Puntos periódicos de funciones continuas.

María de Gracia Mendonça

Las funciones continuas de una variable real han sido estudiadas intensamente por más de 200 años. Grandes matemáticos como Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783) y Weierstrass (1815-1897)han dejado documentos perdurables en este campo al punto que comprenden la mayor parte del cálculo con el que está familiarizado cualquier estudiante de ciencia e ingeniería en la actualidad. Resulta difícil creer que en este campo arado y cultivado reiteradas veces por muchos grandes maestros exista aún tierra virgen. En 1975, fue publicado en la "*American Mathematical Monthly*" un artículo titulado "*Período tres implica caos*" por T.Li y J.A.Yorke. En él anunciaron que habían descubierto un nuevo teorema para funciones continuas de una variable. El teorema dice que si una función continua tiene un punto de período tres, debe tener al menos un punto de período n para cada entero positivo n. Aqui se entiende por punto de período 3 aquel punto x_0 tal que $f^3(x_0) = f(f(f(x_0))) = x_0$ y que $f(x_0) \neq x_0, f(f(x_0)) \neq x_0$.

Poco después se descubrió que el teorema de Li y Yorke era sólo un caso especial de un notable teorema publicado por el matemático soviético A. N. Sarkovskii en un Journal ucraniano. La original idea de Sarkovskii fue reordenar los números naturales y probar que si una función continua tiene un punto de período n, entonces tendrá puntos de cualquier período menor que n, en este nuevo ordenamiento. El número 3 resultó ser el mayor de todos en el ordenamiento de Sarkovskii, de modo que tener un punto de período 3 implica tener puntos de todos los otros períodos, y el teorema de Li y Yorke no fue novedad. Sin embargo fue en su artículo donde se introdujo el nuevo concepto de caos, sorprendiendo el hecho que iteraciones de una simple función continua permitan desarrollar estudios caóticos extremadamente complicados. La demostración original de Sarkovskii es larga y difícil de entender, aunque afortunadamente han aparecido algunas más cortas y simples.

Asombrosamente, la herramienta más complicada utilizada en la demostración es el teorema de los valores intermedios:

Teorema 1 *Si f es continua sobre $[a,b]$ y c es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un x_0 entre a y b tal que $f(x_0)=c$.*

Para presentar el teorema de Li y Yorke necesitaremos las dos proposiciones siguientes:

Proposición 1 *Sea f continua sobre $[a,b]$. Si el rango de f contiene a $[a,b]$, entonces la ecuación $f(x)=x$ tiene al menos una solución en $[a,b]$.*

Demostración: Como el rango de f contiene a $[a,b]$, existen x_1 y x_2 en $[a,b]$ tales que $f(x_1)=a\leq x_1$ y $f(x_2)=b\geq x_2$. Consideremos la función continua $g(x)=f(x)-x$. Aplicando el teorema de los valores intermedios se encuentra un punto x_0 entre x_1 y x_2 de modo que $g(x_0)=0$, i.e. existe $x_0\in[a,b]$ tal que $f(x_0)=x_0\diamondsuit$

A un punto que satisface la ecuación $f(x)=x$ se lo denomina un *punto fijo*. Denotemos por $f^0(x)=x, f^1(x)=f(x), f^2(x)=f(f(x)),\ldots,f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$ las *iteraciones* de f. Si x_0 satisface

$$\begin{gathered} f^n(x_0)=x_0 \\ f^k(x_0)\neq x_0 \quad k=1,2,\ldots,n-1, \end{gathered}$$

diremos que x_0 es un punto de *período n*.

Al conjunto $\{x_0, f(x_0),\ldots,f^{n-1}(x_0)\}$ lo denominamos *órbita periódica* de f.

Para $f(x)=x^2, 0, 1$ son puntos fijos, -1 un punto de período 2.

Proposición 2 *Sea f continua sobre $[a,b]$ y sean $I_0, I_1,\ldots,I_{n-1}$ subintervalos cerrados de $[a,b]$. Si*

$$\begin{gathered} f(I_0)\supset I_1,\ f(I_1)\supset I_2,\ldots,f(I_{n-2})\supset I_{n-1} \\ f(I_{n-1})\supset I_0, \end{gathered}$$

entonces la ecuación $f^n(x) = x$ *tiene al menos una solución* $x_0 \in I_0$ *tal que* $f^k(x_0) \in I_k$ *para* $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Demostración: Notar que el caso $n = 1$ es la proposición anterior.

La prueba se basa en el siguiente hecho de simple demostración: Si $f(I) \supset J$, entonces existe $I^* \subset I$ tal que $f(I^*) = J$."

Como $f(I_{n-1}) \supset I_0$, entonces existe $I^*_{n-1} \subset I_{n-1}$ tal que $f(I^*_{n-1}) = I_0$. Ahora $I^*_{n-1} \subset I_{n-1} \subset f(I_{n-2})$, entonces existe $I^*_{n-2} \subset I_{n-2}$ tal que $f(I^*_{n-2}) = I^*_{n-1}$. Siguiendo así, llegamos finalmente a $I^*_1 \subset I_1 \subset f(I_0)$ que implica la existencia de $I^*_0 \subset I_0$ tal que $f(I^*_0) = I^*_1$.

Resumiendo, existen $I^*_k \subset I_k, k = 0, 1, \ldots, n-1$ tales que

$$f(I^*_k) = I^*_{k+1} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$
$$f(I^*_{n-1}) = I_0$$

Entonces, $f(I^*_0) = I^*_1 \subset I_1, \quad f^2(I^*_0) = f(I^*_1) = I^*_2 \subset I^*_2, \quad \ldots \quad , f^{n-1}(I^*_0) = f(^*_{n-2}) = I^*_{n-1} \subset I_{n-1}, \quad f^n(I^*_0) = f(I^*_{n-1}) = I_0 \supset I^*_0$

Como f^n es continua, usando la proposición anterior, existe al menos una solución $x_0 \in I^*_0 \subset I_0$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Además, de las inclusiones anteriores se sabe que $f(x_0) \in I_1, f^2(x_0) \in I_2, \ldots, f^{n-2}(x_0) \in I_{n-2}, f^{n-1}(x_0) \in I_{n-1}$.$\diamond$

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema de Li y Yorke

Teorema 2 (Período tres implica caos) *Sea* f *continua sobre* $[a, b]$, *con su rango contenido en* $[a, b]$. *Si* f *tiene un punto de perído 3, entonces* f *tiene puntos de período* n *para todo entero positivo* n.

Demostración: Sea $x_0 < x_1 < x_2$ una órbita de período tres de f. Luego o $f(x_1) = x_0$ o $f(x_1) = x_2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(x_1) = x_0$. Entonces $f(x_0) = x_2$ y $f(x_2) = x_1$.

Sean $\tilde{I}_0 = [x_0, x_1], \tilde{I}_1 = [x_1, x_2]$. Usando el teorema de los valores intermedios podemos probar que $f(\tilde{I}_0) \supset \tilde{I}_0, f(\tilde{I}_0) \supset \tilde{I}_1, f(\tilde{I}_1) \supset \tilde{I}_0$. Para ello basta notar que si $f(x_1) < y < f(x_0)$, existe x entre x_1 y x_0 tal que $f(x) = y$, entonces $y \in f([x_0, x_1])$. Por lo tanto $[x_0, x_2] = [f(x_1), f(x_0)] \subset f(\tilde{I}_0)$. En consecuencia $\tilde{I}_0 \subset f(\tilde{I}_0)$ y $\tilde{I}_1 \subset f(\tilde{I}_0)$. Por otro lado si $f(x_1) < y < f(x_2)$, existe x entre x_1 y x_2 tal que $f(x) = y$, entonces $y \in f([x_1, x_2])$. Por lo tanto $\tilde{I}_0 = [x_0, x_1] = [f(x_1), f(x_2)] \subset f(\tilde{I}_1)$.

Dado $n \in N$ sean $I_0 = I_1 = \ldots = I_{n-2} = \tilde{I}_0, \quad I_{n-1} = \tilde{I}_1$. Se tiene así que $f(I_k) \supset I_{k+1}$ para $k = 0, 1, \ldots, n-2$ y $f(I_{n-1}) \supset I_0$. La proposición anterior implica que existe $x_0^* \in I_0 = I_0^*$ tal que $f^n(x_0^*) = x_0^*$ y $f^k(x_0^*) \in I_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, i.e. $f^k(x_0^*) \in \tilde{I}_0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-2$ y $f^{n-1}(x_0^*) \in \tilde{I}_1$.

Supongamos que $x_0^*, f(x_0^*), \ldots, f^{n-1}(x_0^*)$ no son puntos de período n, i.e. que $\{x_0^*, \ldots, f^{n-1}(x_0^*)\}$ es una órbita de cardinal menor que n. Esto implica que el período de x_0^* debe ser menor que n y $f^{n-1}(x_0^*)$ volverá a ser uno de los $x_0^*, f(x_0^*), \ldots, f^{n-2}(x_0^*)$. Entonces $f^{n-1}(x_0^*) \in \tilde{I}_0 \cap \tilde{I}_1 = \{x_1\}$. Por lo tanto $x_0^* = f^n(x_0^*) = f(f^{n-1}(x_0^*)) = f(x_1) = x_0$. Así, $f(x_0^*) = f(x_0) = x_2 \notin \tilde{I}_0$ que se contradice con $f(x_0^*) \in \tilde{I}_0$. Por lo tanto, f tiene puntos de período n para cada n natural.$\diamondsuit$

Ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

No es difícil establecer que esta función tiene un punto de período tres, ya que $f(0) = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f(1) = 0$; y aunque el teorema de Li y Yorke da argumentos suficientes, es menos obvio que existen puntos de período n para cualquier otro n natural. Una reformulación de la definición de f en notación binaria hace posible determinar de una manera muy directa puntos periódicos de cualquier período.

Dado $x \in [0, 1]$, sea $x = a_1 a_2 \ldots$ donde $a_i = 0$ o 1 para $i = 1, 2, \ldots$, la representación binaria de x. Por ejemplo $.11001100\ldots$ es la expansión binaria de $\frac{4}{5}$, pues $\frac{4}{5} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 0 \cdot \frac{1}{2^4} + 1 \cdot \frac{1}{2^5} + 1 \cdot \frac{1}{2^6} \ldots$.

Notar que si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, entonces $a_1 = 0$. Esto significa que la primera mitad de la definición de f puede volver a escribirse como:

$$f(.0a_2a_3\ldots) = .1a_2a_3\ldots$$

Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, entonces $a_1 = 1$ de modo que la segunda parte de la definición de f será

$$f(.1a_2a_3\ldots) = 2_1.a_2a_3\ldots = 1 - .a_2a_3\ldots = .a_2'a_3'\ldots$$

donde $a_k' = 1 - a_k$. Así, en notación binaria f puede expresarse como

$$f(.a_1a_2a_3\ldots) = \begin{cases} .1a_2a_3\ldots & \text{si } a_1 = 0 \\ .a_2'a_3'\ldots & \text{si } a_1 = 1 \end{cases}$$

Notar que, en general, $(a_k')' = a_k$. Esto significa que un número con representación binaria $.10a_3a_4\ldots$ tendrá la propiedad

$$f^2(.10a_3a_4\ldots) = .a_3a_4\ldots \tag{1}$$

Una consecuencia de esto es que el punto $.101010\ldots = .\overline{10}$ satisface $f^2(x) = x$ pero un chequeo simple muestra que, de hecho, este punto tiene período 1 y no 2.

Para conseguir un punto de período 2 debemos entonces empezar con $a_1 = 0$. Observar que

$$f^2(.0a_2a_3\ldots) = .a_2'a_3'\ldots \tag{2}$$

Así, $f^2(x) = x$ siempre que $a_2' = 0, a_3' = a_2, a_4' = a_4\ldots$, lo cual da $x = .01010\ldots = .\overline{01}$ que es un punto de período 2.

Combinando (1) y (2) es posible hallar puntos periódicos de cualquier período par. Por ejemplo, para conseguir un punto de período 4, fijamos $a_2' = 1$ y $a_3' = 0$ en (2). Esto da $f^4(.001a_4a_5\ldots) = f^2(.10a_4'a_5'\ldots) = .a_4'a_5'\ldots$. Así, $x = .001a_4a_5\ldots$ satisface $f^4(x) = x$ siempre que $a_4' = 0, a_5' = 0, a_6' = 1, \ldots$. Esto da $x = .\overline{001110}$ que también verifica $f(x) = .101110\overline{001110} \neq x$, $f^2(x) = .10001\overline{110001} \neq x$, $f^3(x) = .1110\overline{001110} \neq x$.

Continuando así podemos fijar $a_4' = 1$ y $a_5' = 0$ en $x = .001a_4a_5\ldots$ y resolviendo $f^6(x) = x$ conseguimos $x = \overline{0010111010}$, ya que $f^6(.00101a_6a_7\ldots) = f^2(.10a_6'a_7'\ldots) = .a_6'a_7'\ldots$ de modo que $a_6' = 0, a_7' = 0, a_8' = 1, a_9' = 0$ y $a_{10}' = 0$.

En general esta técnica ofrece un punto de período $2 + 2k$ de la forma $x = .\overline{0a_1\ldots a_{2k}1a_1'\ldots a_{2k}'}$ donde $a_j = 0$ si j es impar y $a_j = 1$ si j es par, para $1 \leq j \leq 2k$.

El procedimiento anterior puede ser adaptado para hallar puntos de período impar. Por ejemplo, si fijamos $a_2 = 0$ en (2) conseguimos

$$f^3(.00a_3a_4\ldots) = f(.1a_3'a_4'\ldots) = .a_3a_4 \tag{3}$$

Notar que una consecuencia inmediata de (3) es que cero es un punto de período 3.

Para conseguir un punto de período 5 fijamos $a_3 = 1$ y $a_4 = 0$, y usamos (1) para obtener $f^5(.0010a_5a_6\ldots) = f^2(.10a_5a_6\ldots) = .a_5a_6\ldots$. Así, $x = 0010a_5a_6\ldots$ satisface $f^5(x) = x$ siempre que $a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 1$ y $a_8 = 0$. Esto da $x = .\overline{0010}$.

En general, esto produce un punto de período $3 + 2k$ de la forma $x = .00a_1\ldots a_{2k}$ donde $a_j = 1$ si j es impar y $a_j = 0$ si j es par, con $1 \leq j \leq 2k$.◊

Teorema de Sarkovskii

El orden de los números naturales es $1, 2, 3, \ldots$, aunque también pueden ser reordenados como sigue:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\ldots, 2.3, 2.5, 2.7, \ldots, 2^2.3, 2^2.5, 2^2.7, \ldots, 16, 8, 4, 2, 1$$

Esto es, primero se listan todos los números impares, excepto el 1, seguido de sus dobles, sus cuádruples, etc. Esto agota todos los números naturales con excepción de las potencias de 2 que son listados al final en orden decreciente. El número 1 es el último.

Este ordenamiento es conocido como el *ordenamiento de Sarkovskii* de los números naturales y se denota como

$3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ 2.3 \succ 2.5 \succ 2.7 \succ \ldots \succ 2^2.3 \succ 2^2.5 \succ 2^2.7 \succ \ldots \succ 16 \succ 8 \succ 4 \succ 2 \succ 1$

El teorema de Sarkovskii, publicado en la década de los sesenta, utiliza este ordenamiento para presentar la relación que existe entre los distintos períodos de una función continua de un intervalo en si mismo. Más precisamente dice

Teorema 3 (Sarkovskii, 1964) *Sea $f : I \to I$ continua, con un punto de período l. Si $l \succ m$, entonces f tiene un punto de período m.*

Aquí, I puede ser cualquier intervalo, finito o infinito, abierto, cerrado, o semiabierto. Algunas conclusiones inmediatas del teorema son:

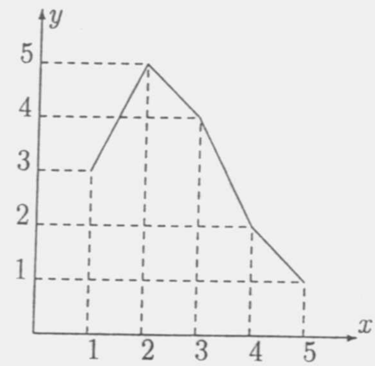
1) Si f tiene un punto periódico, cuyo período no es una potencia de 2, entonces f debe tener infinitos puntos periódicos. Recíprocamente, si f tiene sólo una cantidad finita de puntos periódicos, cada uno de ellos debe tener como período una potencia de 2.

2) Período 3 es el menor período en el ordenamiento de Sarkovskii y por lo tanto, asegura la existencia de todos los otros demás períodos, implicando el teorema de Li y Yorke.

3) El recíproco del teorema de Sarkovskii es verdadero. Existen funciones que tienen puntos de período p y no de períodos mayores en el sentido del ordenamiento de Sarkovskii.

Ejemplo 2 (Una función con un punto de período 5 y que no tiene un punto de período 3)

Sea f la función lineal por partes definida en $[1,5]$ con $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 4, f(4) = 2$ y $f(5) = 1$ cuyo grafo se muestra.



Es fácil chequear que

i) $\frac{10}{3}$ es un punto fijo.

ii) $\frac{5}{3}$ es un punto 2-periódico.

iii) 1, 2, 3, 4, y 5 son puntos 5-periódicos.

Podemos también probar que f no tiene puntos de período 3.

Observando el gráfico notamos que $f[1,2] = [3,5], f^2[1,2] = [1,4]$ y por lo tanto $f^3[1,2] = [2,5]$. Del mismo modo se llega a $f^3[2,3] = [3,5]$ y $f^3[4,5] = [1,4]$. En consecuencia, f^3 no tiene puntos periódicos en ninguno de esos intervalos. Por otro lado, $f^3[3,4] = [1,5]$ y f^3 es monótona decreciente en [3,4] (por qué?), entonces existe un único $x_0 \in [3,4]$ tal que $f^3(x_0) = x_0$. Como $f(x) = 10 - 2x$ sobre [3,4], f tiene un único punto fijo $\bar{x} = \frac{10}{3}$ en [3,4]. Pero $f^3(\bar{x}) = f^2(\bar{x}) = f(\bar{x}) = x_0$, entonces x_0 no es un punto de período 3.

En consecuencia, f no tine puntos de período 3.$\diamondsuit$

El teorema de Sarkovskii no ha terminado la discusión de las órbitas periódicas de las funciones continuas. Por el contrario, ha creado una nueva dirección para estudiar el problema. Muchos artículos y libros han ido apareciendo. La pregunta es por qué muchos grandes analistas clásicos no descubrieron tan importante teorema. La razón es que los analistas clásicos estaban concentrados en las propiedades locales de las funciones, esencialmente, la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. Aunque algunas propiedades globales tales como la continuidad uniforme han sido obtenidas, estas pueden ser derivadas simplemente de las propiedades locales.

Un notable avance en el análisis moderno es ver la situación como un todo en el estudio de funciones. Actualmente, los conceptos tales como iteración y órbitas periódicas tienen relaciones inseparables con las propiedades globales. Por ejemplo, $f(x)$ puede ser iterada sobre [a,b], pero puede no ser iterada sobre cualquier subintervalo de [a,b].

Estudiando las propiedades globales de funciones se forma una nueva rama de la matemática llamada análisis global, que incluye sistemas dinámicos diferenciales, geometría diferencial global, teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, topología diferencial, etc. Esta constituye una de las más importantes direcciones de la matemática actual.

Referencias

[1] Xung-Cheng Huang, *From intermediate value theorem to chaos*, Math. Magazine 62 (1992), 91-103.

[2] T. Li y J. A. Yorke, *Period Three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82, (1975), 985-992.

[3] A. N. Sarkovskii, *Coexistencia de ciclos de una función continua de la recta real en sí misma (en ruso)*, Ukrain. Mat. Ž. 16 (1964), 61-71.

[4] A. N. Sarkovskii, *Sobre ciclos y la estructura de una función continua (en ruso)*, Ukrain. Mat. Ž. 17 (1965), 104-111.

Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de la Patagonia
9000-Comodoro Rivadavia, Provincia del Chubut.