisis de uno de esos problemas están dedicadas las líneas que siguen.

Consideremos, para empezar, un sistema de transmisión de movimiento esencialmente más sencillo que el engranaje: la rueda de fricción. En la figura 1 se muestran (las secciones de) dos ruedas de radios  $r$  y  $R$  que, con

punto de contacto en  $P$ , giran sin deslizamiento alrededor de los puntos  $O$  y  $O'$ , respectivamente.

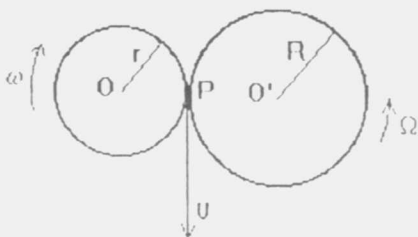


Figura 1

Llamemos  $\omega$  a la velocidad angular de la rueda más pequeña y  $\Omega$  a la correspondiente a la rueda mayor. La ausencia de deslizamiento provocada por la fricción da lugar a una relación sencilla entre  $\omega$  y  $\Omega$ . De hecho, en el punto de contacto  $P$ , la velocidad  $V$  de ambas ruedas deberá ser la misma; es decir,

$$\omega r = V = \Omega R,$$

de donde

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{R}{r}. \quad (1)$$

El cociente entre las velocidades angulares  $\omega$  y  $\Omega$  indica la *relación de transmisión* de movimiento entre dos ruedas de fricción y la igualdad (1) expresa la proporcionalidad inversa a los radios de las ruedas de estas velocidades. En la figura 2, las proyecciones de los dientes  $A$  y  $A'$  de dos engranajes (ruedas dentadas) que giran alrededor de los puntos  $O$  y  $O'$ , respectivamente, hacen contacto en el punto  $P$ . Según los engranajes van rotando, el punto de contacto  $P$  se desplaza sobre los perfiles de los dientes  $A$  y  $A'$  de manera que



Figura 2

las distancias  $r = OP$  y  $R = O'P$  no se mantienen constantes como ocurría con las ruedas de fricción. Es preciso, sin embargo, que la relación de transmisión entre las ruedas  $\omega/\Omega$  se conserve invariable (pensemos qué sucedería si los engranajes de la caja de velocidades de un automóvil no cumplieran esta condición). Además, el contacto entre los dientes debe realizarse de manera suave y sin choques. Es claro entonces que los perfiles de los dientes no pueden diseñarse de manera arbitraria y que este diseño puede llevarse a cabo solo una vez resueltos ciertos problemas mecánico-geométricos. En realidad, nuestro objetivo presente no es el de ocuparnos de esta clase de problemas por lo que remitimos al lector interesado a la bibliografía específica (véanse, por ejemplo, [5], [7], [14]). Nuestro interés inmediato será la forma que toma la relación de transmisión en el caso de los engranajes. Consideremos pues dos ruedas dentadas  $E$  y  $E'$  engranadas entre sí, y sean  $n_E$  y  $n_{E'}$ , respectivamente, el número de dientes en cada una de ellas. Cuando el engranaje  $E$  ha completado una revolución, el otro engranaje del par,  $E'$ , habrá girado  $n_E/n_{E'}$  vueltas. Así pues,  $[n_E, n_{E'}]$  es el mínimo número de vueltas que debe girar cualquiera de los engranajes  $E$  o  $E'$  de manera que también el otro complete un número entero de revoluciones (dados dos números enteros  $a$  y  $b$ , denotamos con  $(a, b)$  su *m.c.d.* y con  $[a, b]$  su *m.c.m.*) y, si  $E$  gira con velocidad angular  $\omega$ , entonces la velocidad angular  $\Omega$  de  $E'$  será  $\Omega = (n_E/n_{E'})\omega$ , o bien

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{n_{E'}}{n_E}, \quad (2)$$

igualdad que indica la proporcionalidad inversa de las velocidades angulares de las ruedas al número de dientes en cada una de ellas. Nótese que la relación de transmisión  $\omega/\Omega$  para un par de engranajes es siempre un número racional, a diferencia de lo que sucede con un par de ruedas de fricción, en donde esta relación puede, al menos en teoría, tomar cualquier valor real.

Volvamos por un momento a las ruedas de fricción. En la figura 3 se ilustran (las proyecciones de) dos sistemas de ruedas de fricción. Para sistemas de este tipo es siempre tarea sencilla calcular la relación neta de transmisión. Si  $\omega_i$  designa la velocidad angular de la rueda de radio  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , por ejemplo en el sistema  $A$ ), tenemos que

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 \omega_3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2} = \frac{R_3}{R_1}. \quad (3)$$

Vemos pues que un sistema integrado únicamente por dos ruedas de radios  $R_1$  y  $R_3$  tiene idéntica relación de transmisión que la del sistema  $A$ ) (solo

que los ejes de rotación están más apartados entre si en el sistema A) y, además, el sentido de rotación de  $R_1$  y  $R_3$  es el mismo, características estas que pudieran tener sus ventajas en el diseño de mecanismos).

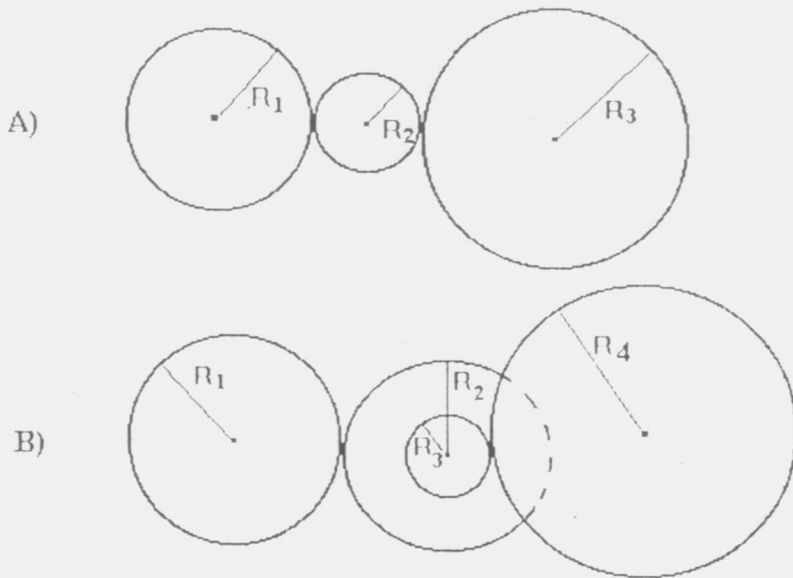


Figura 3

Para el caso descrito por la figura 3-B), en donde las ruedas de radios  $R_2$  y  $R_3$  giran solidariamente alrededor de un mismo eje, resulta

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\omega_2 \omega_3 \omega_4} = \frac{R_2}{R_1} \cdot 1 \cdot \frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \quad (4)$$

Si en lugar de sistemas compuestos por ruedas de fricción consideramos sistemas de engranajes esquemáticamente descritos por las mismas figuras, valdrían para la relación neta de transmisión igualdades similares a (3) y (4). De hecho, solo tendríamos que sustituir en estas identidades el radio  $R_i$  por el correspondiente número  $n_i$  de dientes de la rueda  $i$ . Por ejemplo, para un sistema de ruedas engranadas como en la figura 3-B), la identidad (4) tomaría la forma

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\omega_2 \omega_3 \omega_4} = \frac{n_2}{n_1} \cdot 1 \cdot \frac{n_4}{n_3} = \frac{n_2 n_4}{n_1 n_3} \quad (5)$$

Estamos finalmente en condiciones de dar idea del problema que concentrará nuestra atención en este trabajo. Supongamos que, utilizando engranajes, necesitamos construir un sistema con una determinada relación de

transmisión, la cual se expresa a través de la fracción irreducible  $M/N$ . Es obvio que dos ruedas dentadas con  $M$  y  $N$  dientes cada una, engranando entre sí bastarían para alcanzar esta relación. Puede ocurrir, sin embargo, que si  $M$  o  $N$  son números muy grandes, la construcción de engranajes que posean exactamente ese número de dientes escape a las posibilidades tecnológicas presentes (más aún, cabe imaginar un número tan grande que la construcción de un engranaje con tal número de dientes resulte jamás practicable!). También existen dificultades mecánicas nada despreciables: un engranaje con un número muy elevado de dientes perderá demasiada energía por fricción. Afortunadamente, a los fines prácticos puede uno conformarse con aproximaciones y fabricar, por ejemplo, dos engranajes de  $P$  y  $Q$  dientes (con  $P$  y  $Q$  sensiblemente menores que  $M$  y  $N$ ) de manera que la relación de transmisión  $P/Q$  resulte más o menos próxima a la deseada  $M/N$ . Enunciado de una manera un tanto vaga todavía, nuestro problema será pues el siguiente: *dada una fracción irreducible  $M/N$ , con  $M$  y  $N$  enteros muy grandes, construir sistemas de engranajes cuya relación de transmisión aproxime lo mejor posible a  $M/N$* . El sentido exacto de la frase 'aproxime lo mejor posible' se irá aclarando a medida que avancemos con nuestra exposición en las secciones subsiguientes.

## 2 El caso en que $M$ y $N$ son compuestos: una solución tecnológica

Cuando el numerador  $M$  y el denominador  $N$  de la relación de transmisión son números compuestos, es posible diseñar un sistema de engranajes con la misma relación neta de transmisión y cuyas ruedas tengan un número comparativamente menor de dientes. Supongamos, sin perder generalidad, que  $M$  y  $N$  pueden factorizarse en la forma

$$M = M_1 M_2 \cdots M_k, \quad N = N_1 N_2 \cdots N_k.$$

Entonces

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1 M_2 \cdots M_k}{N_1 N_2 \cdots N_k} = \frac{M_1}{N_1} \cdot \frac{M_2}{N_2} \cdots \frac{M_k}{N_k}, \quad (6)$$

de manera que el sistema integrado por una serie de  $2k$  ruedas engranadas cuyos respectivos números de dientes fueran  $N_1, M_1, N_2, M_2, \dots, N_k, M_k$  cumpliría con las condiciones señaladas. En la práctica, el uso de engranajes con

un número muy pequeño de dientes presenta dificultades mecánicas. Este inconveniente se soluciona reemplazando, si fuera necesario, en (6) la relación  $M_i/N_i$  por  $pM_i/(pN_i)$  con  $p$  un número natural pequeño. La relación  $2/3$  puede construirse como  $6/9$  ó  $10/15$ , por ejemplo.

Si bien el sistema construido según el procedimiento descrito posee exactamente la relación de transmisión deseada, esta solución del problema es en varios aspectos insatisfactoria. En primer lugar no es general: no se aplica al caso en que  $M$  o  $N$  sean primos. Sin llegar a este extremo, puede ocurrir que los factores primos de  $M$  y  $N$  sean ya tan grandes que sea imposible construir ruedas con ese número de dientes. De cualquier modo, he aquí un procedimiento que permite construir, en muchos casos, de manera *exacta* una relación de transmisión determinada. Si queremos ir más lejos se hará necesario efectuar aproximaciones.

### 3 Una solución ingenua: aproximación mediante una fracción con denominador prefijado

Supongamos que, siendo  $M$  y  $N$  enteros muy grandes, deseamos aproximar la relación de transmisión  $M/N$  mediante otra relación de la forma  $p/q$  donde  $q \ll N$  (la relación ' $x \ll y$ ' se lee ' $x$  mucho menor que  $y$ '; cuánto menor deba ser  $q$  viene aquí determinado de una manera tecnológica y significa que la construcción de un engranaje con  $q$  dientes es factible y mecánicamente aceptable). Es claro entonces que deberemos minimizar el error  $|M/N - p/q|$ , por cuanto el numerador  $p$  de la fracción  $p/q$  será solución del problema

$$\min_{p \in \mathbf{Z}} \left| \frac{M}{N} - \frac{p}{q} \right|,$$

que resulta equivalente, teniendo en cuenta que

$|M/N - p/q| = |Np - Mq|/(Nq)$  y  $M, N$  y  $q$  se han prefijado, a este otro

$$\min_{p \in \mathbf{Z}} |Np - Mq|. \quad (7)$$

Sobre la existencia de solución del problema (7) no puede haber dudas: el conjunto  $\{|Np - Mq| : p \in \mathbf{Z}\}$  es un conjunto (no vacío!) de enteros no negativos y tiene, por tanto, un primer elemento (buena ordenación del conjunto  $\mathbf{N}_0$ ). La solución efectiva se alcanza fácilmente utilizando el algoritmo

de la división. En efecto, existen únicos enteros  $a$  y  $r$  tales que  $0 \leq r < N$  y

$$Mq = Na + r. \quad (8)$$

De (8) obtenemos también

$$Mq = N(a + 1) - (N - r). \quad (9)$$

A veces se llama a (8) división por defecto y a (9) división por exceso (cfr. [10], [11]). Es así que eligiendo  $p = a$  o  $p = a + 1$  obtenemos

$$\begin{aligned} |Np - Mq| &= \begin{cases} |Na - Mq|, & p = a \\ |N(a + 1) - Mq|, & p = a + 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} r, & p = a \\ N - r, & p = a + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

y la solución  $p^*$  del problema (7) viene dada por

$$p^* = \begin{cases} a, & \text{si } \min\{r, N - r\} = r \\ a + 1, & \text{si } \min\{r, N - r\} = N - r \end{cases} \quad (10)$$

Dejamos al lector la sencilla prueba de esta afirmación. El error cometido en la aproximación de la relación  $M/N$  por  $p^*/q$  viene dado por

$$\left| \frac{M}{N} - \frac{p^*}{q} \right| = \frac{|Np^* - Mq|}{Nq} = \frac{\min\{r, N - r\}}{Nq} \leq \frac{1}{2q}. \quad (11)$$

Hemos desarrollado entonces un método consistente en la determinación de la mejor aproximación con denominador prefijado a la relación de transmisión dada. Veamos ahora una aplicación concreta. Deseamos aproximar la relación  $M/N = 77708431/2640858$  por una fracción con denominador  $q = 11$ . Obsérvese que  $M = 77708431$  es primo de manera que, como se desprende de lo expuesto en la sección anterior, es imposible realizar exactamente la relación  $M/N$  mediante un sistema de ruedas dentadas. Tenemos que

$$77708431 \cdot 11 = 854792741 = 2640858 \cdot 323 + 1795607$$

$$77708431 \cdot 11 = 854792741 = 2640858 \cdot 324 - 845251,$$

y utilizando (10) y (11), resulta la aproximación  $p^*/q = 324/11$  con error dado por

$$|77708431/2640858 - 324/11| = 76841/2640858 \cong 0,029097. \quad (12)$$

Si ahora buscamos la mejor aproximación con denominador  $q = 7$  a la misma relación, encontraremos  $p^* = 206$ , de modo que  $p^*/q = 206/7$  con error

$$|77708431/2640858 - 206/7| = \frac{57731}{18486006} = 0,003123. \quad (13)$$

Comparando (12) con (13), concluimos que el sistema de ruedas con menor número de dientes proporciona una mejor aproximación a la relación de transmisión deseada. Así pues, el método de prefiar el número de dientes de una de las ruedas no resulta adecuado por dos motivos: no proporciona, en general, la solución tecnológicamente más simple ni tampoco la más aproximada. No obstante, es posible salvar el inconveniente determinando, mediante el procedimiento anterior, las fracciones con denominador  $q, (q - 1), (q - 2), \dots, 1$  que aproximen mejor a la fracción dada, eligiendo luego aquella que realice el menor error de aproximación. Las dos secciones siguientes muestran que pueden alcanzarse resultados similares a través de un procedimiento más eficiente.

## 4 El planetario automático de Huygens

En el año 1682, Christian Huygens (1629-1695) construyó un planetario automático; esto es, un modelo a escala del sistema solar movido por un mecanismo de relojería. Sorprende la amplitud de intereses y recursos de los hombres de ciencia de aquel tiempo: Huygens, además de físico, matemático y astrónomo, era decididamente afecto a los mecanismos. Hoy es recordado tanto como autor de la Teoría ondulatoria de la luz y del primer libro sobre Teoría de Probabilidades ( "*De Ratiociniis in Aleae Ludo*", 1657) como constructor del primer reloj regulado por un péndulo. Por cierto, los capítulos primero y último de su obra más famosa, el "*Horologium Oscillatorium*" (1673) están dedicados a los relojes de péndulo. Continuando los estudios de Galileo, Huygens demuestra allí que un péndulo debe describir un arco de cicloide a fin de que sus oscilaciones resulten realmente isócronas, un hallazgo notable si se recuerda que el Cálculo y la Mecánica se hallaban, por entonces, ambos en etapa de formación.

El funcionamiento del planetario automático es descrito en una publicación póstuma, el libro "*Descriptio Automati Planetarii*", editado en La Haya en 1698. Un planetario posee un mecanismo esencialmente más sencillo que el del reloj pues no precisa de ningún sistema de escape: impulsado



por un muelle (i.e., funcionaba "a cuerda"), un sistema de ruedas dentadas confiere movimiento a los planetas. No obstante, tratándose de un modelo a escala del sistema solar, debía respetar las relaciones existentes entre los tiempos de revolución de cada uno de los planetas. En la época, estos tiempos de revolución se conocían ya con gran precisión. Por ejemplo, se sabía que en un año la tierra barre sobre la eclíptica un ángulo de  $359^{\circ} 45' 40'' 31'''$  mientras que el ángulo descrito por Saturno mide  $12^{\circ} 13' 34'' 18'''$ . Esto da una relación entre los respectivos períodos de revolución igual a

$$\frac{M}{N} = \frac{359 \cdot 60^3 + 45 \cdot 60^2 + 40 \cdot 60 + 31}{12 \cdot 60^3 + 13 \cdot 60^2 + 34 \cdot 60 + 18} = \frac{77708431}{2640858},$$

la relación de transmisión que hemos considerado en el ejemplo de la sección anterior. Desde luego, Huygens descartó la posibilidad de construir engranajes con tan elevado número de dientes y, a fin de conseguir para su planetario un par de ruedas con relación de transmisión próxima a  $M/N$ , Huygens aplicó el algoritmo de Euclides a los enteros  $M$  y  $N$ , obteniendo

$$\begin{array}{l} 77708431 = 2640858 \cdot 29 + 1123549 \quad , \quad 5946 = 4411 \cdot 1 + 1535 \\ 2640858 = 1123549 \cdot 2 + 393760 \quad , \quad 4411 = 1535 \cdot 2 + 1341 \\ 1123549 = 393760 \cdot 2 + 336029 \quad , \quad 1535 = 1341 \cdot 1 + 194 \\ 393760 = 336029 \cdot 1 + 57731 \quad , \quad 1341 = 194 \cdot 6 + 177 \\ 336029 = 57731 \cdot 5 + 47374 \quad , \quad 194 = 177 \cdot 1 + 17 \\ 57731 = 47374 \cdot 1 + 10357 \quad , \quad 177 = 17 \cdot 10 + 7 \\ 47374 = 10357 \cdot 4 + 5946 \quad , \quad 17 = 7 \cdot 2 + 3 \\ 10357 = 5946 \cdot 1 + 4411 \quad , \quad 7 = 3 \cdot 2 + 1 \end{array}$$

Estas igualdades pueden reescribirse convenientemente bajo la forma

$$\begin{aligned} \frac{77708431}{2640858} &= 29 + \frac{1}{\frac{2640858}{1123549}} \\ \frac{2640858}{1123549} &= 2 + \frac{1}{\frac{1123549}{393760}} \\ \frac{1123549}{393760} &= 2 + \frac{1}{\frac{393760}{336029}} \\ \frac{393760}{336029} &= 1 + \frac{1}{\frac{336029}{57731}} \\ &\vdots \\ \frac{7}{3} &= 2 + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

cuya combinación permite escribir

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} \quad (14)$$

Llegado a este punto, Huygens interrumpió el desarrollo (14) en el cuarto estadio, obteniendo así la fracción

$$29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{206}{7}.$$

Ya hemos visto que  $206/7$  aproxima a  $77708431/2640858$  mejor que  $324/11$ , una fracción con denominador más grande. Si hiciéramos los cálculos pertinentes, veríamos que  $206/7$  aproxima a  $77708431/2640858$  mejor que cualquier otra fracción con denominador no mayor que 7. Para comprender el por qué esto es así y para justificar el procedimiento de aproximación seguido por Huygens, precisamos exponer los elementos de la Teoría de fracciones continuas. A esta exposición básica está consagrada la sección que sigue.

## 5 Fracciones continuas y mejores aproximaciones racionales

Recordemos para empezar que si  $\xi$  es un número real y  $b > 1$  es entero, podemos identificar a  $\xi$  con la sucesión de enteros  $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$  tales que  $\xi_0, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots$  es la expansión en base  $b$  de  $\xi$ . Una vez excluidas las sucesiones que finalizan con una secuencia infinita de términos iguales a  $b - 1$ , la identificación se vuelve realmente buena, en el sentido de que la correspondencia  $\xi \longleftrightarrow \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$  es una biyección. Según hemos podido ver en la sección anterior, el algoritmo Euclideo aplicado a los enteros  $M = 77708431$  y  $N = 2640858$  también produce una secuencia (finita) de enteros, los sucesivos cocientes, que en aquel caso eran  $\{29, 2, 2, 1, 5, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 6, 10, 2\}$ . El procedimiento se generaliza a cualquier número real  $\xi$ , generándose una sucesión de enteros  $\alpha_n$  mediante

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = [x_n], n \geq 0 \\ x_0 = \xi \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1} + \frac{1}{x_n}, n \geq 1, \end{array} \right. \quad (15)$$

(para  $u$  real,  $[u]$  indica la 'parte entera' de  $u$ : el mayor entero no mayor que  $u$ ).

Obsérvese que si  $x_n$  es entero, entonces el algoritmo finaliza en el  $n$ -ésimo paso. De otro modo, la sucesión generada  $\{\alpha_n\}$  es infinita. Veamos un ejemplo. Para  $\xi = \sqrt{3}$ , tenemos  $\alpha_0 = [\sqrt{3}] = 1$  y  $\sqrt{3} = 1 + 1/x_1$ ; i.e.,  $x_1 = (\sqrt{3} - 1)^{-1} = (\sqrt{3} + 1)/2$  y así,  $\alpha_1 = [(\sqrt{3} + 1)/2] = 1$ . Continuando el algoritmo, resulta  $(\sqrt{3} + 1)/2 = 1 + 1/x_2$ , de donde  $x_2 = ((\sqrt{3} - 1)/2)^{-1} = \sqrt{3} + 1$  y  $\alpha_2 = [\sqrt{3} + 1] = 2$ . Aún otro paso proporciona  $\sqrt{3} + 1 = 2 + 1/x_3$  y por tanto,  $x_3 = (\sqrt{3} - 1)^{-1} = x_1$ ; vale decir, reencontramos  $x_1$ , por lo que nuestro algoritmo asocia a  $\sqrt{3}$  la sucesión infinita y periódica  $\{1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\}$ .

Es bien sabido que, cuando  $\xi$  es un número racional, la expansión en cualquier base  $b$  de  $\xi$  tiene la particularidad de que es finita o sus cifras empiezan a repetirse desde una en adelante. Por su parte, la sucesión  $\{\alpha_n\}$  dada por el algoritmo (15) resulta finita si  $\xi$  es racional. La prueba de esta afirmación establece una vinculación de (15) con el algoritmo Euclideo. Pongamos  $\xi = M/N$  con  $(M, N) = 1, N > 0$  y apliquemos el algoritmo de Euclides al par  $M, N$ . Definiendo  $y_0 = M$  e  $y_1 = N$ , se obtiene (habida cuenta de que  $(M, N) = 1$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = y_1 \cdot \alpha_0 + y_2 \\ y_1 = y_2 \cdot \alpha_1 + y_3 \\ \vdots \\ y_{m-3} = y_{m-2} \cdot \alpha_{m-3} + y_{m-1} \\ y_{m-2} = y_{m-1} \cdot \alpha_{m-2} + 1 \\ y_{m-1} = 1 \cdot \alpha_{m-1} \end{array} \right. , \quad (16)$$

con

$$y_1 > y_2 > \dots > y_m = 1. \quad (17)$$

Por lo tanto, puede escribirse

$$\frac{M}{N} = \frac{y_0}{y_1} = \alpha_0 + \frac{1}{\frac{y_1}{y_2}} = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\frac{y_2}{y_3}}} = \dots = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_{m-2} + \frac{1}{\alpha_{m-1}}}}. \quad (18)$$

Vemos pues que el algoritmo (15) coincide esencialmente con el algoritmo Euclideo en el caso en que  $\xi = M/N$  es racional. Las desigualdades (17) muestran que el proceso finaliza después de  $m \leq y_1 = N$  pasos y esto prueba que el algoritmo (15) asocia una secuencia finita de enteros con cada número racional. El último miembro de (18) muestra que, recíprocamente, a la sucesión finita de enteros  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}\}$  le corresponde un número racional, de manera que (15) asocia una sucesión infinita de enteros a cada irracional  $\xi$ .

Antes de establecer las propiedades del algoritmo (15) que nos interesan, convendrá establecer una terminología apropiada y efectuar algunas observaciones preliminares.

Mediante repetidas sustituciones, de (15) se obtiene

$$x_0 = \alpha_0 + \frac{1}{x_1} = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{x_2}} = \dots = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots}}}. \quad (19)$$

No será necesario para nosotros interpretar el último miembro de estas igualdades como un 'paso al límite', de modo que le asignaremos sólo un significado formal. Se trata del *desarrollo en fracción continua* de  $\xi$  y utilizaremos la notación  $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle$  para indicarlo. Nótese que, con la posible excepción de  $\alpha_0$ , los enteros  $\alpha_n$ , denominados *cocientes parciales* de la fracción continua, son en realidad naturales, es decir  $\alpha_n \geq 1$  si  $n \geq 1$ . En efecto, sea  $\alpha_n$ ,  $n \geq 1$ , un cociente parcial de  $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle$ . Si  $x_{n-1}$  fuera entero, entonces (15) muestra que la fracción continua finalizaría antes del  $n$ -ésimo cociente parcial  $\alpha_n$ , contra lo supuesto. Es así que  $x_{n-1}$  no es entero, en cuyo caso  $0 < x_{n-1} - [x_{n-1}] < 1$ . Según (15), vale entonces  $x_n = (x_{n-1} - [x_{n-1}])^{-1} > 1$  y por tanto,  $\alpha_n = [x_n] \geq 1$ .

Las sucesivas fracciones

$$\xi_0 = \langle \alpha_0 \rangle, \xi_1 = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle, \dots, \xi_n = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle, \dots$$

se denominan *convergentes* de la fracción continua  $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle$ . Una vez expresado fraccionariamente el  $n$ -ésimo convergente; es decir, poniendo

$\xi_n = \tilde{p}_n/\tilde{q}_n$  con  $(\tilde{p}_n, \tilde{q}_n) = 1$  y  $\tilde{q}_n > 0$ , puede encontrarse la ley seguida por los enteros  $\tilde{p}_n$  y  $\tilde{q}_n$ . Demostraremos que, ambas sucesiones satisfacen la misma ecuación:

$$z_n = \alpha_n z_{n-1} + z_{n-2}, \quad (20)$$

sólo que con distintas condiciones iniciales:

$$\begin{cases} p_{-2} = 0 & , & p_{-1} = 1 \\ q_{-2} = 1 & , & q_{-1} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Sea  $p_n, q_n$  la solución de (20) y (21). Primero observamos que, siendo  $x$  real positivo, se cumple

$$\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, x \rangle = \frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (22)$$

En efecto, en vista de (20) y (21) es  $p_0 = \alpha_0, q_0 = 1$ , de modo que  $\langle \alpha_0, x \rangle = \alpha_0 + 1/x = (x\alpha_0 + 1)/x = (xp_0 + p_{-1})/(xq_0 + q_{-1})$  y (22) es cierta cuando  $n = 1$ . Teniendo además en cuenta que  $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x \rangle = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n + 1/x \rangle$  y suponiendo que (22) vale para  $n - 1$ , resulta

$$\begin{aligned} \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n + 1/x \rangle &= \frac{p_{n-1}(\alpha_n + 1/x) + p_{n-2}}{q_{n-1}(\alpha_n + 1/x) + q_{n-2}} \\ &= \frac{x(\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}}, \end{aligned}$$

lo que prueba inductivamente la identidad (22). Como ya se ha visto, si  $n = 0$  es  $p_0 = \alpha_0, q_0 = 1$  y así,  $\xi_0 = \langle \alpha_0 \rangle = \alpha_0 = p_0/q_0$ . En general, haciendo  $x = \alpha_n$  en (22) obtenemos

$$\begin{aligned} \xi_n = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle &= \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} \alpha_n + q_{n-2}} \\ &= \frac{p_n}{q_n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\tilde{p}_n/\tilde{q}_n = p_n/q_n$ , para todo  $n \geq 0$ .

Conviene observar que la sucesión  $\{q_n\}$  es creciente y positiva:

$$q_{n-1} < q_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Este hecho se deduce directamente de (20) y (21), recordando que  $\alpha_n \geq 1$  para  $n \geq 1$ . Por otra parte, utilizando (20) y (21) pueden probarse por inducción las importantes relaciones

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (23)$$

y

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n \alpha_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (24)$$

La primera de ellas muestra que  $(p_n, q_n) = 1$  (por qué?); esto es, que la fracción  $p_n/q_n$  es irreducible, luego  $p_n = \tilde{p}_n$  y  $q_n = \tilde{q}_n$ .

Ahora escribimos (23) y (24) como

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (25)$$

y

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n \alpha_n}{q_n q_{n-2}}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (26)$$

estas relaciones muestran que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}$$

y que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} > \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}}, \quad \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}.$$

De aquí que *la sucesión de los convergentes de orden par es creciente mientras que la de los de orden impar es decreciente. Más aún, los convergentes de orden par están todos a la izquierda de cualquier convergente de orden impar* (por qué?). Resumiendo, tiene lugar la siguiente cadena de desigualdades

$$\xi_0 < \xi_2 < \xi_4 < \cdots < \xi_{2j} < \cdots < \xi_{2k-1} < \cdots < \xi_5 < \xi_3 < \xi_1.$$

Estamos ahora en situación de abordar la cuestión central. Ocupémonos para ello del error  $|\xi_n - \xi|$  cometido al sustituir el número  $\xi$  por el  $n$ -ésimo convergente de su desarrollo en fracción continua. Las identidades (22) y (23) nos permiten escribir, para cada  $n \in \mathbf{N}_0$ ,

$$\xi_n - \xi = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle - \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x_{n+1} \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_n}{q_n} - \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} \\
&= \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})},
\end{aligned}$$

de manera que

$$|\xi_n - \xi| = \frac{1}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}, \quad n \in \mathbf{N}_0. \quad (27)$$

Como consecuencia de la expresión del error de aproximación dada por (27), vemos que  $|\xi_n - \xi|$  puede acotarse de la siguiente manera

$$|\xi_n - \xi| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}, \quad (28)$$

para lo cual se ha tenido en cuenta que  $x_{n+1} \geq [x_{n+1}] = \alpha_{n+1}$  si  $n \geq 0$  junto con la ley de recurrencia (20). Más importante es todavía la observación de que la sucesión de errores  $\{|\xi_n - \xi|\}$  es decreciente. En efecto, la desigualdad  $|\xi_n - \xi| < |\xi_{n-1} - \xi|$  es, por (27), equivalente a la siguiente

$$q_{n-1}(x_n q_{n-1} + q_{n-2}) < q_n(x_{n+1} q_n + q_{n-1}),$$

la cual, recordando que  $x_n = \alpha_n + 1/x_{n+1}$ , es a su vez equivalente a

$$q_{n-1} \left( \left( \alpha_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2} \right) < q_n(x_{n+1} q_n + q_{n-1}).$$

Teniendo en cuenta la ley de recurrencia (20), esta última puede escribirse en la forma

$$q_{n-1} \left( q_n + \frac{q_{n-1}}{x_{n+1}} \right) < q_n(x_{n+1} q_n + q_{n-1})$$

o, de manera simplificada,

$$q_{n-1}^2 < x_{n+1}^2 q_n^2.$$

Esta última desigualdad es obvia de dos hechos ya apuntados:  $0 < q_{n-1} < q_n$  y  $x_n \geq 1$  si  $n \geq 1$ .

Consideremos ahora una fracción irreducible  $P/Q$  que aproxime al número  $\xi$  mejor que el  $n$ -ésimo convergente  $\xi_n$ ; es decir, tal que  $|P/Q - \xi| < |\xi_n - \xi|$ . De la discusión previa se sigue que la situación es justamente la ilustrada por la figura 4, donde se distinguen, como corresponde, los casos en que  $n$  es par o impar.

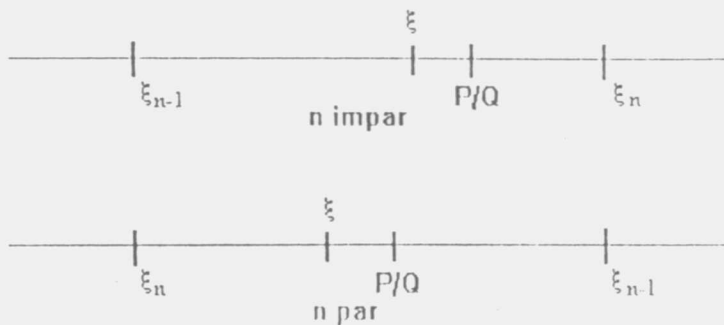


Figura 4

Puesto que  $|\xi_{n-1} - \xi| > |\xi_n - \xi|$ , se concluye que

$$\xi_n < P/Q < \xi_{n-1} \text{ o } \xi_{n-1} < P/Q < \xi_n \quad (29)$$

según sea  $n$  par o impar. Así, usando la identidad (25), resulta

$$\left| \frac{P}{Q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \left| \frac{P}{Q} - \xi_{n-1} \right| < |\xi_n - \xi_{n-1}| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}, \quad (30)$$

pero  $|P/Q - p_{n-1}/q_{n-1}| \neq 0$  (por qué?) y por tanto,

$$\left| \frac{P}{Q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \geq \frac{1}{Q q_{n-1}}. \quad (31)$$

Combinando las desigualdades (30) y (31), obtenemos

$$\frac{1}{Q q_{n-1}} < \frac{1}{q_n q_{n-1}},$$

o bien

$$Q > q_n. \quad (32)$$

Si  $\xi > 0$ , también vale la desigualdad

$$P > p_n$$



se demuestra similarmente. Hemos probado así la propiedad de los convergentes que usó Huygens para la construcción de los engranajes de su planetario: el  $n$ -ésimo convergente  $\xi_n = p_n/q_n$  de  $\xi \in \mathbf{R}$  está más próximo a  $\xi$  que cualquier otra fracción con denominador no mayor que  $q_n$ . Es importante observar que en ningún momento hemos supuesto que  $\xi$  fuera racional. Señalemos, a este respecto, que las aproximaciones racionales de  $\pi = \langle 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots \rangle$  que han sido obtenidas a lo largo de los siglos, coinciden muchas veces con los primeros convergentes de su desarrollo en fracción continua. Así sucede, por ejemplo, con  $22/7$ , el segundo convergente calculado por Arquímedes, y con  $355/113$ , el cuarto ya conocido por el astrónomo chino Tsu Ch'ung-Chih en el siglo quinto de nuestra era (cfr. [1], pág. 7 y ss.).

Con el objeto de recordar los resultados que más nos interesan entre los alcanzados precedentemente, finalizamos esta sección enunciando el siguiente teorema.

**Theorem 1** *Sea  $\xi \in \mathbf{R}$  y  $\xi_n = p_n/q_n$ , con  $(p_n, q_n) = 1$  y  $q_n > 0$ , el  $n$ -ésimo convergente del desarrollo de  $\xi$  en fracción continua; entonces  $|\xi_n - \xi| < 1/q_n q_{n+1}$ . Más aún, si  $P/Q$  es un número racional, con  $Q > 0$ , que satisfice  $|P/Q - \xi| < |p_n/q_n - \xi|$  para algún  $n$ , entonces  $Q > q_n$ .*

## 6 Notas finales

Huygens no parece haber dado demostración de la propiedad de mejor aproximación de los convergentes del desarrollo en fracción continua que usó en la construcción de su planetario. Desde luego, ello es acorde con el estándar de rigor de la Matemática de la época y en modo alguno supone que Huygens no dispusiera de una justificación de su método. En cuanto a la originalidad del procedimiento utilizado por Huygens, citamos a H. Wieleitner ([15]):

*“El fraccionamiento de una fracción constituida por números enteros en fracciones aproximadas utilizando la división consecutiva de Euclides había sido muy empleado por los calculistas, según Schwenter, que así lo afirma en su ‘Geometría Práctica’ en dos tratados publicados en 1627.”*

Podrán encontrarse noticias sobre D. Schwenter (1585-1636) y su obra en [1] (especialmente en la pág. 70), así como también una inmensa masa

de información, no siempre adecuadamente organizada, sobre la historia de las fracciones continuas. La prueba del Teorema 1 que hemos dado en la sección anterior se apoya en el carácter decreciente del error de aproximación de los sucesivos convergentes (cfr. [8], [10], [11]) y aparece ya en cursos de Álgebra del siglo pasado como [13]. En obras más modernas (cfr. [3] y [4], por ejemplo) la propiedad de mejor aproximación de los convergentes se deduce de la siguiente: si  $P/Q$  es un número racional tal que  $|P - Q\xi| < |p_n - q_n\xi|$ , entonces  $Q \geq q_{n+1}$ . Hemos podido rastrear la demostración de esta propiedad más fuerte de los convergentes hasta la '*Théorie des Nombres*' de Legendre ([2], pág. 23).

Han sido propuestos otros métodos distintos del estudiado para resolver el problema de construcción de engranajes que venimos considerando. Tal el expuesto en 1862 por Achille Brocot, constructor de relojes, en su libro '*Calcul des rouages par approximation*' (cfr. [1], pág. 153), quien utiliza con este propósito propiedades relacionadas con las fracciones de Farey ([4]) (la teoría de estas fracciones da solución a otros interesantes problemas relacionados con las mejores aproximaciones racionales). En [14], pág. 1212, se indica un procedimiento alternativo consistente en determinar una relación de transmisión  $x/y$  cercana a la deseada  $\alpha/\beta$  de tal manera que el numerador  $\beta x - \alpha y$  de la diferencia  $x/y - \alpha/\beta$  resulte pequeño comparado con el denominador  $\beta y$ ; es decir,

$$\frac{x}{y} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\beta y},$$

con  $\delta$  pequeño. Esto conduce a la ecuación diofantina más simple:

$$\beta x - \alpha y = \delta,$$

cuya solución nuevamente se relaciona con el desarrollo en fracción continua de  $\alpha/\beta$  (cfr. [4], [10]). Finalmente, una solución de naturaleza tecnológica la ofrecen los *engranajes diferenciales* ([14]), sistemas más complejos de engranajes así llamados porque permiten obtener una relación de transmisión neta que es 'diferencia' entre otras dos.

La búsqueda de una mayor precisión en los relojes mecánicos fue, en buena parte, responsable de las mejoras introducidas en la fabricación de ruedas dentadas. La obra [6] contiene información sobre las innovaciones que C. Huygens introdujo en la construcción de relojes. Una breve noticia sobre la vida de este sabio proporciona W. W. Rouse Ball en [12], quien nos informa que '*his life was uneventful, and there is little more to record in*

*it than a statement of his various memoirs and reserches*'. Probablemente, Rouse Ball quiso significar con ello que la vida de Huygens estuvo desprovista de 'catástrofes', pues no podría tacharse de descolorida la vida de quien fuera distinguido, como lo fue nuestro autor en el año 1665, con una pensión otorgada por el Rey Sol, Luis XIV. La pensión tenía como condición que Huygens se trasladara desde su residencia en La Haya para vivir en París, quien así lo hizo convirtiendo a esta ciudad en su lugar de residencia hasta 1681, año en que regresó a Holanda (debido a la creciente intolerancia de los católicos hacia quienes, como Huygens, eran de confesión protestante). El interés de Huygens por los relojes puede fijarse en este período parisino de su vida (el '*Horologium Oscillatorium*' fue publicado en París). Su planetario automático es construido poco después de su regreso a Holanda, de modo que cabe suponer que sus primeras ideas relativas a este mecanismo aparecieran durante los años transcurridos en París. En 1665, Jean Baptiste Poquelin, Molière, obtiene, al igual que Huygens, el favor de Luis XIV. En agosto de aquel año, la compañía de teatro de Molière es nombrada "Compañía del rey" con una pensión de 6.000 libras anuales (cfr. [9]). No parece pues improbable que, haciendo un intervalo entre sus reflexiones, Huygens asistiera a algún estreno de Molière en Versalles. Quizá, esta observación hiciera que parezca menos gratuito el párrafo que de este último autor hemos citado en la Introducción.

**Agradecimientos:** Expreso mi agradecimiento a Carlos D. Galles, quien leyó una versión preliminar del trabajo contribuyendo con interesantes comentarios.

## References

- [1] C. Brezinski, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer, Berlin, (1991).
- [2] A. M. Legendre, *Théorie des Nombres*, A. Blanchard, Paris, (1955).
- [3] I. Niven, *Irrational Numbers*, Carus Math. Monographs N. 11, Math. Asoc. of America, New Jersey, (1956).
- [4] I. Niven, H. S. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*, Limusa-Wiley, México, (1969).

- [5] V. Levy Doughtie, W. H. James, *Elementos de Mecanismos*, Compañía Editorial Continental, México, (1962).
- [6] A. Payson Usher, *Historia de las Invenciones Mecánicas*, Fondo de Cultura Económica, México, (1941).
- [7] P. A. Pezzano, A. Klein, *Engranajes y Poleas*, Fondo de Cultura Técnico-Industrial, Buenos Aires, (1945).
- [8] S. Pincherle, *Analisi Algebrica*, U. Hoepli, Milano, 4ta. Ed., (1923), (1ra. Ed., (1917)).
- [9] J. B. Poquelin, Molière, *Sganarelle o el cornudo imaginario*, en *Obras Completas* (trad. de J. Gómez de la Serna), Aguilar, Madrid, (1961).
- [10] J. Rey Pastor, *Elementos de Análisis Algebraico*, 5ta. Ed. del Autor, Buenos Aires, (1959).
- [11] J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo, *Análisis Matemático*, Vol. I, Kapelusz, Buenos Aires, (1969).
- [12] W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, Macmillan, London, (1935).
- [13] J. A. Serret, *Cours d 'Algèbre Supérieure*, Tomo I, Gauthier-Villars, 4ta. Ed., Paris, (1877), (1ra. Ed., (1866)).
- [14] H. Sonnet, *Dictionnaire des Mathématiques Appliquées*, Hachette, Paris, 2da. Ed., (1874).
- [15] H. Wieleitner, *Historia de la Matemática*, Labor, Barcelona, (1928).

CONICET, Departamento de Matemática.  
 Fac. de Cs. Exactas e Ing., UNR.  
 Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario