Competencia Paenza 1999

Problemas y Algunas soluciones

Ejercicio 1.

Sea G un abierto del plano real y $f : G \to \mathbb{R}$ una función continua de manera que $\int_G f(x,y)dxdy = 0$.

Pruebe que existe al menos una recta que divide a G en dos partes G_1 y G_2 de area no nula tal que $G = G_1 \cup G_2$ y

$$\int_{G_1} f(x,y)dxdy = \int_{G_2} f(x,y)dxdy = 0$$

Resolución (realizada por el participante Nº13019)

Identifiquemos el plano real con $\mathbb{C}$ para comodidad de notación.

Sea $z_0 \in G$. Definimos

$$R(\theta) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \theta < \operatorname{Arg}(z - z_0) < \theta + \pi\} \quad (0 \leq \operatorname{Arg}(z) < 2\pi)$$

Sea $\psi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mandando

$$\theta \mapsto \int_{R(\theta)\cap G} f(x,y)dxdy$$

ψ es continua y como,

$$0 = \int_G f(x,y)dxdy = \int_{R(0)\cap G} f(x,y)dxdy + \int_{G-R(0)\cap G} f(x,y)dxdy =$$

$$= \psi(0) + \int_{R(\pi)\cap G} f(x,y)dxdy = \psi(0) + \psi(\pi) \Longrightarrow \psi(\pi) = -\psi(0).$$

Por teorema del valor medio, se tiene un $t \in [0,\pi]$ tal que,

$$\psi(t) = 0 = \int_{R(t)\cap G} f(x,y)dxdy$$

Luego la recta $L = \{z_0 + \lambda e^{it} : \text{con } \lambda \in \mathbb{R}\}$ divide a G en $G_1 = R(t) \cup G$ y $G_2 = G - G_1$ cumpliendo que:

$$\int_{G_1} f(x,y)dxdy = \int_{G_2} f(x,y)dxdy = 0.$$

Además como $z_0 \in G$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < r\} \subseteq G$ y por lo tanto

$$\{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < r \text{ y } t < \operatorname{Arg}(z - z_0) < t + \pi\} \subseteq G_1$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < r \text{ y } t + \pi < \operatorname{Arg}(z - z_0) < t + 2\pi\} \subseteq G_2$$

Por lo tanto ambos son de medida no nula.

Ejercicio 2.

a) Se dibujan n rectas en el plano, de forma tal que x_1 son paralelas entre sí en cienta dirección, x_2 paralelas entre sí en una segunda dirección,..., y x_k paralelas entre sí en una k-ésima dirección, de manera tal que ninguna terna de rectas se corte en un punto. Encuentre una fórmula que calcule el número de intersecciones.

b) Dibuje 17 rectas en las condiciones anteriores tal que sus intersecciones sean exactamente 101 puntos.

Resolución (realizada por el participante N$^{\underline{o}}$13152)

La cantidad de puntos de intersección de i rectas paralelas en una dirección y j rectas paralelas en otra dirección es $i.j$.

Como ninguna terna de rectas se corta en un punto, el total de puntos de intersección se obtiene contando las intersecciones de cada par de grupos de rectas paralelas y sumando todo.

Si hay k grupos de rectas paralelas se tiene:

$$\text{N}^{ro} \text{ de intersecciones} = x_1(x_2 + \ldots + x_k) + x_2(x_3 + \ldots + x_k) + \ldots + x_{k-1}x_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} x_i \left(\sum_{j=i+1}^{k} x_j \right) = \frac{1}{2}\left(n^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)$$

y siendo el número total de rectas:

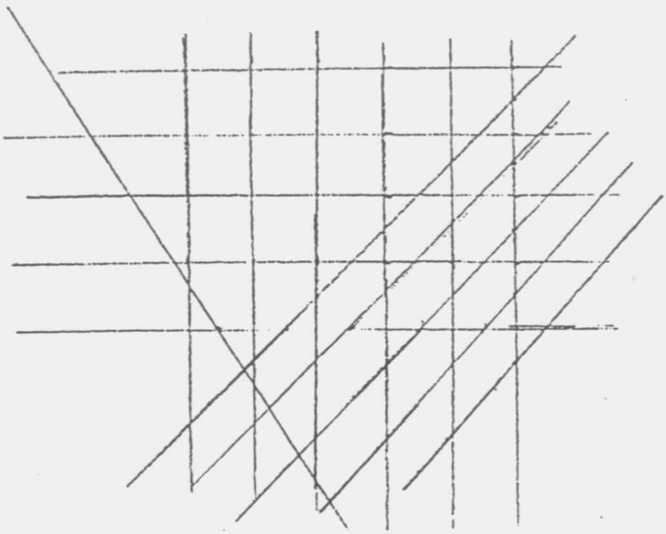
$$x_1 + \ldots + x_k = n$$

b) Para calcular cuántos grupos de rectas necesito y cuántas rectas debe haber en cada grupo, hay que encontrar un k de tal forma que que el sistema con k incógnitas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} x_i\left(\sum_{j=i+1}^{k} x_j\right) &= 101 \\ x_1 + \ldots + x_k &= 17 \end{aligned}$$

tenga solución en $\mathbb{N}$.

Si $k = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tiene solución en $\mathbb{N}$: $x_3 = x_4 = 5$.



Ejercicio 3.

Sea $A_n = \{0, 1, 2, ..., 7^n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Una sucesión se dice coherente si $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{7^n}$. Por ejemplo $a = (5, 12, 61, \ldots)$ es el comienzo de una. Dada una sucesión a, se denota por a^2 a la sucesión

$$a^2 = \left(a_n^2 \pmod{7^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

En el ejemplo $a^2 = (4, 46, 291, \ldots)$.

Observe que si a es coherente, entonces a^2 también.

Convengamos en llamar 2 a la sucesión constante $2 = (2, 2, \ldots, 2, \ldots)$.

a) Demuestre que existe una solución coherente a la ecuación $a^2 = 2$ y exhiba sus cuatro primeros términos.

b) Demuestre que existen sólo dos soluciones distintas de la misma ecuación.

Resolución (realizada por el participante Nº13059)

Sea $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ la solución buscada. Luego

$$a^2 = (a_1^2 \text{ mód } 7, a_2^2 \text{ mód } (49), \ldots) = 2$$

Cálculo de a_1:

$$a_1 \in A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ y } a_1^2 \equiv 2 \text{ mód } 7 \Longrightarrow 2 + 7x_1 = a_1^2$$

El máximo valor de a_1^2 es 36, por lo que $0 \leq x_1 \leq [\frac{36-2}{7}] = 4$. Analizando caso por caso se tiene que únicamente para $x_1 = 1$ ó $x_1 = 2$ tenemos solución entera $a_1 = 3$ ó $a_1 = 4$.

Una vez establecido a_1 se tiene que $a_2 \equiv a_1(7)$ ya que la solución debe ser coherente. Luego

$$a_2 = a_1 + 7y_1 \Longrightarrow a_2^2 = a_1^2 + 49y_1 + 14a_1y_1$$

A su vez:

$$a_2^2 = 2 + 49x_2 \quad (a_2^2 \text{ mód } 7^2 = 2)$$

Igualo:

$$\begin{aligned} 2 + 49x_2 &= a_1^2 + 49y_1^2 + 14a_1y_1 \\ 49x_2 &= a_1^2 - 2 + 49y_1^2 + 14a_1y_1 \end{aligned}$$

Como $a_1^2 - 2 \equiv 0(7) \Longrightarrow 7x_2 = \frac{a_1^2-2}{7} + 7y_1^2 + 2a_1y_1 \Longrightarrow \frac{a_1^2-2}{7} + 2a_1y_1 \equiv 0\ (7)$.
Como $a_1 \leq 6, a_1^2 \leq 36 \Longrightarrow \frac{a_1^2-2}{7} \leq 4,857 < 5 < 7$ Luego $2a_1y_1 \equiv 7 - \frac{a_1^2-2}{7}\ (7)$
Como $a_2 \in A_2 \Longrightarrow a_2 = a_1 + 7y_1 \leq 48$. Como $a_1 > 0 \Longrightarrow 7y_1 \leq 48 \Longrightarrow y_1 \leq 6,857 < 7$. Puede entonces determinarse y_1

$$a_1 = 3 \Longrightarrow 6y_1 \equiv 6\ (7) \Longrightarrow y_1 = 1 \Longrightarrow a_2 = 10.$$

$$a_1 = 4 \Longrightarrow 8y_1 \equiv 5\ (7) \Longrightarrow y_1 = 5 \Longrightarrow a_2 = 39$$

Cuando ya obtuve a_{n-1}:

$$an \equiv a_{n-1}\ (7^{n-1}) \Longrightarrow a_n = a_{n-1} + 7^{n-1}.y_{n-1} \Longrightarrow a_n^2 = a_{n-1}^2 +$$

$$(7^{n-1})^2 y_{n-2}^2 + 2a_{n-1}7^{n-1}y_{n-1}$$

También a_n^2 (mód 7^n) $= 2 \Longrightarrow a_n^2 = 2 + 7^n.x_n$

Igualo:

$$\begin{aligned} 2 + 7^n x &= a_{n-1}^2 + (7^{n-1})^2 y_{n-2}^2 + 2a_{n-1}7^{n-1}y_{n-1} \\ 7^n x &= a_{n-1}^2 - 2 + (7^{n-1})^2 y_{n-1}^2 + 2a_{n-1}7^{n-1}y_{n-1} \end{aligned}$$

Como $a_{n-1}^2 - 2 \equiv 0\ (7^{n-1})$, dividiendo por 7^{n-1}.

$$7x = \frac{a_{n-1}^2 - 2}{7^{n-1}} + (7^{n-1})y_{n-1}^2 + 2a_{n-1}y_{n-1}$$

$$\frac{a_{n-1}^2 - 2}{7^{n-1}} + 2a_{n-1}y_{n-1} \equiv 0(7)$$

De aquí determino y_{n-1}, con la condición $a_n \leq 7^n - 1 \Longrightarrow a_{n-1} + 7^{n-1}y_{n-1} \leq 7^n - 1$

Como $a_1 > 0 \Longrightarrow 7^{n-1}y_{n-1} \leq 7^n - 1 \Longrightarrow y_{n-1} \leq 7 - \frac{1}{7^{n-1}} < 7$.

Teniendo en cuenta que $a_i \not\equiv 0\ (7)$, habrá una y sólo una solución de y_{n-1} verificando:

$$2a_{n-1}y_{n-1} \not\equiv -\frac{a_{n-1}^2 - 2}{7^{n-1}}$$

Luego puedo calcular $a_n = a_{n-1} + 7^{n-1}y_{n-1}$

Como parto de sólo dos valores para a_1, habrá sólo 2 soluciones distintas para esta ecuación.

Primeros términos:

Ya se calculó $a_1 = 3$, $a_2 = 10$

$$a_3 = 10 + 49y_2 \quad \text{y} \quad a_3^2 = 2 + 343x_3$$

$$a_3^2 = 100 + 49^2 y_2^2 + 980y_2 = 2 + 343x_3$$

$$2+49y_2^2+20y_2=7x_3$$

$$2+20y_2\equiv 0\ (7)\Longrightarrow y_2=2\Longrightarrow \boxed{a_3=10+49.2=108}$$

$$a_4=108+343y_3 \text{ y } a_4^2=2+7^4x_4$$

$$a_4^2=108^2+343^2y_3^2+2.108y_3=2+7^4x_4$$

$$34+343y_3^2+216y_3=7x_4$$

$$34+216y_3\equiv 0\ (7)\Longrightarrow 216y_3\equiv 1\Longrightarrow y_3=6\Longrightarrow \boxed{a_3=108+6.343=2166}$$

Soluciones: $(3,10,108,2166,\ldots)$ y $(4,39,\ldots)$

Ejercicio 4.

Se tienen los números enteros positivos a y b coprimos. Sean

$$x=[\frac{a}{b}]+[\frac{2a}{b}]+[\frac{3a}{b}]+...+[(b-1)\frac{a}{b}]$$

$$x=[\frac{b}{a}]+[\frac{2b}{a}]+[\frac{3b}{a}]+...+[(a-1)\frac{b}{a}]$$

donde [ ] indica la parte entera. Pruebe que $x+y=(a-1)(b-1)$.

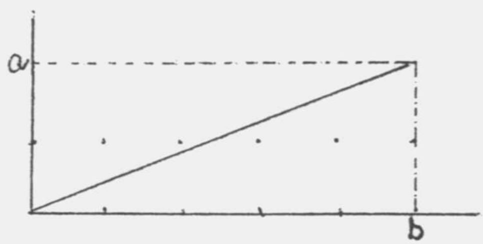
Resolución (realizada por el participante Nº13025)

Consideramos el rectángulo A en el plano xy de vértices $(0,0)$; $(b,0)$; (b,a); $(0,a)$.

Al ser a y b coprimos no habrá ningún punto de coordenadas enteras sobre la diagonal que une $(0,0)$ con (b,a), ya que si hubiese alguno (de coordenadas (x_1,y_1)), por semejanza de triángulos tendríamos

$$\frac{a}{b}=\frac{y_1}{x_1}$$

con $x_1<a$ y $y_1<b$. Entonces existiría d tal que d/a ó d/b.



Ahora bien, la cantidad de puntos de coordenadas enteras que hay bajo la diagonal, con la coordenada x fija ($x \in \mathbb{N}$), es claramente $[\frac{xa}{b}]$ ya que la ordenada hasta la diagonal es $\frac{xa}{b}$.

De esta forma, la cantidad de puntos enteros dentro del rectángulo, y por debajo de la diagonal, será

$$\sum_{k=1}^{b-1}[k\frac{a}{b}] = x$$

Esto es sin incluir los puntos sobre los lados.

Análogamente, si deseamos contar cuántos puntos con coordenadas enteras hay por encima de la diagonal (excluyendo los que están sobre los lados), tomamos la ordenada y fija ($y \in \mathbb{N}$). Con esta ordenada y tendremos $[y\frac{b}{a}]$ puntos enteros sobre la diagonal, ya que la distancia desde el punto $(0, y)$ a la diagonal paralelamente al eje x es $y\frac{b}{a}$.

De esta forma, la cantidad de puntos por encima de la diagonal será

$$\sum_{k=1}^{a-1}[k\frac{b}{a}] = y.$$

Luego, $x + y$ será la cantidad de puntos enteros dentro del rectángulo A (sin contar los de los bordes). Y esta cantidad es $(a-1)(b-1)$.

Por lo tanto, $x + y = (a-1)(b-1)$.

En el próximo número continuaremos la publicacin de problemas y algunas soluciones.