

# La Computadora en la Enseñanza de un Primer Curso de Algebra Lineal en una Facultad de Ingeniería Química

*Campanella, E. (\*); Cerati, E.; Macías, R.(†); Marqués, D.(\*); Schwer, I.*

## 1. INTRODUCCION

La gran difusión del uso de las computadoras personales pone a disposición de los profesionales una abundante variedad de herramientas computacionales, las que permiten realizar cálculos y/o análisis de una complejidad impensable previamente. Cuando el manejo de esas herramientas se introduce en el currículo, los estudiantes, además de ver facilitados esos cálculos, son expuestos a su creciente complejidad. Por otra parte, se plantea el interrogante de si su uso facilitará el entendimiento, aprendizaje y descubrimiento de principios matemáticos, químicos y/o ingenieriles.

El propósito de este trabajo es analizar esas cuestiones en el caso de la materia Matemática Básica, dictada en la Facultad de Ingeniería Química (FIQ) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) durante el primer semestre de 1998. Se considera ésta una ocasión especialmente favorable, ya que recientes reformas realizadas por la UNL han establecido solo dos modalidades para el primer curso de matemática de todas las carreras de esta universidad. En el caso de la FIQ, esto significó el dictado de una asignatura conjunta para los alumnos ingresantes de las seis carreras que se cursan: Ingeniería en Alimentos (IA), Ingeniería Industrial(II), Ingeniería Química (IQ), Licenciatura en Matemática (LMA), Licenciatura en Química (LQ) y Técnico Universitario Asistente Gerencial (TUAG). El equipo docente de esta asignatura estuvo integrado por los autores de este trabajo, a cargo de las clases teórico-prácticas y supervisión de las clases de laboratorio, y por los auxiliares de docencia: Jorge D'Elía, Adriana Frausin, Egle Haye, Ana Kanashiro y Marcela Porta; encargados de las prácticas en computadora.

El trabajo presenta en el punto 2 una descripción somera del curso. En el

item 3 se analizan encuestas que recogen la opinión de estudiantes y docentes, como también las principales estadísticas de aprobación del primer cuatrimestre de 1998. En el punto 4 se exponen las conclusiones obtenidas. Finalmente, tres apéndices ilustran el desarrollo del trabajo, incluyendo: una guía de trabajos prácticos y un modelo de informe, en el Apéndice A; resúmenes de las encuestas realizadas, en el Apéndice B y ejemplos de ejercicios que se realizan usando el MATLAB, en el Apéndice C.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL CURSO

El dictado se extendió durante 15 semanas, con una carga horaria semanal de 6 horas distribuidas en cuatro horas de clases teórico-prácticas y 2 horas de laboratorio. Las clases teórico-prácticas fueron de tipo expositivo, con activa participación de los estudiantes, incluyendo resolución de problemas. Las clases de laboratorio se desarrollaron en gabinetes de computación, utilizando MATLAB en la resolución de ejercicios pautados en guías que contenían problemas del libro adoptado en el dictado de las clases teórico-prácticas. Esta forma de dictado es diferente de la empleada en años anteriores, que consistía en el desarrollo de clases de teoría y clases de resolución de problemas. El material desarrollado corresponde a un curso introductorio de Algebra Lineal, abarcando además algunos puntos de funciones. En la Tabla 1 se presentan las horas dedicadas a cada tema y la bibliografía empleada. El total de alumnos inscriptos fue de 402, pero la cantidad que se debe tener en cuenta es la de los alumnos que al menos comenzaron el cursado, esto es 280, o la de los que regularizaron la materia, 260. La distribución por carreras puede verse en la Tabla 3.

Tabla 1 - Temas desarrollados en Matemática Básica

1. Funciones (12 hs.)
2. Sistemas de ecuaciones lineales 12 hs.)
3. Vectores y matrices (24 hs.)
4. Determinantes (12 hs.)
5. Vectores en el plano y en el espacio (12 hs.)
6. Elementos de geometría analítica (18 hs.)

**Libros utilizados**

- [G] - Grossman, S., *Algebra Lineal*, 5ta. Edición, McGraw-Hill, 1996.
- [SL] - Sobel y Lerner, *Algebra*, 4ta. Edición, Prentice-Hall, 1996.

Se tenía la expectativa de que el uso del MATLAB resultaría positivo como motivación y para aumentar la comprensión de conceptos teóricos. Se pretendía además entrenar al estudiante en el uso de técnicas, material y equipamiento modernos. Las actividades de cada guía incluían la elaboración de un informe, el que fue diseñado para medir el cumplimiento de los objetivos planteados; en el apéndice A puede verse la guía correspondiente a la primera práctica y un ejemplo de informe. Se puede tener una idea del tipo de ejercicio que los estudiantes realizan, consultando el apéndice C, el cual contiene una muestra de problemas de distintas guías, extraídos del libro [G]. Leyendo este apéndice, se alcanza a apreciar la diferencia entre realizar una práctica clásica y una en la que se aprovecha el MATLAB si, por ejemplo, se intenta resolver el problema *MATLAB* 1, ítem *iv* con lápiz y papel, o se piensa en cómo presentar la situación del ejercicio *MATLAB* 6 sin la computadora; o se juega con las posibilidades de elaborar conjeturas que ofrecen problemas del tipo del ejercicio *MATLAB* 7.

El régimen de cursado admitía dos tipos de evaluación: una clásica, consistente en un examen final, y otra continuada, la cual requería ser alumno regular, obtener más del 60% en dos de tres parciales teórico-prácticos y aprobar, con el

mismo porcentaje, una prueba globalizadora de todos los contenidos del curso. La diferencia entre globalizador y final es que en el primero se adopta un punto de vista integrado y más conceptual. Para obtener la regularidad se requirió aprobar tres de los cuatro informes de Laboratorio y satisfacer un requerimiento fijo de asistencia a clases. Quienes no fueran regulares debían aprobar un trabajo práctico de gabinete antes de rendir el examen final.

Si bien a partir de 1995 se estuvieron ensayando distintas alternativas de incorporación del MATLAB a la enseñanza de un primer curso en esta facultad, ésta es la primera vez que su manejo se establece formalmente como condición para obtener la regularidad y que se dicta para todos los alumnos ingresantes de la Facultad. Fue posible poner en práctica esta modalidad porque, al gabinete de computación existente en la Facultad se sumó otro proporcionado por el FOMECC completando un total de 28 computadoras personales. Los estudiantes trabajaron en grupos de dos y ocasionalmente de tres personas para cumplir con las actividades de la clase de laboratorio.

### 3. ENCUESTAS Y NOTAS

Con el fin de evaluar cuál fue el impacto del uso del MATLAB, al final del curso se realizaron encuestas entre los docentes y los estudiantes regulares que se presentaron a rendir el examen globalizador (94) y el final (60). La encuesta para los estudiantes fue anónima y voluntaria.

Tabla 2 - Preguntas de la encuesta a los estudiantes y docentes

- |   |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. Utilidad de las clases de gabinete.</li><li>2. Horas de gabinete.</li><li>3. Opinión sobre MATLAB.</li><li>4. Organización y desarrollo de las clases de gabinete.</li></ol> |
|---|

La tabla 2 muestra los cuatro aspectos principales encuestados, que fueron cubiertos con varias preguntas de elección múltiple y un par de preguntas que

requerían elaboración. Los puntos 1 y 4 fueron comunes a los docentes y a los estudiantes. Hemos transcritos los resultados de las encuestas realizadas a los estudiantes en el Apéndice B.

### 3.1 Opinión de los docentes

Con respecto a la utilidad de las clases de gabinete, la mayoría de los docentes piensa que la misma consistió principalmente en la sistematización y mejora de los conocimientos de computación y en la adquisición de una herramienta poderosa como es el MATLAB. Algunos docentes opinaron que en los casos en que se incrementó la comprensión de los conceptos, mediaron condiciones adicionales, como el hecho de que esos estudiantes asistían al laboratorio habiendo logrado previamente un conocimiento adecuado de los temas trabajados.

### 3.2 Opinión de los estudiantes

Las respuestas de los estudiantes se pueden separar en dos grupos: el grupo G, de los que rindieron el examen globalizador correspondiente al régimen de evaluación continua y el grupo F de los que rindieron el examen final.

La mayoría de los estudiantes (60% de G y 72% de F) cree que la utilidad de las clases de gabinete para la comprensión de los temas desarrollados en las clases teórico-prácticas fue escasa, en tanto que 36% de G y 18% de F opina que fue mucha; el resto (10% de G y 10% de F) piensa que no influyeron. No obstante ello, la diferencia entre la opinión de los estudiantes del grupo G y los del grupo F confirma la opinión de los docentes en el sentido que el uso de MATLAB fue mejor aprovechado por aquellos alumnos con un mayor conocimiento de la materia.

El dato referente a la familiaridad con las computadoras personales, únicamente recabado al grupo F, dio como resultado que solo el 8% declara no tener experiencia alguna con computadoras previo al inicio del curso. Por el contrario, un porcentaje alto, 42%, afirma que en ese momento ya poseía bastante

familiaridad con las mismas.

Con respecto a la cantidad de horas de Gabinete, aproximadamente el 80% de los estudiantes de ambos grupos consideró que fue adecuada. Nuevamente el grupo F se diferencia al señalar, en un porcentaje del 17% contra 10% de G, que las horas de Gabinete fueron pocas. Esta diferencia abona la hipótesis del sentido en que funciona la dinámica enseñanza-aprendizaje en el tema bajo análisis: un mejor entendimiento de la teoría produce un mejor aprovechamiento de MATLAB y no en el sentido inverso.

El resultado de las preguntas sobre el programa MATLAB en sí es que a la mayoría, 71% de G y 65% de F, les pareció amigable, en tanto que el resto los considera poco adecuado o complicado.

Con respecto a la organización y desarrollo del laboratorio, la mayoría de los alumnos de ambos grupos también coincide en calificarla como adecuada. No obstante, se presentan diferencias de porcentajes al responder sobre la ayuda docente en clase: 92% de G opina que es adecuada contra 73% de F, en tanto que le pareció insuficiente a 6% de G contra 22% de F. Sobre los apuntes explicativos, ambos grupos, en un porcentaje aproximado del 70%, los encontraron adecuados, mientras que al 19% de G y 24% de F les parecieron pobres. Donde las respuestas de los dos grupos de estudiantes coinciden es en la pregunta sobre la confección de los informes, ya que alrededor del 50% de ambos la considera adecuada, repartiéndose luego de manera pareja la opinión entre sencilla (35% de G y 23% de F) y engorrosa (16% de G y 28% de F). En este punto la encuesta de los docentes revela un juicio concordante en el sentido de que se debería mejorar la elaboración de los informes.

### 3.3 Notas

En la Tabla 3 se consigna información sobre el número de alumnos discriminados por carrera, teniendo en cuenta su condición de inscripto, regular, presentado a examen, o aprobado.

Tabla 3 - Resultados de los exámenes

Carrera	IA	II	IQ	LMA	LQ	TUAG	Totales
Inscriptos	105	34	98	31	31	103	402
Regulares	77	16	78	11	25	53	260
Presentados al Globalizador	30	10	33	6	7	10	96
Aprobados Globalizador	28	8	31	6	6	8	87
Presentados al Final	20	2	22	3	5	20	71
Aprobados Final	4	0	4	0	0	1	9
Totales Presentados	50	12	55	9	12	30	168
Totales Aprobados	32	8	35	6	6	9	96

La Tabla 4 muestra distintos porcentajes de esos mismos datos. Lo más llamativo es la diferencia entre el número de inscriptos y el de regulares. Cabe notar que la cantidad de regulares es casi coincidente con la de alumnos que efectivamente se presentaron a cursar. La diferencia se puede entender por la notable cantidad de jóvenes que se anotan en carreras que finalmente no inician. De modo que en un análisis serio de las estadísticas debe usarse los porcentajes más indicativos tomados sobre el número de alumnos regulares. Un mejor índice para evaluar el desempeño de los estudiantes es el porcentaje sobre los que se presentan a rendir los exámenes.

Es necesario destacar la gran diferencia entre el examen Globalizador y el examen Final, siendo el porcentaje de aprobación del primero del 91%, contra solamente el 13% de los que rindieron el Final. Debe notarse que estos datos corresponden al primer turno de examen, existiendo otro turno en agosto.

Tabla 4 - Porcentajes de aprobación

Tomados sobre	IA	II	IQ	LMA	LQ	TUAG	Totales
Presentes Globalizador	93	80	94	100	86	80	91
Presentes Final	20	0	18	0	0	5	12
Presentes Totales	64	67	64	67	50	30	57
Regulares	42	50	45	55	24	17	37

La Tabla 5 presenta los resultados de dos exámenes parciales. Esta se agrega para enfatizar que los porcentajes de aprobados sobre regulares de esas evaluaciones parciales son comparables al porcentaje de aprobados al concluir el proceso.

Tabla 5 - Datos de aprobación de los dos primeros parciales

Parcial I

	IA	II	IQ	LMA	LQ	TUAG	Totales
Presentes	80	19	79	14	23	64	279
Aprobados	40	11	35	7	8	17	118
Porcentaje de Aprobados	50	58	44	50	35	27	42

Parcial II

	IA	II	IQ	LMA	LQ	TUAG	Totales
Presentes	71	14	71	11	21	52	240
Aprobados	30	10	32	5	5	11	93
Porcentaje de Aprobados	42	71	45	45	24	21	39

#### 4. CONCLUSIONES

Consideramos que la introducción del uso de MATLAB en la enseñanza del Algebra Lineal ha resultado exitosa porque se ha armonizado con un dictado tradicional de los temas y se ha proporcionado a los estudiantes una herramienta poderosa que les permitirá atacar problemas complejos típicos de su especialidad. Por el contrario, desde el punto de vista del aprendizaje, su impacto es más bien neutro, ya que quien mejor aprovecha el programa MATLAB para el aprendizaje del Algebra Lineal es quien más entendimiento de la materia tiene. Los datos analizados nos indican que el efecto de primer orden en el proceso enseñanza-aprendizaje está dado por el aprendizaje paulatino, es decir *no se debe estudiar para el examen, se debe estudiar durante el cursado de la materia*. El efecto del uso de la computadora en la enseñanza de Algebra Lineal es de segundo orden o, como ha sido puntualizado por algunos docentes y parcialmente indicado en la encuesta a los estudiantes, dependiente del entendimiento

logrado de los temas desarrollados en las clases teórico-prácticas, a través de un trabajo personal. Esto permite concluir que se ha impartido un curso de mejor calidad a aquellos estudiantes que siguieron regularmente la materia.

Los datos generados parecen sugerir que para mejorar el aprendizaje es necesario profundizar la evaluación continuada adoptando acciones tendientes a lograr un mayor nivel de participación de los alumnos de ese régimen.

Para el próximo dictado se proyecta instrumentar el laboratorio de computación de manera similar a la presentada en este trabajo, introduciendo modificaciones en la generación de los informes y atendiendo otras sugerencias realizadas por los estudiantes relacionadas con la organización y la infraestructura.

*Agradecimientos:*

*Este trabajo ha sido apoyado por la Universidad Nacional del Litoral y el CONICET.*

## APÉNDICE A: Ejemplo de guía con su informe

### A.1. Guía

#### MATEMATICA BASICA: Práctica de Gabinete Nro. 1

Esta práctica tiene los siguientes objetivos:

1. Presentar el programa o software MATLAB.
2. Listar elementos necesarios para trabajar en el gabinete.
3. Practicar el procedimiento de elaboración de los informes de las prácticas de gabinete.

- Material Necesario

Para trabajar en gabinete debe disponer de:

- [G]: El libro *Algebra Lineal*, S. Grossman, 5ta. Ed., 1997.
- [S]: Información contenida en *Introducción a Matlab*, K. Sigmon.
- Diskette de 3 1/2" HD para guardar su trabajo.

- Actividades

0. Importante: Al comienzo de todas las prácticas deberá escribir diary xxxx.txt (nombre de un integrante del grupo: por ej. Juan Pérez rotula su archivo: jperez.txt).

1. Lea página 32 de [G].
2. Trabaje la tutoría de MATLAB en la página 33 de [G].
3. Realice el ejercicio 3 de **MATLAB 1.3**, en página 34 de [G].
4. Elabore e imprima su informe cubriendo la actividad 3.
5. Al terminar utilice el comando: diary. De esta manera su trabajo quedará guardado en el archivo xxxx.txt. Grabe en su diskette el trabajo del día. Borre el archivo del disco duro. Estas actividades consumen tiempo. Por lo tanto, inícielas 10 minutos antes de la terminación de la clase de gabinete.

- Comentarios

Para guardar su trabajo, elaborar el informe e imprimirlo, use el comando diary. Para detalles del comando consultar el Apéndice 5, pág. A-36 de [G] y el ítem 17, pág. 14 [S].

El informe es la impresión del archivo xxxx.txt. Debe incluir lo siguiente: nombre de los integrantes del grupo, respuestas a las preguntas planteadas en las actividades y comentarios/aclaraciones que considere pertinente. Por otra parte debe eliminar material redundante de manera que su impresión no demande más de cuatro páginas. Observe el modelo proporcionado.

- Actividades adicionales

5. Si terminó con las actividades y el informe, se recomienda la realización de lo siguiente:

Ejercicio 5 de MATLAB 1.3 en pág. 34 de [G].

## A.2. Informe

Este es un modelo del primer informe. Cada grupo debe presentar un informe similar usando la matriz iv) del problema 3, página 34 de [G].

MATEMATICA BASICA - Informe de la Práctica de Gabinete Nro. 1

Grupo de Trabajo: Juan XXX, Ana YYY

Los renglones que comienzan con % son comentarios que escribimos cuando trabajamos con MATLAB, los otros son comentarios que escribimos cuando editamos el archivo.

a)

% Cargamos por filas los datos de la matriz i.

f1=[3 5 1 0];

f2=[4 2 -8 0];

f3=[8 3 -18 0];

A= [f1; f2; f3]

A=

3 5 1 0

4 2 -8 0

8 3 -18 0

%

%

% Obtenemos la forma escalonada reducida por renglones

%

AR=rref(A)

AR=

$$\underline{1} \ 0 \ -3 \ 0$$

$$0 \ \underline{1} \ 2 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0$$

%

%

% El resto del problema lo hacemos a mano.

%

%

diary off

Eliminamos varios renglones con instrucciones que no eran importantes para el informe.

b) Los pivotes han sido marcados en la matriz AR, subrayando los unos en la primera y segunda fila.

c)

$$x_1 \quad -3x_3 = 0$$

$$x_2 \quad +2x_3 = 0$$

d)  $(3x_3, -2x_3, x_3)$

## APENDICE B: Resúmenes de las Encuestas

### B.1. Estudiantes que rindieron el globalizador

MATEMATICA BASICA - 1er. Cuatrimestre de 1998

Evaluación de las clases de gabinete

*Le agradecemos contestar este cuestionario de manera anónima*

#### TOTAL DE RESPUESTAS

- |  |               |              |                  |    |
|--|---------------|--------------|------------------|----|
| 1) Las clases de Gabinete le sirvieron en la comprensión de los temas desarrollados en las clases teórico-prácticas: |               |              |                  |    |
|  | 34 mucho      | 56 poco      | 4 nada           | 94 |
| 2) Las horas de Gabinete fueron:   |               |              |                  |    |
|  | 1 excesivas   | 84 adecuadas | 9 pocas          | 94 |
| 3) La cantidad de trabajo requerido por las guías fue:   |               |              |                  |    |
|  | 12 excesiva   | 77 adecuada  | 4 poca           | 93 |
| 4) La dificultad del trabajo requerido por las guías fue:  |               |              |                  |    |
|  | 8 excesiva    | 67 adecuada  | 18 poca          | 93 |
| 5) El programa MATLAB le pareció:  |               |              |                  |    |
|  | 14 complicado | 66 amistoso  | 13 poco adecuado | 93 |
| 6) Los apuntes de MATLAB le parecieron:  |               |              |                  |    |
|  | 10 demasiados | 65 adecuados | 18 pobres        | 93 |
| 7) La ayuda docente en las clases de Gabinete le pareció:  |               |              |                  |    |
|  | 1 excesiva    | 87 adecuada  | 6 insuficiente   | 94 |
| 8) La confección de los informes fue:  |               |              |                  |    |
|  | 16 engorrosa  | 45 adecuada  | 33 sencilla      | 94 |
| 9) ¿Cuál ha sido para Ud. el beneficio de usar MATLAB?   |               |              |                  |    |
| 10) ¿Tiene algún comentario que piensa puede contribuir a la mejora de las clases de gabinete? ¿Cuál es?             |               |              |                  |    |

B.2. Estudiantes que rindieron el final

MATEMATICA BASICA - 1er. Cuatrimestre de 1998

Evaluación de las clases de gabinete

*Le agradecemos contestar este cuestionario de manera anónima*

TOTAL DE RESPUESTAS

- |  |               |              |                 |    |
|--|---------------|--------------|-----------------|----|
| 1) ¿Qué familiaridad con el uso de la PC tenía al comenzar las clases?:  |               |              |                 |    |
|  | 25 bastante   | 30 poca      | 5 nada          | 60 |
| 2) Las clases de Gabinete le sirvieron en la comprensión de los temas desarrollados en las clases teórico-prácticas: |               |              |                 |    |
|  | 11 mucho      | 43 poco      | 6 nada          | 60 |
| 3) Las horas de Gabinete fueron:   |               |              |                 |    |
|  | 3 excesivas   | 46 adecuadas | 10 pocas        | 59 |
| 4) La cantidad de trabajo requerido por las guías fue:   |               |              |                 |    |
|  | 10 excesiva   | 48 adecuada  | 2 poca          | 60 |
| 5) La dificultad del trabajo requerido por las guías fue:  |               |              |                 |    |
|  | 12 excesiva   | 35 adecuada  | 9 poca          | 56 |
| 6) El programa MATLAB le pareció:  |               |              |                 |    |
|  | 12 complicado | 39 amistoso  | 9 poco adecuado | 60 |
| 7) Los apuntes de MATLAB le parecieron:  |               |              |                 |    |
|  | 2 demasiados  | 43 adecuados | 14 pobres       | 59 |
| 8) La ayuda docente en las clases de Gabinete le pareció:  |               |              |                 |    |
|  | 5 excesiva    | 42 adecuada  | 13 insuficiente | 60 |
| 9) La confección de los informes fue:  |               |              |                 |    |
|  | 17 engorrosa  | 29 adecuada  | 14 sencilla     | 60 |
| 10) ¿Cuál ha sido para Ud. el beneficio de usar MATLAB?  |               |              |                 |    |
| 11) ¿Tiene algún comentario que piensa puede contribuir a la mejora de las clases de gabinete? ¿Cuál es?             |               |              |                 |    |

## APENDICE C: Muestra del tipo de ejercicio que se realiza con MATLAB

### MATLAB 1

Las matrices siguientes son matrices aumentadas de los sistemas de ecuaciones que tienen un número infinito de soluciones.

- a. Para cada una, dé la matriz y use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones.

i.  $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \\ 8 & 3 & -18 & 0 \end{array}\right)$       ii.  $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 27 & 3 & 3 & 12 \\ 9 & 27 & 10 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 6 \end{array}\right)$

iii.  $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 21 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -6 & 7 & 2 \end{array}\right)$       iv.  $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 7 & 5 & 15 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 7 & -1 & 7 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 22 & 8 \\ 3 & 2 & 7/2 & 9 & -12 & -2 \end{array}\right)$

El resto de este problema necesita trabajo con papel y lápiz.

- b. Para cada forma escalonada reducida por renglones, localice los pivotes dibujando un círculo a su alrededor.
- c. Para cada forma escalonada reducida, escriba el sistema de ecuaciones equivalente.
- d. Resuelva cada uno de estos sistemas equivalentes eligiendo las variables arbitrarias que serán las variables correspondientes a las columnas que no tienen pivote en la forma escalonada reducida por renglones. (Estas variables son las variables naturales que han de escogerse de manera arbitraria.)

## MATLAB 2

- Introduzca cualesquiera dos matrices  $A$  y  $B$  de distinto tamaño. Encuentre  $A + B$ . ¿Qué le dice MATLAB?
- Introduzca cualesquiera dos matrices  $A$  y  $B$  del mismo tamaño. Suponga que  $s$  es un escalar. De sus conocimientos algebraicos sobre las manipulaciones con números, ¿a qué conclusión llegaría sobre las relaciones entre  $s^*A$ ,  $s^*B$  y  $s^*(A + B)$ ? Utilice una línea de comentario para escribir esta conclusión. Pruebe su conclusión con tres elecciones diferentes de  $s$ . Pruebe su conclusión con otra elección de  $A$  y otra elección de  $B$  y para tres valores de  $s$ .

## MATLAB 3

- Introduzca cualesquiera dos matrices  $A$  de  $3 \times 4$  y  $B$  de  $4 \times 2$ . Encuentre  $A^*B$  y  $B^*A$ . Comente sobre los resultados.
- Genere dos matrices aleatorias,  $A$  y  $B$ , con elementos entre  $-10$  y  $10$ . Encuentre  $AB$  y  $BA$ . Repita el proceso para al menos siete pares de matrices  $A$  y  $B$ . ¿Cuántos pares satisfacen  $AB = BA$ ? ¿Qué puede concluir sobre la probabilidad de que  $AB = BA$ ?
- Introduzca las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $x$  y  $z$  siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -23 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 4 \\ 7 & 5 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & -10 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 34 \\ 24 \\ 15 \\ 33 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Muestre que  $Ax = b$  y  $Az = 0$ .
- Con base en sus conocimientos de la manipulación algebraica normal, y usando los resultados del inciso a), ¿a qué podría decir que sería igual  $A(x + sz)$ , donde  $s$  es cualquier escalar? Pruebe su conclusión calculando  $A(x + sz)$  para al menos cinco escalares  $s$  diferentes.

## MATLAB 4

- a. Sean  $A$  y  $B$  cualesquiera dos matrices aleatorias de  $3 \times 3$ . sea  $UA = \text{triu}(A)$  y  $UB = \text{triu}(B)$ . El comando `triu` forma matrices triangulares superiores. Encuentre  $UA * UB$ . ¿Qué propiedad tiene el producto? Repita para otros tres pares de matrices aleatorias de  $n \times n$ , usando diferentes valores de  $n$ .
- b. (*Lápiz y papel*) A partir de sus observaciones escriba una conclusión sobre el producto de dos matrices triangulares superiores. Pruebe su conclusión usando la definición de multiplicación de matrices.
- c. ¿Qué concluiría sobre el producto de dos matrices triangulares inferiores? Pruebe su conclusión para al menos tres pares de matrices triangulares inferiores. [*Sugerencia: Use `tril(A)` y `tril(B)` para generar matrices triangulares inferiores a partir de la matrices aleatorias  $A$  y  $B$ .*]

## MATLAB 5

- a. Suponga que los elementos de  $A$  y  $x$  son números reales. Usando la definición de multiplicación de matrices, argumente por qué  $Ax = 0$  significa que cada renglón de  $A$  es perpendicular a  $x$ . (Recuerde que dos vectores reales son perpendiculares si su producto escalar es cero.)
- b. Usando el resultado del inciso a) encuentre todos los vectores  $x$  perpendiculares a los dos vectores:

$$(1, 2, -3, 0, 4) \text{ y } (4, -5, 2, 0, 1)$$

## MATLAB 6

Perturbaciones: matrices cercanas a una matriz no invertible. Introduzca la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Verifique que  $A$  no es invertible. En lo que sigue  $A$  se cambia a una matriz invertible  $C$  que es cercana a  $A$ , modificando uno de los elementos de  $A$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 + f \end{pmatrix}$$

donde  $f$  es un número pequeño.

Antes de continuar, dé el comando `format short e`. Este comando hará que los números aparezcan en notación científica. En MATLAB, por ejemplo, `1.e-5` representa  $10^{-5}$ .

a. Introduzca

$$f = 1.e - 5; C = A; C(3,3) = A(3,3) + f;$$

Verifique que  $C$  es invertible y encuentre  $\text{inv}(C)$ .

b. Repita para  $f=1.e-7$  y  $f = 1.e-10$ .

c. Comente sobre el tamaño de los elementos de  $\text{inv}(C)$  (comparado con el tamaño de los elementos de  $C$ ) conforme  $f$  se hace pequeño, es decir, conforme  $C$  se acerca más a no ser invertible.

d. Se investigará la exactitud de las soluciones a los sistemas en los que la matriz de coeficientes es cercana a ser invertible. Observe que si

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 + f \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 + f \end{pmatrix}$$

entonces  $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; es decir,  $\mathbf{x}$  es la solución exacta. Introduzca  $\mathbf{x} = [1; 1; 1]$ . Para cada  $f$  usada en a) y b), forme  $C$  y  $\mathbf{b}$  y resuelva el sistema  $C\mathbf{y} = \mathbf{b}$  usando `inv(C)` (dando el nombre de  $\mathbf{y}$  a la solución). Encuentre  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ . ¿Qué tan cercana es la solución calculada y a la solución exacta  $\mathbf{x}$ ? De qué manera cambia la exactitud conforme  $f$  se hace más pequeña, es decir, conforme  $C$  se acerca a no ser invertible?

Antes de continuar con otros problemas dé el comando `format` para regresar a la notación normal.

## MATLAB 7

1. Genere cuatro pares,  $A$  y  $B$ , de matrices aleatorias tales que  $AB$  esté definido. Elija algunas matrices cuadradas y otras no cuadradas. Encuentre  $(AB)' - A'B'$  y  $(AB)' - B'A'$ . Concluya una fórmula para  $(AB)'$  en términos de las transpuestas de  $A$  y  $B$ .
2. Genere cuatro matrices cuadradas aleatorias de diferentes tamaños.
  - a. Para cada matriz  $A$ , encuentre  $B=A'+A$ . Describa los patrones observados en la forma de estas matrices  $B$ .
  - b. Para cada matriz  $A$ , sea  $C=A'-A$ . Describa los patrones observados en estas matrices  $C$ .
  - c. Genere cuatro matrices aleatorias de diferentes tamaños, algunas cuadradas y otras no cuadradas. Para cada matriz  $F$  generada, encuentre  $G = F*F'$ . Describa los patrones observados en la forma de estas matrices  $G$ .
  - d. (*Lápiz y papel*). Pruebe sus observaciones en los incisos a), b) y c), usando las propiedades de la transpuesta.

## MATLAB 8

1. Para seis matrices aleatorias  $A$  con elementos reales (para valores diferentes de  $n$ ), compare  $\det(\mathbf{A})$  con  $\det(\mathbf{A}')$  donde  $A'$  denota (en MATLAB) la transpuesta de  $A$ . Incluya por lo menos dos matrices no invertibles. ¿Qué le dice su comparación? Repita para matrices con elementos complejos.
2. Genere seis pares de matrices aleatorias,  $A$  y  $B$ , de  $n \times n$  (use diferentes valores de  $n$ ). Para cada par, sea  $C = A + B$ . Compare  $\det(C)$  y  $\det(A) + \det(B)$ . Obtenga una conclusión sobre la afirmación

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

(\*) Departamento de Matemática (FIQ) - Universidad Nacional del Litoral.

Santiago del Estero 2829 - 3000 Santa Fe, ARGENTINA, Fax: 54 342 4571162

(\*) Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), UNL - CONICET; E-mail:tquique@termo.arcrude.edu.ar

(†) Programa Especial de Matemática Aplicada (PEMA), CONICET;  
E-mail:rmacias@fiqus.unl.edu.ar