Construcción de polígonos regulares en teselados regulares

Gustavo Piñeiro

Introducción:

Un teselado regular es una familia de polígonos regulares, congruentes entre sí, que cubren completamente el plano euclidiano sin que haya superposiciones entre ellos. Hay solamente tres polígonos regulares que permiten teselar el plano: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. La pregunta a la que vamos a dar respuesta en este artículo es la siguiente: en cada uno de estos tres teselados ¿qué polígonos regulares pueden construirse de modo tal que los vértices del polígono construido coincidan con vértices del teselado?

Es evidente que en el teselado formado por cuadrados es posible construir, justamente, un cuadrado y que tanto en el teselado de triángulos equiláteros como en el teselado de hexágonos regulares es posible construir triángulos y hexágonos. Veremos en este artículo que en cada uno de los tres teselados mencionados, los polígonos regulares indicados son los únicos que pueden construirse.

Sección 1: **Notación y planteo del problema.**

Definición 1.1: *Un teselado plano es una colección de polígonos (llamados en este caso baldosas, mosaicos o teselas) dispuestos de tal modo que cada punto P del plano cumple una y sólo una de las siguientes tres condiciones:*

a) P pertenece al interior de uno y sólo uno de los polígonos.

b) P pertenece a la arista de dos polígonos adyacentes (pero no es el vértice de ningún polígono).

c) P es el vértice de al menos tres de los polígonos.

<u>Definición 1.2:</u> *Los puntos que cumplen la condición c) de la definición anterior se denominan los nodos o vértices del teselado.*

Se llama *teselado regular* a aquel en el que todas las baldosas son polígonos regulares congruentes entre sí. Hay solamente tres polígonos regulares que pueden servir como baldosas para un teselado regular: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular, para una demostración consultar Coxeter H., Fundamentos de Geometría, tema Mosaicos Regulares. Cuando trabajemos con un teselado formado por cuadrados diremos que tenemos un *cuadriculado* del plano. Análogamente un teselado formado por triángulos regulares será un *triangulado* y un teselado de hexágonos regulares será un *hexagonado*.

La pregunta que vamos a responder es la siguiente: **dado un teselado regular del plano ¿qué polígonos regulares pueden construirse tales que sus vértices coincidan con vértices del teselado?**

En la Sección 2 vamos a probar que el único polígono regular que puede construirse en un cuadriculado es un cuadrado. En las Secciones 3 y 4 respectivamente probaremos que tanto en un triangulado como en un hexagonado sólo es posible construir triángulos equiláteros y hexágonos regulares.

<u>Sección 2:</u> Polígonos regulares en cuadriculados.

A los efectos de nuestro problema todos los cuadriculados del plano son equivalentes entre sí, ya que uno cualquiera de ellos puede obtenerse a partir de cualquier otro aplicando una composición conveniente de rotaciones, traslaciones y homotecias. Si tomamos como referencia un sistema de ejes cartesianos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que estamos trabajando con el cuadriculado cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras.

Nuestro objetivo entonces es determinar qué polígonos regulares existen cuyos vértices sean puntos de coordenadas enteras. La respuesta se da en el siguiente teorema:

Teorema 2.1: *Todo polígono regular cuyos vértices sean puntos de coordenadas enteras es un cuadrado.*

Demostración:

Consideremos un polígono regular de n lados cuyos vértices sean puntos de coordenadas enteras. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que uno de los vértices del polígono es **O** = (0,0). Sean A = (a,b) y B = (x,y) los vértices adyacentes a **O**. Sabemos que el ángulo AOB tiene una amplitud de $\alpha = \pi - \frac{2\pi}{n}$, más aún, podemos suponer que A es el resultado de aplicar a B una rotación de centro (0,0) y ángulo α.

Como consecuencia de esta última observación tenemos que:

$$a = x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha$$

$$b = y \cos\alpha + x \operatorname{sen}\alpha$$

Pensemos a estas expresiones como un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$. Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$\cos\alpha = (ax + by)(x^2 + y^2)^{-1} \qquad \operatorname{sen}\alpha = (bx - ay)(x^2 + y^2)^{-1}$$

Por otra parte, aplicando identidades trigonométricas elementales tenemos que:

$$\cos(\pi - \frac{2\pi}{n}) = -\cos(\frac{2\pi}{n}) \qquad \operatorname{sen}(\pi - \frac{2\pi}{n}) = \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n})$$

Dado que *a, b, x* e *y* son todos números enteros, deducimos de las identidades precedentes que $\cos(\frac{2\pi}{n})$ y $\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n})$ son ambos simultáneamente números racionales.

Llamemos $\beta = \frac{2\pi}{n}$.

¿Para qué valores de n ocurre que cos(β) y sen(β) son ambos simultáneamente números racionales? El párrafo siguiente requiere conocimientos básicos de Teoría de Galois. Sea $\xi_n = \cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta)$, una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $\overline{\xi_n}$ su número complejo conjugado. Sea f el polinomio definido como: $f(x) = (x - \xi_n)(x - \overline{\xi_n}) = x^2 - 2\cos(\beta)\,x + 1$. Si cos(β) es un número racional entonces $f \in \mathbb{Q}[x]$ (donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales), y en consecuencia ξ_n es un número algebraico de grado a lo sumo igual a 2.

Recordando los hechos conocidos para $\mathbb{Q}(\xi_n)$ (la extensión ciclotómica generada por ξ_n) y llamando Φ a la función de Euler, del hecho de que ξ_n sea algebraico de grado a lo sumo 2 deducimos que $\Phi(n) \leq 2$. Como consecuencia de ello, podemos asegurar que n = 1, 2, 3, 4 o 6. Es decir, $\cos(\frac{2\pi}{n})$ es racional sólo si n toma alguno de esos cinco valores mencionados.

El número n no puede valer 1 ni 2, ya que $n \geq 3$ (n es la cantidad de lados de un polígono regular). Los valores n = 3 y n = 6 también deben descartarse pues en ninguno de los dos casos ocurre que $\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{n})$ sea racional. Por lo tanto solamente puede ser n = 4, es decir, el único polígono regular que puede construirse en un cuadriculado es justamente un cuadrado. ***Q.E.D.***

Sección 3: Polígonos regulares en triangulados.

Análogamente a lo dicho en la sección anterior para los cuadriculados, a los efectos de nuestro problema todos los triangulados regulares deben ser considerados como equivalentes entre sí. Por ende, podemos suponer que estamos trabajando con el triangulado que está caracterizado por el hecho de que una de sus baldosas es el triángulo equilátero que tiene como vértices los puntos $(0,0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$.

Las baldosas del triangulado así definido son triángulos equiláteros de altura igual a 1. Cualquiera de los lados de estos triángulos está contenido en alguna recta perteneciente a una de las siguientes tres familias:

1) La primera familia está formada por aquellas rectas que son paralelas a la que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ y que además tienen como ordenada al origen un número entero (desde luego, la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ está incluida en esta familia).

2) La segunda familia está constituida por las rectas paralelas a aquella que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ y que además tienen ordenadas al origen enteras.

3) La tercera familia son las rectas horizontales con ordenadas al origen enteras.

Los vértices del triangulado son aquellos puntos en los que se cortan rectas pertenecientes a dos cualesquiera de estas familias. Con más precisión: P es un vértice del triangulado si y sólo si existen rectas L_1 y L_2, cada una perteneciente a una de las tres familias mencionadas, tales que P es el punto de intersección de L_1 y L_2. Analizando la forma que tienen esas intersecciones, es fácil demostrar que todos los vértices del triangulado tienen la forma $(\frac{a}{\sqrt{3}},b)$ donde a, b son enteros de la misma paridad.

Observación 3.1: Las normas euclidianas de los puntos de la forma $(\frac{a}{\sqrt{3}},b)$, donde a y b son números enteros, forman un conjunto discreto de números reales positivos. Por lo tanto el conjunto $\{\|(\frac{a}{\sqrt{3}},b)\| : a,b \text{ enteros}\}$ es bien ordenado.

Teorema 3.2: *En un triangulado regular no es posible construir un par de segmentos ortogonales entre sí que sean de igual longitud y que tengan además un extremo común.*

Demostración:

Supongamos que sí fuera posible construir un par de segmentos perpendiculares entre sí que cumplan las condiciones mencionadas en el enunciado. A partir de la Observación 3.1 anterior podemos suponer que la longitud (positiva) de los segmentos es la mínima posible. Podemos asumir además que el extremo común de los segmentos es el punto **O** = (0,0). Sean A = $(\frac{a}{\sqrt{3}},b)$ y B = $(\frac{x}{\sqrt{3}},y)$ respectivamente los extremos restantes de los dos segmentos.

Sabemos entonces que los segmentos **O**A y **O**B son ortogonales y tienen la misma longitud (notemos que esta longitud es exactamente igual a ||A|| y también a ||B||). Estas condiciones geométricas se traducen en las siguientes relaciones algebraicas:

$$\frac{a^2}{3}+b^2=\frac{x^2}{3}+y^2 \qquad \text{(Igualdad de normas)}$$

$$\frac{ax}{3}+by=0 \qquad \text{(Ortogonalidad, el producto escalar es nulo)}$$

Equivalentemente:

$$a^2 + 3b^2 = x^2 + 3y^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$ax = -3by \qquad \textbf{(2)}$$

(Como es habitual, si r y s son números enteros, indicaremos por s|r a la relación "s es divisor de r").

De **(2)** sabemos que $3|a$ o $3|x$. Pero si $3|x$ entonces por **(1)** deducimos que $3|a$. Recíprocamente, si $3|a$ entonces $3|x$. Por ende, $3|x$ y $3|a$ simultáneamente. Luego, existen enteros a_1, x_1 tales que $a = 3a_1$ y $x = 3x_1$. Observemos que a y a_1 tienen la misma paridad y que lo mismo ocurre con x y x_1.

Reemplazando $a = 3a_1$ y $x = 3x_1$ en **(1)** y **(2)** obtenemos:

$$9a_1^2 + 3b^2 = 9x_1^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + 3a_1 = y^2 + 3x_1 \qquad \textbf{(1')}$$

$$9a_1x_1 = -3by \quad \Rightarrow \quad by = -3a_1x_1 \qquad \textbf{(2')}$$

De **(1')** y **(2')** se deduce que A' = $(\frac{b}{\sqrt{3}}, a_1)$ y B' = $(\frac{y}{\sqrt{3}}, x_1)$ son puntos del triangulado (obsérvese que a_1 y b tienen la misma paridad y lo mismo ocurre con x_1 e y) tales que **O**A' y **O**B' son segmentos perpendiculares de igual longitud. Por otra parte, es claro que tanto A' como B' tienen una norma menor que A y B. Esto contradice la minimalidad de la longitud de los segmentos **O**A y **O**B. La contradicción proviene de suponer que es posible construir en un triangulado dos segmentos ortogonales de igual longitud (y un extremo común). En consecuencia tal construcción es imposible. ***Q.E.D.***

Corolario 3.3: *En un triangulado regular es imposible construir un cuadrado.*

La demostración de este corolario es inmediata.

Acabamos de ver entonces que no es posible construir un cuadrado en un triangulado regular. El siguiente teorema nos dirá exactamente qué polígonos pueden construirse.

Teorema 3.4: *Los únicos polígonos regulares que pueden construirse en un triangulado regular son aquellos que tienen 3 o 6 lados.*

Demostración:

Sea n la cantidad de lados de un polígono regular construido en un triangulado. Podemos suponer que uno de los vértices del polígono es el punto **O** = (0,0). Sean A=$(\frac{a}{\sqrt{3}},b)$ y B=$(\frac{x}{\sqrt{3}},y)$ respectivamente los dos vértices adyacentes a **O**. El ángulo AOB tiene una amplitud de $\pi - \frac{2\pi}{\mathrm{n}}$, además $\|A\| = \|B\|$. Por lo tanto $\cos(\pi - \frac{2\pi}{\mathrm{n}}) =$

$$(\frac{ax}{3} + by)(\frac{a^2}{3} + b^2)^{-1}.$$

Por otra parte, $\cos(\pi - \frac{2\pi}{\mathrm{n}}) = -\cos(\frac{2\pi}{\mathrm{n}})$. Se deduce que $\cos(\frac{2\pi}{\mathrm{n}})$ es un número racional. Hemos visto en la Sección 2 que esto sólo es posible si n = 1, 2, 3, 4 o 6. Sabemos además que n no puede ser 1 o 2. Además, el corolario precedente nos dice que n no es 4. Por lo tanto n = 3 o 6. ***Q.E.D.***

Sección 4: Polígonos regulares en hexagonados.

Analizaremos en esta sección qué polígonos regulares pueden construirse en un hexagonado regular.

Teorema 4.1: *Los únicos polígonos regulares que pueden construirse en un hexagonado regular son aquellos que tienen 3 o 6 lados.*

Demostración:

Si al conjunto de los vértices de un hexagonado regular agregamos los centros de los hexágonos, obtenemos el conjunto de los vértices de un triangulado regular. Por lo tanto, todo polígono que pueda construirse en un hexagonado, puede ser construido también en un triangulado. El resultado se deduce entonces del Teorema 3.4. ***Q.E.D.***

Bibliografía:

FRALEIGH, John – *Álgebra abstracta* – Addison Wesley – Wilmington (E.U.A.), 1987.

HERSTEIN, I. H. – *Álgebra moderna* – Editorial Trillas – México, 1994.

SANTALÓ, Luis – *La Geometría en la formación de profesores* - Red Olímpica – Bs. As., 1993.

Av. Juan B. Alberdi 667 – 7° B. (1424) Buenos Aires, Argentina.

Tel: 54-11-4903-0695

e-mail: pineiro@datamarkets.com.ar

Universidad de Flores

Camacuá 282 – (1406) Buenos Aires.