# Teoría de Grafos (Primera Parte)

*Ana María Teresa Lucca*

La figura 1 muestra un mapa carretero que une distintas ciudades del sur de Argentina que una persona debe inspeccionar. Específicamente, este inspector de caminos debe recorrer cada una de estas carreteras y elaborar un informe respecto de las condiciones del camino, la visibilidad de las líneas en los casos de rutas asfaltadas, el estado de las señales de tránsito, y demás. Como el inspector de caminos vive en Comodoro Rivadavia, la forma más económica de revisar cada uno de los caminos sería comenzar en Comodoro Rivadavia y, recorriendo cada ruta exactamente una vez, retornar a Comodoro Rivadavia. ¿Es esto posible?

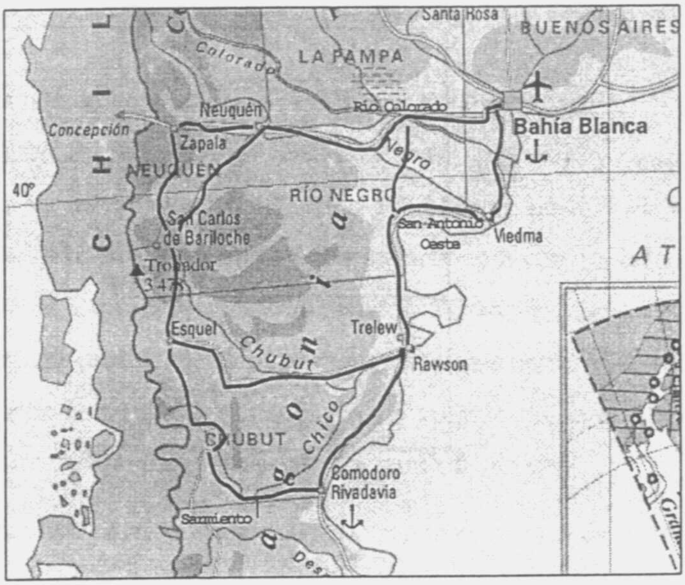


**FIGURA 1**: Mapa de rutas del sur de Argentina.

El problema puede ser modelado como un **grafo**. De hecho, como los grafos se dibujan con puntos y líneas, ellos se ven como mapas de ruta. En la Figura 2, hemos dibujado un grafo $G$ que modela al mapa de la Figura 1. Los puntos en la Figura 2 son llamados **vértices** o **nodos** y a las líneas que conectan los vértices se las llama **aristas** o **arcos**. Más adelante daremos una definición precisa de estos términos. Hemos rotulado cada vértice con las iniciales de la ciudad a la cual representa. Hemos denotado a las aristas con $a_1,\ldots, a_{14}$. En el dibujo de un grafo la única información de importancia es qué vértices están conectados con cuáles aristas. Por esta razón, el grafo de la Figura 2 también puede ser dibujado como muestra la Figura 3.

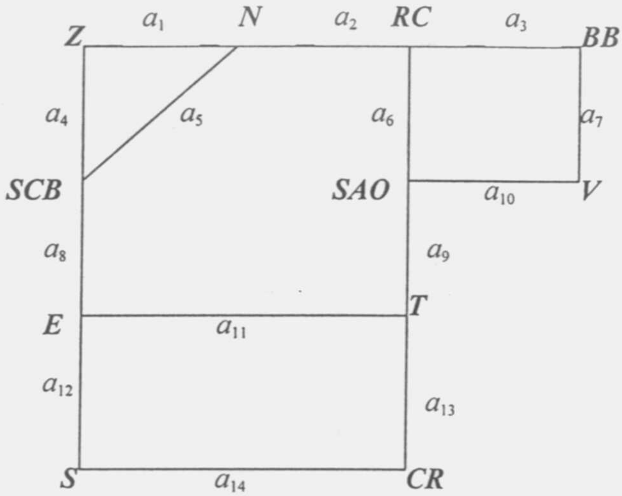


**Figura 2.** Un modelo del mapa de rutas mostrado en la Figura 1.

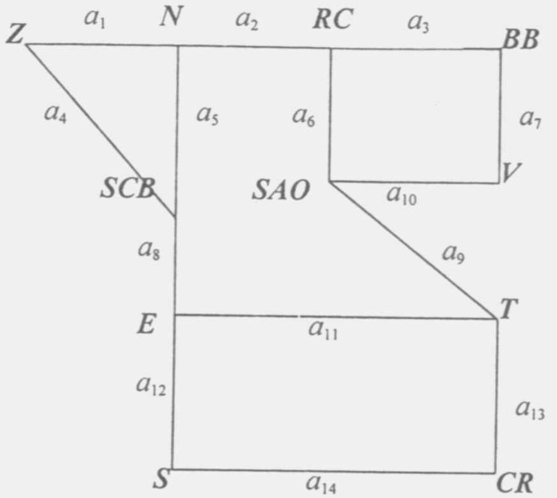


**Figura 3.** Un modelo de grafo alternativo, pero equivalente, del mapa de rutas mostrado en la Figura 1.

Si comenzamos en un vértice $v_0$, viajamos a lo largo de una arista al vértice $v_1$, seguimos a lo largo de otra arista al vértice $v_2$, y así siguiendo, y eventualmente arribamos al vértice $v_n$, diremos que el recorrido completa un **paso** desde $v_0$ a $v_n$. El paso que comienza en *CR*, que sigue luego a *S*, y termina en *E* corresponde a un viaje en el mapa de la Figura 1 que comienza en Comodoro Rivadavia, sigue a Sarmiento, y finaliza en Esquel. El problema del inspector de caminos es reformulado para el modelo del grafo *G* de la siguiente manera: ¿Existe un paso desde el vértice *CR* al vértice *CR* que recorra cada una de las aristas exactamente una vez?

Podemos mostrar que el inspector de caminos no puede comenzar en Comodoro Rivadavia, recorrer cada uno de los caminos exactamente una vez, y retornar a Comodoro Rivadavia. En términos de grafos, no existe un paso desde el vértice *CR* al vértice *CR* en la Figura 2 que recorra cada arista exactamente una vez. Para verlo, supongamos que un tal paso existe y consideremos el vértice *SCB*. Cada vez que arribamos a *SCB* con alguna arista, debemos dejar *SCB* con una arista diferente. Además, toda arista que toque a *SCB* debe ser usada. Así, las aristas a *SCB* se encuentran en pares. Se sigue que un número par de aristas debe tocar a *SCB*. Como son tres las aristas que tocan a *SCB*, tenemos una contradicción. Por lo tanto, no existe un paso del vértice *CR* al vértice *CR* en la Figura 2 que recorra todas las aristas exactamente una vez. El argumento se aplica a un grafo arbitrario $G$. Si $G$ tiene un paso de un vértice $v$ a $v$ que recorre todas las aristas exactamente una vez, un número par de aristas debe tocar a cada vértice. Discutiremos este problema con más detalle en la próxima entrega.

A esta altura ya estamos en condiciones de dar algunas definiciones formales.

**Definición 1:** Un ***grafo*** (***no dirigido***) $G$ consiste de un conjunto $V$ de ***vértices*** (o ***nodos***) y un conjunto $A$ de ***aristas*** (o ***arcos***) tales que cada una de las aristas $a \in A$ está asociada a un par ordenado de vértices. Si existe una única arista $a$ asociada a los vértices $v$ y $w$, escribiremos $a = (v, w)$o $a = (w, v)$. En este contexto, $(v, w)$ denota una arista entre $v$ y $w$ en un grafo no dirigido y *no* un par ordenado.

Un ***grafo dirigido*** (o ***digrafo***) $G$ consiste de un conjunto $V$ de *vértices* (o *nodos*) y un conjunto $A$ de *aristas* (o *arcos*) tales que cada una de las aristas $a \in A$ está asociada a un par ordenado de vértices. Si existe una única arista $a$ asociada al par ordenado $(v, w)$ de vértices, escribimos $a = (v, w)$, que denota a la arista de $v$ a $w$.

Una arista $a$ en un grafo (no dirigido o dirigido) que está asociada al par de vértices $v$ y $w$ se dice ***incidente*** *en* $v$ y $w$, y a $v$ y $w$ se los llama *incidentes en a* o más comúnmente ***vértices adyacentes***.

Si $G$ es un grafo (no dirigido o dirigido) con vértices $V$ y aristas $A$, escribimos

$$G = (V, A).$$

A menos que digamos lo contrario, consideraremos a los conjuntos $A$ y $V$ finitos, y asumiremos que $V$ es no vacío.

**Ejemplo 1.** En la figura 2, el grafo (no dirigido) G consiste del conjunto

$$V = \{CR, S, E, SCB, Z, N, RC, BB, V, SAO, T\}$$

de vértices y el conjunto

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\}$$

de aristas. La arista $a_1$ está asociada con el par no ordenado $\{Z, N\}$ de vértices y la arista $a_{12}$ está asociada al par no ordenado $\{E, S\}$ de vértices. La arista $a_1$ es denotada por $(Z, N)$ o $(N, Z)$ y la arista $a_{12}$ por $(E, S)$ o por $(S, E)$. La arista $a_4$ es incidente en $Z$ y $SCB$ y los vértices $Z$ y $SCB$ son adyacentes.

**Ejemplo 2.** Un grafo dirigido es mostrado en la Figura 4. Las aristas dirigidas son indicadas por flechas. La arista $a_6$ está asociada con el par ordenado de vértices $(v_5, v_4)$ y la arista $a_7$ está asociada con el par ordenado de vértices $(v_5, v_5)$. Así, a las

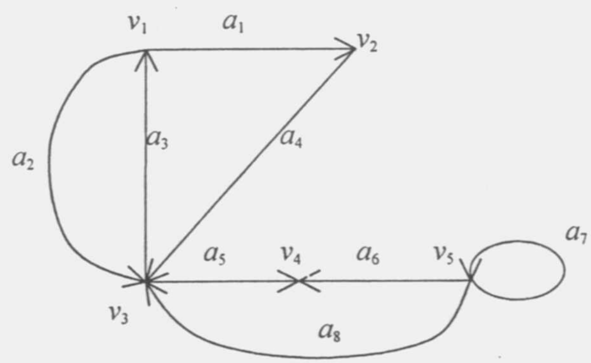


**Figura 4.** Un grafo dirigido.

aristas $a_6$ y $a_7$ las denotamos por $(v_5, v_4)$ y $(v_5, v_5)$, respectivamente.

La definición 1 admite que distintas aristas estén asociadas al mismo par de vértices. Por ejemplo, en la Figura 5, las aristas $a_1$ y $a_2$ están ambas asociadas con el par de vértices $\{v_1, v_2\}$. Tales aristas se llaman **aristas paralelas**. Una arista adyacente en un solo vértice se dice un **lazo** (un **loop** en inglés). Por ejemplo, en la Figura 5 la arista $a_6 = (v_4, v_4)$ es un lazo. Un vértice, tal como el vértice $v_5$ en la Figura 5, que no es adyacente a arista alguna se dice un **vértice aislado**. A un grafo que no tiene ni lazos ni aristas paralelas se lo llama **grafo simple**.

Ejemplo 3. Dado que el grafo de la Figura 2 no tiene ni aristas paralelas ni lazos, es un grafo simple.

Algunos autores no permiten lazos ni aristas paralelas en la definición de grafo. Por ello es importante al leer artículos y libros de este tema chequear qué definiciones se utilizan.

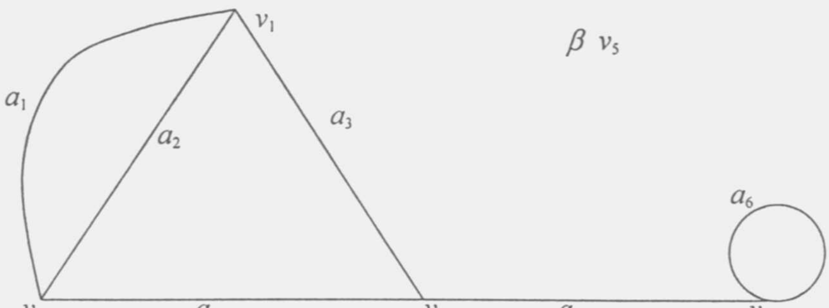


**Figura 5.** Un grafo con aristas paralelas y lazos.

De ahora en más nos referiremos siempre a grafos no dirigidos.

Definiremos ahora algunos grafos especiales que aparecen con frecuencia en Teoría de grafos.

**Definición 2:** El ***grafo completo de n vértices***, que denotaremos con $K_n$, es el grafo simple con $n$ vértices en el cual existe una arista entre todo par de vértices distintos.

Ejemplo 4. El grafo completo de cinco vértices, $K_5$, se muestra en la Figura 6.

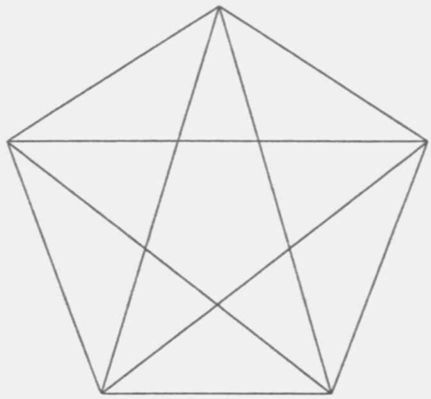

**Figura 6.** El grafo completo $K_5$.

**Definición 3:** Un grafo $G = (V, A)$ es ***bipartito*** si el conjunto de vértices $V$ puede particionarse en dos subconjuntos $V_1$ y $V_2$ tales que cada arista en $A$ es incidente en un vértice en $V_1$ y un vértice en $V_2$.

Ejemplo 5. El grafo en la Figura 7 es bipartito, dado que si hacemos

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_5\} \text{ y } V_2 = \{v_3, v_4\},$$

cada arista es incidente en un vértice en $V_1$ y un vértice en $V_2$.

Notemos que la Definición 3 establece que si $a$ es una arista en un grafo bipartito, entonces $a$ es incidente en un vértice en $V_1$ y un vértice en $V_2$. *No* establece que si $v_1$ es un vértice en $V_1$ y $v_2$ es un vértice en $V_2$, entonces existe una arista entre $v_1$ y $v_2$. Por ejemplo, el grafo de la Figura 8 es bipartito dado que cada arista es incidente en un vértice en $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ y un vértice en $V_2 = \{v_2, v_4\}$. Sin embargo, no todas las aristas entre vértices en $V_1$ y $V_2$ están en el grafo. Por ejemplo, la arista $(v_1, v_4)$ está ausente.

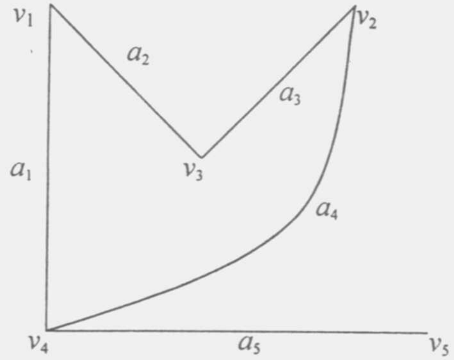


**Figura 7.** Un grafo bipartito.

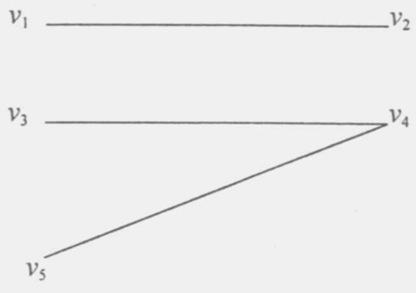


**Figura 8.** Grafo bipartito.

<u>Ejemplo 6</u>. El grafo en la Figura 5 *no* es bipartito. En general la forma más fácil de probar que un grafo no es bipartito es por contradicción.

Supongamos que el grafo de la Figura 5 es bipartito. Entonces el conjunto de vértices puede particionarse en dos subconjuntos $V_1$ y $V_2$ tales que cada una de las aristas son incidentes en un vértice en $V_1$ y un vértice en $V_2$.Consideremos los vértices $v_1$, $v_2$ y $v_3$. Puesto que $v_1$ y $v_2$ son adyacentes, uno está en $V_1$ y el otro en $V_2$. Podemos asumir que $v_1$ está en $V_1$ y que $v_2$ está en $V_2$. Como $v_2$ y $v_3$ son adyacentes y $v_2$ está en $V_2$, $v_3$ está en $V_1$. Como $v_1$ y $v_3$ son adyacentes y $v_1$ está en $V_1$, $v_3$ está en $V_2$. Pero entonces $v_3$ está en $V_1$ y en $V_2$, que es una contradicción, pues $V_1$ y $V_2$ son disjuntos. Por tanto, el grafo de la Figura 5 no es bipartito.

> **Definición 4:** El ***grafo completo bipartito de m y n vértices***, denotado $K_{m,n}$, es el grafo simple cuyo conjunto de vértices está particionado en los conjuntos $V_1$ con $m$ vértices y $V_2$ con $n$ vértices, en los cuales existe una arista entre cada par de vértices $v_1$ y $v_2$, con $v_1$ en $V_1$ y $v_2$ en $V_2$.

Ejemplo 7. El grafo completo bipartito de dos y tres vértices, $K_{2,3}$, se muestra en la Figura 9.

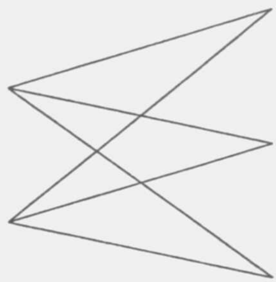

**Figura 9.** El grafo completo bipartito $K_{2,3}$.

En ocasiones, como por ejemplo para hacer uso de la computadora para analizar un grafo, como veremos, es necesaria una representación más formal. Un método para representar un grafo usa matrices.

Ejemplo 8. **Matriz de Adyacencia:** Consideremos el grafo de la Figura 7. Para obtener la matriz de adyacencia de este grafo, primero seleccionemos un ordenamiento de los vértices, digamos $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$. Luego, rotulemos las filas y columnas de una matriz con los vértices ordenados. El elemento en esta matriz es 1 si los vértices correspondientes a la fila y la columna son adyacentes y 0 en otro caso. La matriz de adyacencia para este grafo es

$$\begin{array}{c|ccccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Notemos que mientras que la matriz de adyacencia admite representar lazos, no ocurre lo mismo con las aristas paralelas; sin embargo, si modificamos la definición de matriz de adyacencia considerando como elementos en ella a los enteros no negativos, podemos representar las aristas paralelas. En la matriz de adyacencia modificada, interpretamos el elemento $i$, $j$ como el número de aristas entre $i$ y $j$. Así, la matriz de adyacencia para el grafo de la Figura 5 es

$$\begin{array}{c|ccccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

La matriz de adyacencia no es una representación muy eficiente de un grafo, no dirigido puesto que como la matriz es simétrica respecto de la diagonal principal, la información, excepto la de la diagonal principal, aparece dos veces. Sin embargo, veremos más adelante que brinda otro tipo de información que resulta de utilidad.

Otro uso de representación matricial de un grafo es el que se detalla en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 9. Matriz de incidencia:** Para obtener la matriz de incidencia de la Figura 5, rotulemos las filas con los vértices y las columnas con las aristas (en algún orden arbitrario). El elemento de la fila $v$ y columna $a$ es 1 si $a$ es incidente en $v$ y 0 en otro caso. Así, la matriz de incidencia para el grafo de la Figura 5 es

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \end{array}$$

Una columna tal como $a_6$ es interesante por representar un lazo.

La matriz de incidencia permite representar tanto a las aristas paralelas como a los lazos. Observemos que en un grafo sin lazos cada columna tiene dos números uno.

Veamos cómo obtener algunos de los resultados vistos hasta ahora haciendo uso de la computadora, por medio del programa ***Mathematica***.

En principio, para trabajar en Teoría de grafos con *Mathematica* debe cargarse el paquete correspondiente, para lo cual basta utilizar el siguiente comando:

In[1] : = **Needs["DiscreteMath`Combinatorica`"]**

Para definir un grafo no dirigido *Mathematica* cuenta con el comando **Graph**, cuya sintaxis se detalla a continuación:

| |
|---|
| **Graph**[$g$, $v$] define el grafo cuya matriz de adyacencia es $g$ y cuya lista de las coordenadas de los vértices es $v$. |

Las coordenadas de los vértices pueden ser definidas por el usuario, o en forma aleatoria utilizando el comando **RandomVertices**[*g*].

**Ejemplo 10**. Para cargar en *Mathematica* el grafo de la figura 7 procedemos como sigue:

| | |
|---|---|
| Definimos la matriz de adyacencia *matady1* del grafo por medio de listas: entre llaves se coloca cada fila de la matriz, y a su vez cada fila también se encierra entre llaves. | In[2]:=matady1= {{0,0,1,1,0},{0,0,1,1,0}, {1,1,0,0,0},{1,1,0,0,1},{0,0,0,1,0}}; |
| Definimos el grafo con nombre *grafo1* usando la matriz anterior, y asignando a elección la ubicación de cada vértice en el plano de la pantalla, listando las coordenadas entre llaves. | In[3]:= grafo1=**Graph**[matady,{{0,2},{2, 2},{1,1},{1/2,0},{2,0}}]**;** |
| Este comando nos muestra el dibujo del grafo de nombre *grafo1*. | In[4]:= **ShowGraph**[grafo1]**;** |

Para obtener la cantidad de vértices y de aristas de un grafo, *Mathematica* cuenta con los comandos:

| |
|---|
| **V**[*g*] provee el número de vértices del grafo *g*. |

| |
|---|
| **M**[*g*] da el número de aristas del grafo no dirigido *g*. |

Otros comandos de utilidad son:

| |
|---|
| **SimpleQ**[*g*] devuelve True si *g* es un grafo simple. |

| |
|---|
| **K**[*n*] crea un grafo completo de *n* vértices. |

| |
|---|
| **BipartiteQ**[$g$] devuelve True si el grafo $g$ es bipartito. |

| |
|---|
| **K**[$m$,$n$] crea un grafo completo bipartito de $m$ y $n$ vértices. |

Así, para ver el grafo completo bipartito de 3 y 3 vértices hacemos:

In[5] : = **ShowGraph[K**[3,3]**];**

Con

In[6] : = **IncidenceMatrix[K**[3,3]**]**

obtenemos la matriz de incidencia de este grafo. También, con

In[7] : = **BipartiteQ**[grafo1]

vemos que efectivamente el grafo de la Figura 7 es bipartito.

Si pensamos a los vértices de un grafo como ciudades y a las aristas como caminos, un paso corresponde a un recorrido comenzando en alguna ciudad, pasando por varias ciudades, y terminando en alguna ciudad. Daremos ahora una definición formal de paso.

**Definición 5.** Sean $v_0$ y $v_n$ vértices de un grafo. Un ***paso*** de $v_0$ a $v_n$ de longitud $n$ es una sucesión de $n + 1$ vértices y $n$ aristas que comienza en el vértice $v_0$ y finaliza con el vértice $v_n$,

$$(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, ..., v_{n-1}, a_n, v_n),$$

en el cual la arista $a_i$ es incidente de vértices $v_{i-1}$ y $v_i$ para $i = 1, ..., n$.

En otras palabras la Definición 5 nos indica: comience en el vértice $v_0$; siga a lo largo de la arista $a_1$ a $v_1$; vaya por la arista $a_2$ a $v_2$; y así siguiendo.

**Ejemplo 11**. En el grafo de la Figura 10,

$$(1, a_1, 2, a_2, 2, a_4, 3, a_6, 4)$$

es un paso de longitud 4 desde el vértice 1 al vértice 4.

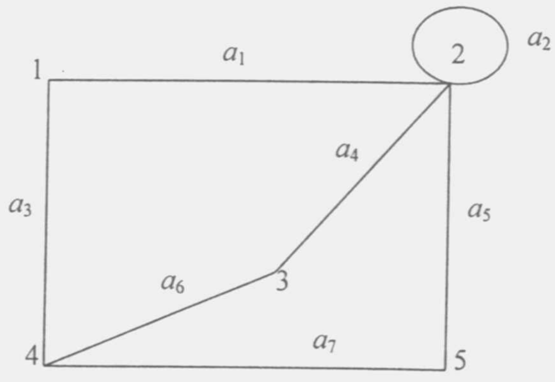


**Figura 10.** Un grafo conectado con pasos $(1, a_1, 2, a_2, 2, a_4, 3, a_6, 4)$ de longitud 4 y (2) de longitud 0.

Ante la ausencia de aristas paralelas pueden omitirse las aristas al denotar un paso. Por ejemplo, el paso del Ejemplo 11 también se expresa como

$$(1, 2, 2, 3, 4)$$

**Ejemplo 12**. En el grafo de la Figura 10, el paso (2) que consta solamente del vértice 2 es un paso de longitud 0 desde el vértice 2 al vértice 2.

Carguemos el grafo de la Figura 10 en *Mathematica* :

In[8] : = matady2 = {{0,1,0,1,0},{1,1,1,0,1},{0,1,0,1,0},{1,0,1,0,1},{0,1,0,1,0}};

In[9] : = grafo2 = **Graph[**matady2,{{0,2},{2,2},{1,1},{0,0},{2,0}}**];**

Para ver el grafo hacemos

In[10] : = **ShowGraph[**grafo2**];**

Como podrá observar el lector en pantalla, *Mathematica* no dibuja los lazos. Sin embargo más adelante veremos que esta información no se pierde.

**Teorema 1:** Si $A$ es la matriz de adyacencia de un grafo simple, el elemento $i\,j$-ésimo de $A^n$ es igual al número de pasos de longitud $n$ del vértice $i$ al vértice $j$, para cada $n = 1, 2, \ldots$ .

**Demostración:** Usaremos inducción sobre $n$.

El caso $n = 1$ resulta trivial, pues $A^1 = A$. El elemento $i\,j$-ésimo es 1 si existe una arista de $i$ a $j$, que es un paso de longitud 1, y 0 en otro caso. Así, el teorema resulta verdadero.

Asumimos ahora que el teorema vale para $n$. Como $A^{n+1} = A^n\,A$, el elemento $i\,k$-ésimo de $A^{n+1}$ se obtiene multiplicando la entrada matricial ($il$) de $A^n$ por la entrada matricial ($lk$) de A y sumando todos estos términos. Esquemáticamente,

$$\begin{array}{ccc} & & \text{columna } k \text{ de } A \\ \text{fila } i \text{ de } A^n & (s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots, s_m) & \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_j t_j + \cdots + s_m t_m$$

$$= \text{elemento } i\,k \text{ de } A^{n+1}$$

Por hipótesis inductiva, $s_j$ indica el número de pasos de longitud $n$ de $i$ a $j$ en el grafo $G$. Si $t_j$ es 0, no existe arista de $j$ a $k$, de modo que existen $s_j\,t_j = 0$ pasos de longitud $n + 1$ de $i$ a $k$, cuyo última arista es $(j, k)$. Si $t_j$ es 1, existe una arista del vértice $j$ al vértice $k$. Como existen $s_j$ pasos de longitud $n$ de $i$ a $j$, existen $s_j\,t_j = s_j$ pasos de longitud $n + 1$ del vértice $i$

al $k$, siendo $(j, k)$ la última arista de ellos. Sumando sobre todos los $j$, contaremos todos los pasos de longitud $n + 1$ de $i$ a $k$, y el paso inductivo queda verificado.

Por el Principio de Inducción resulta la validez del teorema.

c.q.d.

Un **grafo conexo** (**connected** en inglés) es un grafo en el cual existe un paso de un vértice cualquiera a otro vértice cualquiera. La definición formal es:

**Definición 11:** Un grafo $G$ se dice *conexo* si dados cualesquiera vértices $v$ y $w$ en $G$, existe un paso de $v$ a $w$.

<u>Ejemplo 13</u>. El grafo $G$ de la figura 10 es conexo dado que, para cualesquiera vértices $v$ y $w$ en $G$, existe un paso de $v$ a $w$.

<u>Ejemplo 14</u>. El grafo $G$ de la Figura 11 no es conexo, pues, por ejemplo, no existe un paso desde el vértice 1 al vértice 6.

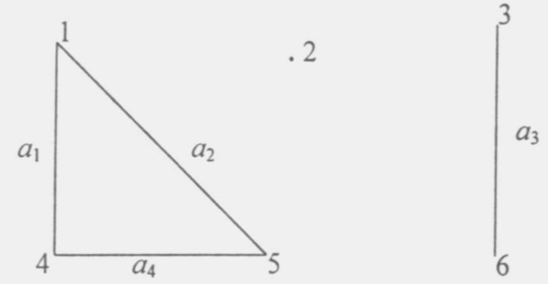


**Figura 11.** Un grafo no conexo.

<u>Ejemplo 15</u>. Sea $G$ el grafo cuyo conjunto de vértices consta de las 23 provincias de la República Argentina. Hacemos una arista entre las provincias $v$ y $w$ si $v$ y $w$ están divididas por una frontera. Por ejemplo, existe una arista entre Buenos Aires y Córdoba y entre Chubut y Santa Cruz. No existe una arista entre Mendoza y Río Negro, ni entre Neuquén y La Pampa. (Si se tocan no se cuenta; las provincias deben

estar separadas por un borde). El grafo $G$ no es conexo porque no existe un paso entre Tierra del Fuego y cualquier otra provincia.

*Mathematica* cuenta con el comando **ConnectedQ** que nos permite determinar si un grafo es o no conexo.

| |
|---|
| **ConnectedQ**[*g*] devuelve True si el grafo no dirigido *g* es conexo. |

Haciendo

In[11] : = **ConnectedQ**[grafo2]

vemos que efectivamente el grafo de la Figura 10 no es conexo. En cambio, si cargamos el grafo de la Figura 11:

In[12] : = grafo3 = **Graph[**{{0,0,0,1,1,0},{0,0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0,1},{1,0,0,0,1,0},

{1,0,0,1,0,0},{0,0,1,0,0,0}},{{0,1},{1,1},{2,1},{0,0},{1,0},{2,0}}**];**

comprobamos que no es un grafo conexo mediante

In[13] : = **ConnectedQ**[grafo3]

Como vemos en las Figuras 10 y 11, un grafo conexo consta de una "parte", mientras que un grafo que no es conexo consta de dos o más "partes". Estas partes son subgrafos del grafo original y son llamados sus **componentes**.

Un subgrafo $G'$ de un grafo $G$ es obtenido seleccionando ciertas aristas y vértices de $G$ bajo la restricción de que si seleccionamos una arista $a$ en $G$ que es incidente de vértices $v$ y $w$, debemos incluir a $v$ y $w$ en $G'$. Formalizando esto tenemos la siguiente definición.

**Definición 12:** Sea $G = (V, A)$ un grafo. Diremos que $(V', A')$ es un ***sub-grafo*** de $G$ si

(a) $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$ .

(b) Para toda arista $a' \in A'$, si $a'$ es incidente en $v'$ y $w'$, entonces

(c) $v', \; w' \in V'$.

**Ejemplo 16**. El grafo $G' = (V', A')$ de la Figura 12 es un subgrafo del grafo $G = (V, A)$ de la Figura 11, puesto que $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$, con $V' = \{1, 4, 5\}$ y $A' = \{a_1, a_2, a_4\}$.

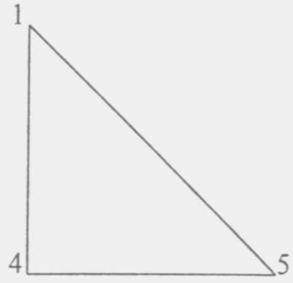


**Figura 12.** Un subgrafo del grafo de la Figura 11.

**Definición 13:** Sea $G$ un grafo y sea $v$ un vértice en $G$. El subgrafo $G'$ de $G$ que consta de todas las aristas y vértices de $G$ que están contenidas en algún paso que comienza en $v$ es llamado la ***componente*** de $G$ que contiene a $v$.

**Ejemplo 17**. El grafo de la Figura 10 tiene una componente, él mismo. En efecto, un grafo es conexo sí y sólo sí tiene exactamente una componente.

Con *Mathematica* podemos hallar las componentes de un grafo:

| |
|---|
| **ConnectedComponents**[*g*] retorna los vértices del grafo *g* particionados en componentes conexas. |

Así, las componentes del grafo de la Figura 11 se hallan mediante:

In[14] : = **ConnectedComponents**[grafo3]

**Definición 14:** Sean $v$ y $w$ vértices en un grafo $G$. Un ***paso simple*** de $v$ a $w$ es un paso desde $v$ a $w$ que no tiene vértices repetidos. Un ***ciclo*** (o ***circuito***) es un paso de longitud no nula de $v$ a $v$ en el cual ninguna arista se repite. Un ***ciclo simple*** es un ciclo de $v$ a $v$ en el cual, excepto para los vértices inicial y final que son ambos iguales a $v$, no se repiten vértices.

**Ejemplo 18.** Para el grafo de la Figura 10 tenemos

| **Paso** | **Paso simple?** | **Ciclo?** | **Ciclo simple?** |
|---|---|---|---|
| (2, 2) | No | Si | Si |
| (5, 4, 3, 2) | Si | No | No |
| (1, 4, 3, 4, 5) | No | No | No |
| (2, 3, 4, 5, 2, 2) | No | Si | No |

Asociados a estos conceptos *Mathematica* cuenta con el comando:

| |
|---|
| **FindCycle**[*g*] encuentra una lista de vértices que definen un ciclo no dirigido en el grafo *g*. |

Para hallar ciclos del grafo de la Figura 11 con *Mathematica* hacemos

In[15] : = **FindCycle**[grafo2]

El lector podrá comprobar que *Mathematica* devuelve el ciclo (2, 2); precisamente el lazo que se advertía no aparecía en pantalla al dibujar el grafo. Para hallar otro ciclo, podemos modificar la matriz de adyacencia, eliminando el lazo. Esto es,

In[16]: = matady2 = {{0,1,0,1,0},{0,1,1,0,1},{0,1,0,1,0},{0,0,1,0,1},{0,1,0,1,0}};

In[17] : = grafo2 = **Graph**[matady2,{{0,2},{2,2},{1,1},{0,0},{2,0}}];

Luego,

In[18] : = **FindCycle**[grafo2]

devuelve el ciclo (5, 2, 3, 4, 5).

**Teorema 2.** Si un grafo $G$ contiene un ciclo de $v$ a $v$, contiene también un ciclo simple de $v$ a $v$.

**Dem.** Sea

$$C = (v_0, a_1, v_1, ..., a_i, v_i, a_{i+1}, ..., a_j, v_j, a_{j+1}, v_{j+1}, ..., a_n, v_n)$$

un ciclo de $v$ a $v$, donde $v = v_0 = v_n$. Si $C$ no es un ciclo simple, entonces para algún $i < j < n$ tenemos $v_i = v_j$. Reemplazamos entonces a $C$ por el ciclo $C'$ dado por

$$C' = (v_0, a_1, v_1, ..., a_i, v_i, a_{j+1}, v_{j+1}, ..., a_n, v_n).$$

Si $C'$ no es un ciclo simple de $v$ a $v$, repetimos este procedimiento. Eventualmente obtendremos un ciclo de $v$ a $v$.

c.q.d.

**Definición 15:** Sea $G$ un grafo. El ***grado de un vértice*** $v$ de $G$ es el número de aristas incidentes en $v$, y se denota $\delta(v)$. Cada lazo en $v$ *contribuye en 2 a* $\delta(v)$.

Ejemplo 19. En el grafo de la Figura 10, el grado del vértice 2 es 5.

Observemos que es factible obtener el grado de un vértice $v$ en un grafo simple $G$ sumando las filas $v$ o columnas $v$ en la matriz de adyacencia de $G$.

También, en el caso de tener la matriz de incidencia del grafo $G$, la suma de una fila corresponde al grado del vértice identificado con esa fila.

**Teorema 3.** El número de vértices impar en un grafo es par.

**Dem.** Sea $G$ un grafo. Sea $N$ el número de vértices de grado impar de $G$. Denotemos por $N(1)$ al número de vértices de grado 1, $N(2)$ al número de vértices de grado 2, ..., y sea $S$ la suma de los grados de los vértices. Así,

$$S = 1 \,.\, N(1) + 2 \,.\, N(2) + \ldots + k \,.\, N(k),$$

para algún $k$. Como el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él, $S$ es dos veces el número de aristas de $G$. Entonces $S$ es par. Si escribimos la expresión anterior de $S$ en la forma

$$\begin{aligned} S = 1 \,.\, N(1) + \ldots + (2n+1) \,.\, N(2n+1) + &\quad \text{(nodos impares)} \\ + 2 \,.\, N(2) + \ldots + 2m \,.\, N(2m) &\quad \text{(nodos pares)} \end{aligned}$$

entonces

$$S' = S - [2 \,.\, N(2) + \ldots + 2m \,.\, N(2m)] = 1 \,.\, N(1) + \ldots + (2n+1) \,.N(2n+1),$$

con $S'$ par (por serlo $S$). Así,

$$\begin{aligned} S' &= 1 \,.\, N(1) + \ldots + (2n+1) \,.\, N(2n+1) \\ &= 1 + \ldots + 1 + \ldots. + (2n+1) + \ldots + (2n+1) \end{aligned}$$

y en total hay $N$ términos, pues $N$ es la cantidad de vértices impares. Además, cada término en $S'$ es impar. Luego, si $S'$ es par y los términos de la suma son impares, entonces $N$ es par.

c.q.d.

**Definición 16.** Dos grafos $G_1$ y $G_2$ son **isomorfos** si existen una correspondencia uno a uno $f$ de los vértices de $G_1$ a los vértices de $G_2$ y una correspondencia uno a uno $g$ de las aristas de $G_1$ a las aristas de $G_2$, de modo que una arista $a$ es incidente en $v$ y $w$ en $G_1$ sí y sólo sí la arista $g(a)$ es incidente en $f(v)$ y $f(w)$ en $G_2$. Al par de funciones $f$ y $g$ se las llama un ***isomorfismo*** de $G_1$ sobre $G_2$.

**Ejemplo 20.** Un isomorfismo para los grafos $G_1$ y $G_2$ de la Figura 13 está definido por

$$f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 5,\ f(4) = 2,\ f(5) = 4$$

$$g(x_i) = y_i,\quad i = 1, ..., 5.$$

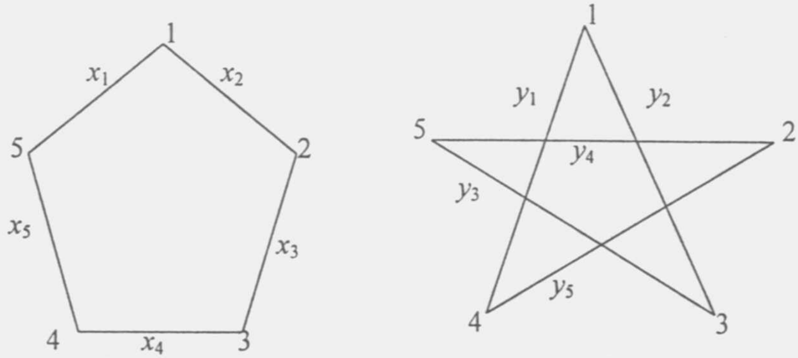


**Figura 13.** Grafos isomorfos.

Es fácil probar que dos grafos simples $G_1$ y $G_2$ son isomorfos sí y sólo sí para algún orden de sus vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.

*Mathematica* cuenta con los siguientes comandos:

| |
|---|
| **IsomorphicQ**[$g$, $h$] devuelve True si los grafos $g$ y $h$ son isomorfos. |

**Isomorphism**[*g*, *h*] devuelve un isomorfismo entre los grafos *g* y *h*, si existe.

Compruebe a través de *Mathematica* que los grafos de la Figura 13 son isomorfos. Al querer hallar el isomorfismo, *Mathematica* devuelve la lista {1,3,5,2,4} que se interpreta por:

| En el primer grafo, al vértice ... | le corresponde en el segundo el vértice |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |
| 4 | 2 |
| 5 | 4 |

Invito al lector a experimentar los conceptos aquí analizados con el uso del Mathematica.

Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de la Patagonia . San Juan Bosco.
9000 – COMODORO RIVADAVIA.