Una caracterización geométrica de números conjugados

Héctor H. Cuenya

1 Introducción.

Dos números reales positivos p y q se dicen conjugados si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es bien conocido que los números conjugados se presentan en varios lugares del Análisis, por ejemplo, ellos aparecen en la siguiente versión de la desigualdad media aritmética-media geométrica: "si p y q son números conjugados entonces

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \quad \text{para todo} \quad x > 0, y > 0\text{"}$$

y también juegan un rol muy importante en la desigualdad de Hölder. El propósito de este artículo es dar una interesante propiedad geométrica, no intuitiva, en el espacio euclídeo n-dimensional, $n \geq 2$, la cual caracteriza números conjugados. Esta propiedad aparentemente es desconocida al presente o al menos lo es para el autor. Para abordar el problema usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange con el objeto de minimizar una función de n variables sujeta a restricciones. Si bien toda la demostración la haremos para el caso $n = 2$, por cuestiones de simplicidad, el lector debería ver que los argumentos utilizados se extienden sin dificultad al caso $n > 2$.

Sea $a = (a_1, a_2)$ un vector no nulo en $\mathbf{R}^2$. Si (a, x) denota el producto escalar en $\mathbf{R}^2$ entre los vectores a y x, es decir $(a, x) = a_1x_1 + a_2x_2$, sea $S_a := \{x \in \mathbf{R}^2 : (a, x) = 0\}$. Así definido S_a es una recta que pasa por el origen perpendicular al vector a.

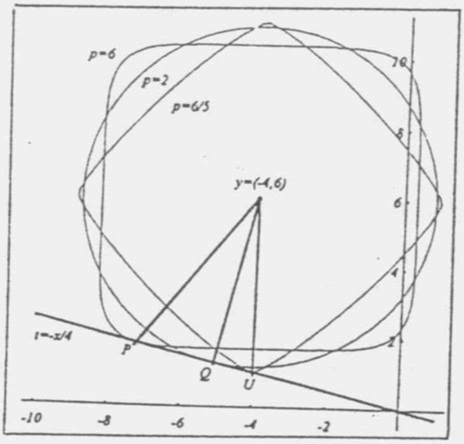
Dado el vector $y = (y_1, y_2)$ en $\mathbf{R}^2 - S_a$ y $p > 1$ llamaremos $y^{(p)} = (y_1^{(p)}, y_2^{(p)})$ a la p-proyección de y sobre el subespacio lineal S_a, es decir, $y^{(p)}$ es el único vector en S_a el cual satisface

$$e_p := (|y_1 - y_1^{(p)}|^p + |y_2 - y_2^{(p)}|^p)^{\frac{1}{p}} = \min\{(|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p)^{\frac{1}{p}} : x \in S_a\}.$$

Tanto la existencia como la unicidad del vector $y^{(p)}$ no serán demostradas aquí, no obstante, la siguiente interpretación geométrica hace plausible nuestra afirmación:
El vector $y^{(p)}$ es el punto en la recta S_a de tangencia a la curva dada implícitamente por

$$\{(x_1, x_2) : (|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p)^{\frac{1}{p}} = e_p\}.$$

En la figura que sigue y que fuera hecha por F. Mazzone con el Mathematica, se muestra esta situación para $a = (\frac{1}{4}, 1), y = (-4, 6)$ y para los siguientes valores de p, $p = 2, p = \frac{6}{5}$ y $p = 6$. Estos dos últimos son conjugados. Además $P = y^{(6)}, Q = y^{(2)}$, y $U = y^{(\frac{6}{5})}$.



Es conveniente en este momento, a los efectos de comprender mejor el argumento previo, analizar el caso $p = 2$ y notar que $y^{(2)}$ no es otra cosa que la proyección perpendicular del punto y sobre la recta S_a y e_2 es justamente la distancia euclídea entre ese punto y esa recta. Supongamos entonces que un tal vector $y^{(p)}$ exista. De acuerdo al método de los multiplicadores de Lagrange, deberá existir un número real λ_p tal que $y^{(p)}$ es un punto mínimo para la función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}} - \lambda_p(a_1 x_1 + a_2 x_2). \tag{1}$$

De esta manera tenemos

$$(2)\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(y^{(p)}) = (|y_1 - y_1^{(p)}|^p + |y_2 - y_2^{(p)}|^p)^{\frac{1}{p}-1}|y_j - y_j^{(p)}|^{p-1}\mathrm{sg}(y_j^{(p)} - y_j) - \lambda_p a_j = 0,$$

para $1 \leq j \leq 2$ donde sg es la función signo definida por $\mathrm{sg}(x) = 1$, si $x > 0$, $\mathrm{sg}(x) = 0$, si $x = 0$ y $\mathrm{sg}(x) = -1$, si $x < 0$. Se sigue de (2) que

$$(3)\qquad e_p^{1-p}|y_j^{(p)} - y_j|^{p-1} = \lambda_p a_j \mathrm{sg}(y_j^{(p)} - y_j) \ \text{ para } 1 \leq j \leq 2.$$

Como consecuencia de (3), conseguimos para $j = 1, 2$

$$(4)\qquad a_j \mathrm{sg}(y_j^{(p)} - y_j) = 0 \quad \text{o} \quad \mathrm{sg}(\lambda_p) = \mathrm{sg}(a_j(y_j^{(p)} - y_j))$$

y

$$(5)\qquad e_p^{-1}|y_j^{(p)} - y_j| = |\lambda_p|^{\frac{1}{p-1}}|a_j|^{\frac{1}{p-1}}.$$

Multiplicando ambos miembros de (5) por $a_j \mathrm{sg}(y_j^{(p)} - y_j)$ y sumando sobre j obtenemos

$$(6)\qquad e_p^{-1}\sum_{j=1}^{2} a_j(y_j^{(p)} - y_j) = |\lambda_p|^{\frac{1}{p-1}}\sum_{j=1}^{2} a_j|a_j|^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{sg}(y_j^{(p)} - y_j).$$

Como $y^{(p)} \in S_a$, se sigue de (4) que

$$(7)\qquad e_p = -\frac{(a,y)}{|\lambda_p|^{\frac{1}{p-1}}\sum_{j=1}^{2} a_j|a_j|^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{sg}(y_j^{(p)} - y_j)} = \frac{|(a,y)|}{|\lambda_p|^{\frac{1}{p-1}}\sum_{j=1}^{2}|a_j|^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Por otra parte, si en (3) elevamos ambos miembros a la $\frac{p}{p-1}$ y sumamos sobre j conseguimos

$$\sum_{j=1}^{2} e_p^{-p}|y_j^{(p)} - y_j|^p = \sum_{j=1}^{2}|\lambda_p|^{\frac{p}{p-1}}|a_j|^{\frac{p}{p-1}}.$$

La última igualdad implica que

$$|\lambda_p|^{\frac{1}{p-1}}(\sum_{j=1}^{2}|a_j|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{1}{p}} = 1$$

o equivalentemente

$$(8) \qquad |\lambda_p| = \frac{1}{\|a\|_{\frac{p}{p-1}}}$$

donde $\|a\|_t$ es por definición igual a $(\sum_{j=1}^{2} |a_j|^t)^{\frac{1}{t}}$. (El lector que tiene algún conocimiento de espacios normados reconocerá a $\|a\|_t$ como la norma t del vector a.)
Finalmente si sustituimos (8) en (7) obtenemos

$$(9) \qquad e_p = \frac{|(a,y)|}{\|a\|_{\frac{p}{p-1}}}.$$

Es importante remarcar que en (9) hemos obtenido la "$p-$distancia" del punto y a la recta S_a, donde la "$p-$distancia" entre dos puntos c y d en el plano viene dada por $\|c-d\|_p$. Observar que en el caso $p=2$ nosotros obtenemos la conocida fórmula para la distancia euclídea entre el punto y y la recta S_a.

2 Caracterización de números conjugados.

El siguiente teorema nos da una condición geométrica necesaria y suficiente para que dos números reales $p>1$ y $q>1$ sean números conjugados. Claramente los vectores $y^{(p)}$ dependen tanto del vector y como del vector a ortogonal a la recta S_a, sin embargo aunque variaremos el vector a, por razones de simplicidad lo seguiremos llamando $y^{(p)}$ en lugar de $y^{(p)}(a)$. En cada caso quedará claro del contexto cual es el vector al que nos estamos refiriendo.
Teorema. *Sean p y q números reales mayores o iguales que* 1. *Entonces*

$$(10) \qquad \|y^{(p)}-y\|_p\|y^{(2)}-y\|_q = \|y^{(q)}-y\|_q\|y^{(2)}-y\|_p$$

para todo $a \in \mathbf{R}^2$, $a \neq 0$, $y \in \mathbf{R}^2 - S_a$ si y sólo si $p=q$ o p y q son números conjugados.
Demostración. Sean $a \in \mathbf{R}^2, a \neq 0$, $y \in \mathbf{R}^2 - S_a$. Si $p=q$, (10) es obvio. Supongamos entonces que p y q son números conjugados. De (8) y (9) para

$p = 2$ tenemos

$$(11) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\|a\|_2^2}, \quad e_2 = \frac{|(a,y)|}{\|a\|_2},$$

respectivamente. Además de (3) obtenemos

$$(12) \qquad y_j^{(2)} = \frac{\lambda_2 a_j + e_2^{-1} y_j}{e_2^{-1}} \quad \text{para } j = 1, 2$$

y por consiguiente

$$(13) \qquad \begin{aligned} \|y^{(2)} - y\|_p &= \Big(\sum_{j=1}^{2} |y_j^{(2)} - y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{2} \Big|\frac{\lambda_2 a_j + e_2^{-1} y_j}{e_2^{-1}} - y_j\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{|\lambda_2|}{e_2^{-1}} \|a\|_p. \end{aligned}$$

De (11) y (13) conseguimos

$$(14) \qquad \|y^{(2)} - y\|_p = \frac{|(a,y)| \|a\|_p}{\|a\|_2^2}.$$

Luego (10) es equivalente a

$$(15) \qquad \frac{(a,y)^2 \|a\|_q}{\|a\|_2^2 \|a\|_{\frac{p}{p-1}}} = \frac{(a,y)^2 \|a\|_p}{\|a\|_2^2 \|a\|_{\frac{q}{q-1}}}.$$

Pero la última igualdad es inmediata ya que por ser p y q conjugados, $p = \frac{q}{q-1}$ y $q = \frac{p}{p-1}$. Supongamos ahora que (10) se satisface. De acuerdo a (15), como $(a, y) \neq 0$, tenemos

$$(16) \qquad \|a\|_q \|a\|_{\frac{q}{q-1}} = \|a\|_p \|a\|_{\frac{p}{p-1}} \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbf{R}^n, a \neq 0.$$

Por simplicidad escribamos

$$\overline{p} = \frac{p}{p-1}, \quad \overline{q} = \frac{q}{q-1}.$$

Justamente $\overline{p}$ y $\overline{q}$ son los conjugados de p y q respectivamente. Con esta notación, tomando $t > 0$ y $a = (1, t)$ obtenemos de (16), que la función g definida por

$$g(t) = (1 + t^q)^{\frac{1}{q}}(1 + t^{\overline{q}})^{\frac{1}{\overline{q}}} - (1 + t^p)^{\frac{1}{p}}(1 + t^{\overline{p}})^{\frac{1}{\overline{p}}}, \tag{17}$$

es idénticamente cero para todo $t > 0$. Por otro lado calculando la derivada primera de la función g tenemos

$$g'(t) = t^{-1}(1+t^q)^{\frac{1}{q}}(1+t^{\overline{q}})^{\frac{1}{\overline{q}}}[h(t^q)+h(t^{\overline{q}})] - t^{-1}(1+t^p)^{\frac{1}{p}}(1+t^{\overline{p}})^{\frac{1}{\overline{p}}}[h(t^p)+h(t^{\overline{p}})] = 0$$

para todo $t > 0$, donde $h(t) = \frac{t}{1+t}$.
De aquí y de (17) se sigue que la función f definida por

$$f(t) = [h(t^q) + h(t^{\overline{q}})] - [h(t^p) + h(t^{\overline{p}})]$$

es idénticamente cero para todo $t > 0$. Derivando ahora la función f en 1 conseguimos $f'(1) = \frac{1}{4}(q + \overline{q} - p - \overline{p}) = 0$. Por lo tanto $q + \overline{q} = p + \overline{p}$. La última igualdad implica que $qp(p - q) = (p - q)(p + q)$, y de aquí $p = q$ o p y q son números conjugados.
Observación. Para aquel lector interesado en conocer si esta caracterización es posible extenderla al caso extremo $p = 1$ y $q = \infty$, donde $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$, podemos responder afirmativamente y aunque su demostración no es muy complicada la técnica necesaria para ella excede el alcance de esta nota.

Departamento de Matemática. Fac. de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales.
Universidad Nacional de Río Cuarto. 5800-Río Cuarto. Argentina.