Problemas y Soluciones

Competencia E. Paenza

Problema 1. *Definir, si existe, una matriz "infinita" de números enteros positivos* $A := (a_{ij})_{1\leq i,j<\infty}$, *que verifique la siguiente propiedad: todo entero positivo aparece exactamente una vez en cada "fila" y en cada "columna" de* A.

Resolución: (Participante 14087)

Utilizaremos una construcción de tipo recurrente. Consideremos casos finitos. Si tenemos una matriz de 1×1 y queremos que no se repitan números, como es trivial, tomamos el único elemento de la matriz igual a 1. Al considerar una matriz de 2×2, sigue siendo muy simple; tomamos $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obviamente, para estos casos particulares podríamos utilizar números cualesquiera pero elegimos los primeros enteros positivos pues consideramos a estas matrices como ubicadas en el extremo superior izquierdo de nuestra matriz infinita.

Las matrices consideradas a continuación serán conformadas a partir de las matrices dadas. Tenemos matrices del tipo $2^k \times 2^k$ con $k \in \mathbb{N}_0$.

Para una matriz de $2^2 \times 2^2$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir que repetimos la matriz anterior sobre la original y completamos los cuadrantes que quedan con dos matrices iguales de 2×2 que guardan la misma relación entre sus elementos que la matriz anterior pero con los números 3 y 4.

La siguiente matriz será entonces una matriz de $2^3 \times 2^3$ como sigue:

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\
3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\
4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\
7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{pmatrix}$$

O sea que, en general, construimos matrices de $2^k \times 2^k$, repitiendo sobre la diagonal las matrices de $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ obtenidas anteriormente y completando los cuadrantes que quedan con matrices de $2^{k-1} \times 2^{k-1}$, formadas por los 2^{k-1} números enteros positivos que siguen dispuestos de la misma forma que en la matriz de $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ obtenida en el paso anterior.

Podemos repetir este proceso en forma infinita obteniendo así una matriz infinita del tipo buscado.

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
2 & 1 & 4 & 3 & \dots \\
3 & 4 & 1 & 2 & \dots \\
4 & 3 & 2 & 1 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

Podemos observar que en cada fila y en cada columna tendremos todos los enteros positivos (esto es obvio en la primera fila y la primera columna) y nunca se repetirán puesto que no se repiten en las filas y columnas de las sucesivas matrices de $2^k \times 2^k$, ya que en cada nueva iteración, los números que ya habían aparecido, aparecen en el cuadrante opuesto y los números nuevos, al tener la misma distribución que los anteriores, tampoco se repiten en cada fila y columna.

Problema 2 *Sea p un entero, $p > 1$. Consideramos la sucesión de números reales $(x_n)_{n\geq 1}$ definida como*

$$x_n := (\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt[p]{1+\frac{1}{k}}) - n.$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión. Si converge, calcular su límite.

Resolución:(Participante 14122)

$x_n = (\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt[p]{1+\frac{1}{k}}) - n = \sum_{k=n+1}^{2n}(\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1)$.
Notar que los términos de la suma son positivos.
Como $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{k} < (1+\frac{1}{pk})^p = 1 + \binom{p}{1}\frac{1}{pk} + \text{cosas positivas}$$

Entonces $\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1 \leq \frac{1}{pk}$.
Luego, $x_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{pk} < \frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{p}\frac{n}{n+1}$.
Ahora veamos que, para k grande,

$$\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1 \geq \frac{1}{p(k+1)}$$

es lo mismo que ver que

$$1 + \frac{1}{k} \geq (1+\frac{1}{p(k+1)})^p = 1 + \binom{p}{1}\frac{1}{p(k+1)} + \binom{p}{2}\frac{1}{(p(k+1))^2} + O(\frac{1}{(k+1)^2}).$$

Hay que ver que

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \geq \binom{p}{2}\frac{1}{(p(k+1))^2} + O(\frac{1}{(k+1)^2})$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{p-1}{2p}\frac{1}{(k+1)^2} + O(\frac{1}{(k+1)^2}).$$

Para cada ϵ, existe k_0 tal que si $k \geq k_0$,

$$O(\frac{1}{(k+1)^2}) \leq \frac{\epsilon}{(k+1)^2}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{\epsilon}{(k+1)^2} \geq \frac{p-1}{2p}\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\frac{k+1}{k} - \epsilon \geq \frac{p-1}{2p}.$$

Como $\frac{p-1}{2p} \leq \frac{1}{2}$ podemos tomar $\epsilon = \frac{1}{2}$ y entonces $\frac{k+1}{k} \geq \epsilon + \frac{p-1}{2p}$.
Entonces

$$\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1 \geq \frac{1}{p(k+1)}$$

para k grande.
O sea, para n grande,

$$x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} (\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{p(k+1)} \geq \frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(2n+1)} = \frac{1}{p}\frac{n}{2n+1}$$

Estas cotas no aportan mucho pero escribimos dos pasos intermedios.

$$\frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq x_n \geq \frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1}.$$

Hay que ver cómo es el límite de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
Acotando, por el criterio de la integral para una función decreciente:

$$\int_{n+2}^{2n+1} \frac{1}{x}dx \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \int_{n+1}^{2n} \frac{1}{x}dx.$$

Entonces

$$ln(2n+1) - ln(n+2) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq ln(2n) - ln(n+1)$$

$$ln(\frac{2n+1}{n+2}) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq ln(\frac{2n}{n+1})$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = ln(2).$$

Análogamente $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} = ln(2)$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{ln(2)}{p}$ y converge siempre por Sandwich.

Problema 3 *Probar que, cualquiera sea $l > 0$, hay un par de números enteros coprimos (a, b) tal que ningún punto entero del interior del cuadrado con vértices (a, b), $(a + l, b)$, $(a, b + l)$, $(a + l, b + l)$ tiene coordenadas coprimas.*

Resolución:(Participante 14046)

El problema equivale a demostrar que $\forall l > 0$ entero, existen enteros coprimos a, b tales que:

$$(a + i\,,\, b + j) \neq 1,\ \ \forall i, j\ :\ 1 \leq i, j \leq l.$$

Sean $p_1, p_2, \dots p_{l^2}$ primos distintos. Consideremos el siguiente sistema lineal de congruencias:

$$\begin{aligned}
x + 1 &\equiv 0 \quad (p_1 p_2 \cdots p_l)\\
x + 2 &\equiv 0 \quad (p_{l+1} p_{l+2} \cdots p_{2l})\\
&\ \vdots\\
x + l &\equiv 0 \quad (p_{l^2-l+1} \cdots p_{l^2})
\end{aligned}$$

Como los p_i son primos, los módulos del sistema son coprimos dos a dos. Luego, por el teorema chino del resto, el sistema tiene una única solución módulo $\prod_{i=1}^{l^2} p_i = m$.

Sea a esta solución con $0 \leq a \leq m - 1$.

Ahora, consideramos el sistema lineal de congruencias siguiente:

$$\begin{aligned}
x + 1 &\equiv 0 \quad (\textstyle\prod_{i=0}^{l-1} p_{il+1})\\
x + 2 &\equiv 0 \quad (\textstyle\prod_{i=0}^{l-1} p_{il+2})\\
&\ \vdots\\
x + l &\equiv 0 \quad (\textstyle\prod_{i=0}^{l-1} p_{il+l})
\end{aligned}$$

De nuevo, los módulos son coprimos dos a dos porque son productos de conjuntos disjuntos de primos. Sea $b' \in \{0, 1, \ldots m-1\}$ solución de este sistema. Entonces todas las soluciones son de la forma $b' + mt$ con t entero.

Es claro que $(a+i, b'+mt+j) \neq 1$ porque tanto $a+i$ como $b'+mt+j$ son divisibles por $p_{(i-1)l+j}$.

Luego, sólo nos falta hallar t de modo que $(a, b'+mt) = 1$.

Sea, entonces, la ecuación en t:

$b' + mt \equiv 1 \ (\bmod a)$.

Esta ecuación tiene solución si y sólo si $(a, m) = 1$. Para que esta condición se cumpla, basta con elegir a todos los p_i de modo que sean mayores que l, ya que $a+i \equiv 0 \ (p_{(i-1)l+1} \cdots p_{il})$ para todo $i = 1, \ldots, l$. De donde a no es divisible por ninguno de los p_i. Por lo tanto $(a, m) = 1$.

Sean, entonces, $p_1, \ldots, p_{l^2}$ primos distintos mayores que l y sean m, a y b' como antes. Sea t_0 la solución de la ecuación:

$b' + mt \equiv 1 \ (\bmod a)$.

Sea $b = b' + mt_0$. Entonces el par (a, b) satisface lo pedido.

Problema 4 *¿Existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ con más de un término tal que la cantidad de términos de $p^2(x)$ sea menor o igual que la cantidad de términos de $p(x)$?*

Resolución: (Participante 14055)

Polinomios con dos términos:

$p(x) = c_i x^i + c_j x^j$ con $c_i \neq 0$ y $c_j \neq 0$.

$p^2(x) = c_i^2 x^{2i} + c_j^2 x^{2j} + 2c_i c_j x^{i+j}$ tiene 3 términos no nulos, entonces con dos términos no se puede.

Polinomios con tres términos:

$p(x) = c_i x^i + c_j x^j + c_l x^l$ con $c_i \neq 0$, $c_j \neq 0$ y $c_l \neq 0$.

$p^2(x) = c_i^2 x^{2i} + c_j^2 x^{2j} + c_l^2 x^{2l} + 2c_i c_j x^{i+j} + 2c_i c_l x^{i+l} + 2c_l c_j x^{l+j}$ tiene 6 términos no nulos, entonces con tres términos no se puede.

Haciendo las cuentas se ve que tampoco se puede con polinomios del tipo $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$, ni con polinomios del tipo $p(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$.

Probamos, ahora, con polinomios del tipo $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4$.

Entonces se debe verificar el sistema que sigue o cuatro ecuaciones cualesquiera de él:

$$\begin{aligned} c_1^2+2c_1c_0 &= 0\\ c_0c_3+c_1c_2 &= 0\\ c_2^2+2c_0c_4+2c_1c_3 &= 0\\ c_1c_4+c_2c_3 &= 0\\ c_3^2+2c_2c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Nos queda:

$$\begin{aligned} c_1^2 &= -2c_0c_2\\ c_4 &= -\tfrac{c_2c_3}{c_1}\\ c_3 &= -\tfrac{c_1c_2}{c_0}\\ c_3^2 &= -2c_4c_2\\ c_2^2 &= -2c_0c_4-2c_1c_3 \end{aligned}$$

Operando, obtenemos $c_2^2=\frac{2c_0c_2c_3}{c_1}+\frac{2c_1^2c_2}{c_0}$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $c_0=1$ y podemos no considerar la tercer ecuación.

Haciendo cuentas, obtenemos una solución:

$$p(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4$$

Se tiene que

$$p^2(x)=1+2x+\frac{7}{4}x^4+\frac{1}{4}x^7+\frac{1}{16}x^8$$

que tiene igual cantidad de términos que $p(x)$.

Problema 5 *Sea C un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ tal que, cualquiera sea $x\in\mathbb{R}^2$, existe un único $y\in C$ tal que*

$$||x-y|| = \ dist\ (x,C).$$

Probar que C es un conjunto convexo.

Resolución:(Solución oficial)

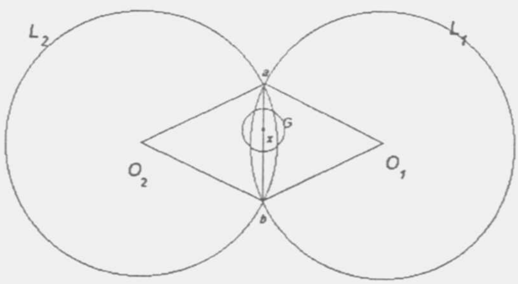
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to C$ tal que $f(x)$ es el único y tal que $||x - y|| = dist(x, C)$.

f es continua ya que si $x_n \to x \Rightarrow dist(x_n, C) \to dist(x, C) \Rightarrow$ $||x_n - f(x_n)|| \to ||x - f(x)| \Rightarrow ||x - f(x_n)| \to ||x - f(x)||$. Por lo tanto $\{f(x_n)\}$ está acotada, y cualquier subsucesión convergente tiende a un elemento $y \in C$ tal que $||x - y|| = ||x - f(x)||$, por lo tanto toda subsucesión tiende a $f(x)$, entonces $f(x_n) \to f(x)$.

$\mathbb{R}^2$ es conexo. Como $C = f(\mathbb{R}^2)$, y f es continua entonces C es conexo. Más aún, como $f(x) = x$ para todo $x \in C$, entonces f define un retracto. Como $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, entonces C también lo es (un retracto de un simplemente conexo es simplemente conexo).

Supongamos que C no fuera convexo. Sean $a, b \in C$ tales que hay un punto x en ab tal que $x \notin C$. Cómo C es cerrado existe un círculo G centrado en X tal que $G \cap C = \emptyset$. En particular $a, b \notin G$.

Sea una circunferencia que pasa por a y b y corta a G (pasa por el interior de G) Sea L_1 el círculo (cerrado) que tiene a esta circunferencia como borde, y L_2 el simétrico a L_1 con respecto a ab. Sea O_1 el centro de L_1 y O_2 el centro de L_2.



Sea α el camino que comienza en α, sigue por el segmento $\overline{aO_1}$, y luego va por $\overline{O_1b}$ hasta b. Entonces el camino $f \circ \alpha$ está contenido en L_1, ya que si $x \in \overline{aO_1}$ y $y \in L_1$ entonces $||x - y|| > ||x - a||$, y si $x \in \overline{O_1b}$ y $y \notin L_1$ entonces $||x - y|| > ||x - b||$.

Además no puede pasar por G porque la imagen de f es C. Por lo tanto el camino $f \circ \alpha$ sale de $a(f(a) = a)$, va hasta b y está contenido en $L_1 \backslash G$.

Sea β el camino que queda al unir $\overline{bO_2}$ y $\overline{O_2 a}$. Con el mismo razonamiento $f \circ \beta$ está contenido en $L_2 \backslash G$ y va de b hasta a.

La concatenación de los dos caminos ($f \circ \beta$ y $f \circ \alpha$) es un lazo cerrado, incluido en C, que rodea al punto x (y al Círculo G). Por lo tanto C no sería simplemente conexo. Contradicción!!!

Por lo tanto C es conexo.

Problema 6 *Dados $n+1$ polinomios de grado n $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, se sabe que existen intervalos disjuntos $I_0, I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ tal que cada $P_j(x)$ tiene exactamente n raíces distintas en I_j, $j = 0, 1, \ldots, n$.*

Probar que entonces

$$\det \begin{pmatrix} P_0(x) & P_1(x) & \ldots & P_n(x) \\ P_0'(x) & P_1'(x) & \ldots & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0^{(n)}(x) & P_1^{(n)}(x) & \ldots & P_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

es un número real distinto de cero.

Resolución:(Solución oficial)

Denotamos por

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) := \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

donde $f_1, \ldots, f_n$ son funciones C^∞, con la convención $W() = 1$ y $W(f_1) = f_1$. $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ se llama el Wronskiano de $f_1, \ldots, f_n$.

Es fácil ver que:

a) $W(1, f_1, \ldots, f_n) = W(f_1', \ldots, f_n')$

b) $W(ff_1, \ldots, ff_n) = f^n W(f_1, \ldots, f_n)\ \forall f \in C^\infty$

c) $W(W(f_1, f_2), W(f_1, f_3), \ldots, W(f_1, f_n)) = f_1^{n-2} W(f_1, \ldots, f_n)$.

Probemos primero algunos resultados intermedios que vamos a necesitar.

Lema 1: Sean $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ polinomios de grado $n+k$, con $k \geq 0$. Entonces $W(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})$ es un polinomio de grado, a lo sumo, $(n+1)k$.

Dem: Podemos encontrar inductivamente polinomios q_i de grado exactamente $n+2-i$ tales que f_i es una combinación lineal de $q_1, q_2, \ldots, q_i$. Entonces $W(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})$ es un múltiplo escalar de $W(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$, que, obviamente tiene grado a lo sumo $(n+1)k$.

Proposición 2: Sea $I = [a, b]$, con $a \leq b$. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y Q polinomios. Supongamos que el Wronskiano de cada subconjunto de $\{P_1, \ldots, P_n\}$ no se anula en I. Supongamos también que Q tiene $n+k$ ceros en I (contados con multiplicidad), donde $k \geq 0$, y que Q no es idénticamente nulo. Entonces $W(P_1, \ldots, P_n, Q)$ tiene, por lo menos, k ceros en I (contados con multiplicidad), pero no es idénticamente nulo.

Dem: Inducción en n. El caso $n = 0$ es trivial.

Supongamos que $n \geq 1$. En I, $W(P_1) = P_1$ no se anula. La función Q/P_1 tiene $n+k$ ceros en I (la misma cantidad de ceros que Q, y no es idénticamente nulo. Como tiene por lo menos un cero, Q/P_1 no es constante. Por lo tanto, $P_1^2(Q/P_1)'$ tiene, por lo menos, $n+k-1$ ceros en I, y $P_1^2(Q/P_1)'$ no es idénticamente cero. Así, el Wronskiano de cualquier subconjunto de

$$\{W(P_1, P_2), \ldots, W(P_1, P_n)\}$$

es una potencia de P_1 multiplicado por el Wronskiano del subconjunto de $\{P_2, \ldots, P_n\}$ correspondiente, y estos Wronskianos no se anulan, por hipótesis. Por lo tanto,

$$W(W(P_1, P_2), W(P_1, P_3), \ldots, W(P_1, P_n), P_1^2(Q/P_1)')$$

tiene, por lo menos, k ceros en I y no es idénticamente cero.

Además

$$W(W(P_1, P_2), W(P_1, P_3), \ldots, W(P_1, P_n), P_1^2(Q/P_1)') = P_1^{n-1} W(P_1, \ldots, P_n, Q),$$

y P_1 no tiene ceros en I, así $W(P_1, \ldots, P_n, Q)$ tiene k ceros en I y no es idénticamente cero.

Del siguiente teorema se obtiene el resultado deseado, tomando $k = 0$.

Teorema 3: Supongamos que $P_0, P_1, \ldots, P_n$ son polinomios de grado $n + k$, para algún $k \geq 0$, y que todas sus raíces son reales. Supongamos, además, que $I(P_0), I(P_1), \ldots, I(P_n)$ son intervalos disjuntos dos a dos tales que los ceros de P_i están incluidos en $I(P_i)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n$. Entonces $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ es un polinomio **no nulo** de grado $k(n + 1)$, con k ceros exactamente en cada $I(P_i)$.

Dem: Nuevamente hacemos inducción en n. El caso $n = 0$ es trivial.

Supongamos que $n \geq 1$. Consideremos el Wronskiano $W := W(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ para algún $m \leq n$. La hipótesis inductiva aplicada m veces a W, tomando cada P_i como Q, implica que W tiene exactamente $n + k + 1 - m$ ceros en cada $I(P_i)$, y que W no es idénticamente cero. Por otro lado, vimos que el grado de W es, a lo sumo, $m(n + k + 1 - m)$, así que vale la igualdad, las raíces son reales y están en $I(P_0) \cup I(P_1) \cup \ldots \cup I(P_m)$. En particular, W no se anula en $I(P_n)$. De forma similar, se ve que el Wronskiano de cualquier subconjunto de $\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$ no se anula en $I(P_n)$. La proposición anterior aplicada a $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, con $Q = P_n$, muestra que $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ no se anula y que tiene, por lo menos, k ceros en $I(P_n)$. Análogamente, se ve que $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ tiene, por lo menos, k raíces en cada $I(P_i)$. El lema anterior implica que el grado es a lo sumo $k(n + 1)$ y, contando raíces, vemos que la igualdad vale en todos lados.