# Construcción del pentágono regular con sólo compás

*Antonio Sángari - Cristina Egüez*

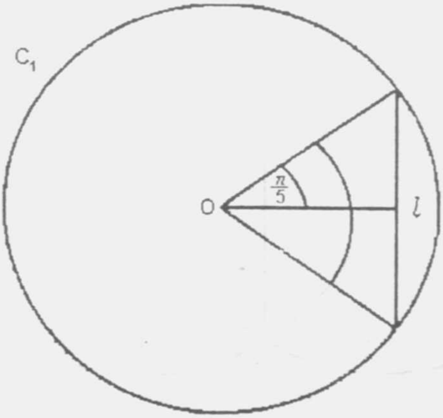
**Abstract**

Se pretende desarrollar un ejemplo instructivo de construcciones con compás solamente. No se requieren conocimientos de geometría muy sofisticados, salvo, a lo sumo, idea de trigonometría. Este artículo puede ser disfrutado por alumnos de la escuela media actual.

## 1 El pentágono regular

Dada una circunferencia $C_1$ de radio unidad y de centro conocido $O$, dividirla en 5 partes iguales (i.e encontrar los vértices de un pentágono regular inscrito en dicha circunferencia).

Para determinar los vértices del pentágono regular sobre la circunferencia necesitamos construir la medida del lado, que como se observa en la figura siguiente es $l = 2\sin\frac{\pi}{5}$




Como ya se indicó, se pretende usar solamente un compás para este cometido.

## 2 Subproblemas

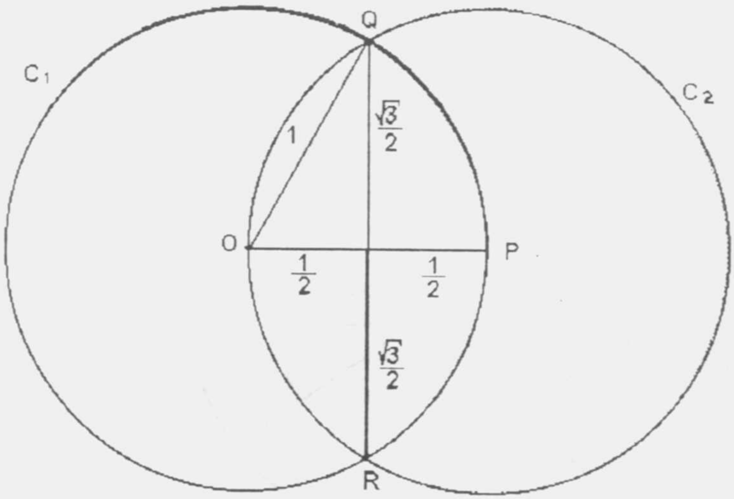
Para encontrar la medida de $l = 2\sin\frac{\pi}{5}$ necesitamos

1. Encontrar la medida $\sqrt{3}$
2. Encontrar la medida $\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. Encontrar la medida $\sqrt{2}$
4. Encontrar la medida $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ y construir $2sen\frac{\pi}{5}$

Realizaremos paso a paso las construcciones hasta lograr nuestro objetivo

### 2.1 $\sqrt{3}$.

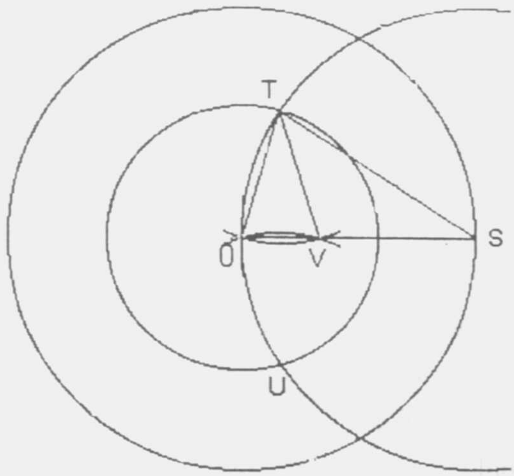
Haciendo centro en cualquier punto $P$ de $C_1$, trazar otra circunferencia también unitaria, esta intersecta a $C_1$ en los puntos $Q$ y $R$. El segmento $QR$ tiene medida $\sqrt{3}$



## 2.2 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Trazar una circunferencia con centro en $O$, de radio $\sqrt{3}$. Tomar un punto $S$ sobre esta última circunferencia. Haciendo centro en $S$ trazar una circunferencia de radio $\sqrt{3}$, esta intersecta a $C_1$ en los puntos $T$ y $U$. Trazar circunferencias unitarias con centro en los puntos $T$ y $U$. Sea $V$ el segundo punto de intersección de estas dos últimas circunferencias. El segmento $OV$ es de medida $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Esta última afirmación se justifica considerando los triángulos semejantes $OTS$ y $OTV$, son semejantes pues son isósceles y tienen un ángulo de la base en común.

$$\begin{aligned} \frac{OT}{VO} &= \frac{TS}{OT} \\ \frac{1}{VO} &= \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow VO = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

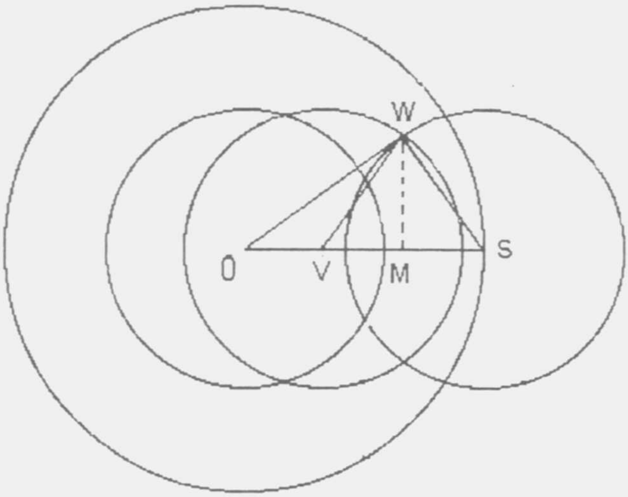



## 2.3 $\sqrt{2}$.

Hacer centro en los puntos $V$ y $S$ de la sección 2.2 y trazar dos circunferencias unitarias, éstas se intersectan en el punto $W$. La distancia $OW$ es $\sqrt{2}$. Esto se justifica de la siguiente manera: Marcar el punto medio $M$ del segmento $VS$.

Es claro que la distancia $MS$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y que la distancia $OM$ es $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Aplicando Pitágoras queda

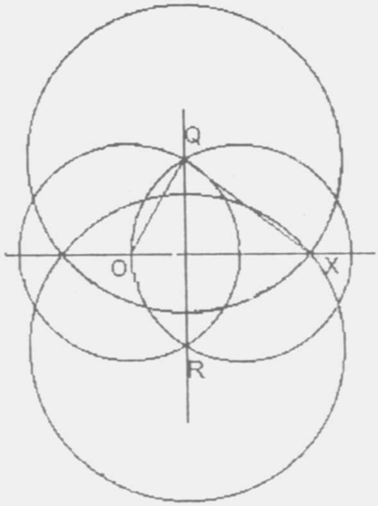
$$\begin{aligned} OW^2 - OM^2 &= WS^2 - MS^2 \\ OW^2 - \frac{4}{3} &= 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow OW = \sqrt{2} \end{aligned}$$




**2.4** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Hacer centro en los puntos $Q$ y $R$. de la sección 2.1 y trazar dos circunferencias de radio $\sqrt{2}$. Sea $X$ el punto de intersección de estas dos últimas circunferencias más alejado de $O$. $X$ está en la semirrecta $\underline{OP}$ por un razonamiento sobre mediatrices. Por tanto $Q\hat{o}X$ mide $\pi/3$ radianes. La distancia $OX$ es $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Esto se justifica usando el teorema del coseno

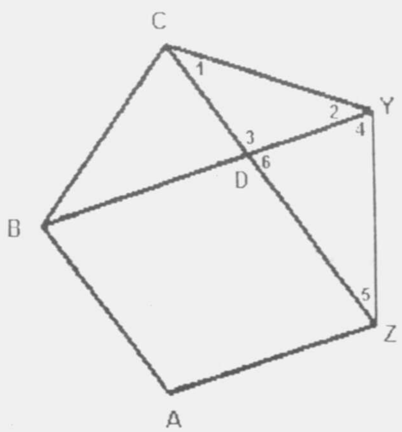
$$\begin{aligned} QX^2 &= OQ^2 + OX^2 - 2OQ \cdot OX \cos\frac{\pi}{3} \\ \sqrt{2}^2 &= 1^2 + OX^2 - 2OX\frac{1}{2} \Rightarrow OX = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$




# 3 Lado del Pentágono

## 3.1 $l = 2\sin\frac{\pi}{5}$.

Hacer centro en el punto $X$ de la sección 2.4 y trazar una circunferencia unitaria, esta se intersecta a $C_1$ en los puntos $Y$ y $Z$. La distancia $YZ$ es $2\sin\frac{\pi}{5}$, es decir, el lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia $C_1$. Esto se justifica observando que $OX = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es igual a $2\cos\frac{\pi}{5}$. Vamos a deducir esta igualdad del modo siguiente:



En la figura del pentágono regular que precede, notemos que se cumplen las siguientes:

a) los ángulos $1, 2$ y $5$ son congruentes, por ser los ángulos que forman la diagonal adyacente con el lado y el pentágono regular.

b) la suma de los ángulos 2 y 4 es $\frac{3\pi}{5}$ pues es el ángulo interior del pentágono regular en $Y$.

Por lo tanto concluimos que

1. los triángulos $CYD$ y $CYZ$ son semejantes por a).
2. el ángulo 3 es $\frac{3\pi}{5}$ por b) y por la conclusión(1).
3. de la conclusión (2) y de a) se llega a que los ángulos 1 y 2 son iguales a $\frac{\pi}{5}$.
4. el ángulo 6 es adyacente al ángulo 3, por lo que su medida es $\frac{2\pi}{5}$.
5. por b) y por la conclusión (3) se llega a que el ángulo 4 tiene medida $\frac{2\pi}{5}$.
6. por las conclusiones (4) y (5) se llega a que el triángulo $YZD$ es isósceles (i.e. los segmentos $YZ$ y $ZD$ son congruentes)

Llamemos a la longitud de los lados $l$ y a la longitud de la diagonal $d$. Por la semejanza de los triángulos $CYD$ y $CYZ$ y debido a que $ZD = l$, tenemos que

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \tag{1}$$

haciendo $x = \frac{d}{l}$ nos queda que (1) se transforma en

$$x = \frac{1}{x-1}$$

que resolviendo nos queda $\frac{d}{l} = x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \phi$[1].

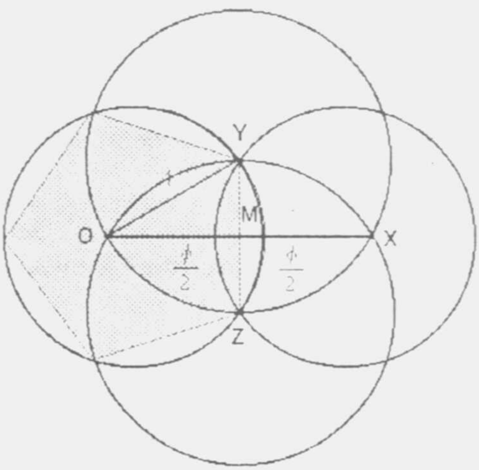
Para ver que $\phi$ es igual a $2\cos\frac{\pi}{5}$ se aplica el teorema del coseno, por ejemplo, al triángulo $YZB$

$$l^2 = 2d^2 - 2d^2\cos\frac{\pi}{5} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{l^2}{2d^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} = \frac{\phi}{2} \Rightarrow \phi = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

Ahora, ¿por qué la longitud del lado $YZ$ es igual a $2\sin\frac{\pi}{5}$?. Justificaremos esta igualdad como sigue: Por construcción tenemos que $OYXZ$ es un rombo de lado unidad. Teniendo en cuenta que las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio $M$, la longitud de $OM$ es igual a la mitad de la longitud de $OX$, o sea, $\cos\frac{\pi}{5}$. Por ser $OY$ el radio de $C_1$, la longitud de $YM$ es igual a $\sin\frac{\pi}{5}$. Como $M$ es el punto medio de $YZ$, concluimos que la longitud de $YZ$ es $2\sin\frac{\pi}{5}$

Por último,

## 3.2 Nuestro objetivo a la vista




Universidad Nacional de Salta.

[1]A esta última cantidad se la llama número de oro.