Contando Ángulos Rectos

Julio César Rastrilla

Resumen. El máximo número de ángulos interiores rectos que admite un polígono convexo de cinco o más lados es tres.

INTRODUCCIÓN Y RESULTADOS

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a la suma de los ángulos interiores del abanico de triángulos determinados por lados y las diagonales que pasan por uno de sus vértices. (Ver dibujo en página 38). En consecuencia, es igual a **(2n - 4) R**, donde **n** es el número de lados y **R** un ángulo recto.

Así, tenemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 2R, de un cuadrilátero 4R, de un pentágono 6R, etc.

Siguiendo con la referencia de los ángulos rectos, nos preguntamos ¿Cuántos ángulos rectos (interiores) como máximo puede tener un polígono convexo de 3, 4, 5, 6 ... lados? Para esto hacemos uso sistemático de : En un polígono convexo cada ángulo interior es menor que dos rectos.

Un triángulo, obviamente puede tener a lo más un ángulo recto, pues si tuviese dos, el tercer ángulo sería nulo.

Los cuadriláteros pueden tener como máximo 4 ángulos rectos como el cuadrado y el rectángulo. Veamos el caso de polígonos convexos de 5 ó 6 lados.

Consideremos un pentágono. Como la suma de los ángulos interiores es igual a (2.5 - 4)R = 6R, entonces no puede tener sus 5 ángulos interiores rectos. Ahora, si tuviese cuatro, el quinto ángulo sería un llano. Esto es, mediría (los) 2R (que faltan). Absurdo.

Si fueran **TRES**, los otros dos ángulos sumarían 3 R, podrían ser por ejemplo de 135° cada uno, manteniendo así su convexidad. (Ver primer dibujo en página 38)

Por consiguiente un pentágono tiene a lo sumo 3 ángulos interiores rectos.

Siguiendo este razonamiento trabajamos con el hexágono:

Suma de los ángulos interiores = 8R

Ángulos rectos posibles:

Seis. No. De lo contrario tendrían 8R = 6R.

Cinco. No. Si no quedan 3 R "libres" para un vértice. Este ángulo interior mediría 270° y el polígono sería cóncavo.

Cuatro. No. Quedan 4 R "libres" para dos vértices. Cada ángulo mediría un llano, o uno de ellos por lo menos sería mayor que 180° y el polígono sería cóncavo.

TRES. Si es posible, ya que quedan 5 R para los tres ángulos restantes que podrían ser de 150° cada uno. (Ver dibujo en Página 38).

También se puede apreciar que al aumentar el número de lados, aumenta la medida de cada ángulo no recto.

Probemos una vez más, y ahora para un número inusualmente grande de lados. Polígono de un millón de lados:

Suma de los ángulos interiores = $(2 \times 10^6 - 4)$ R = 1.999.996 R

Ángulos rectos posibles:

Un millón. No. De lo contrario tendría 1.000.000 R = 1.999.996 R

999.999. No. Pues el ángulo restante mediría 999997 R y el polígono sería cóncavo.

Cuatro ángulos rectos, tendríamos que la suma de los (1000000 - 4) ángulos interiores restantes es igual a

$$1999996 \text{ R} - 4 \text{ R} = 1.999.992 \text{ R}$$

y a su vez estrictamente menor que

$$(1.000.000 - 4)\, 2 \text{ R} = 1.999.992 \text{ R}$$

De esto, tendríamos que

$$1.999.992 \, R < 1.999.992 \, R$$

Absurdo.

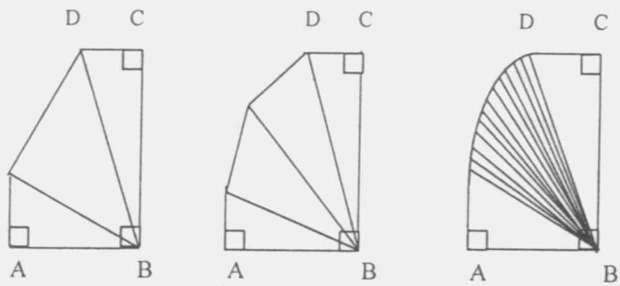
Tres ángulos rectos es posible. Para ver esto dibujamos un cuadrado PQTS, denominamos X al punto medio de TS, Y el punto medio de PS y, V el centro del cuadrado. Ahora trazamos el cuarto de circunferencia de centro V por X e Y.

A este cuarto de circunferencia lo dividimos en 1.000.000-5 = 999.995 partes iguales. Marcamos la poligonal que une YPQTX y la poligonal que une los 999.996 puntos de la circunferencia. El sentido que elegimos para recorrer la circunferencia y el YPQTX es el mismo con el que recorremos el cuadrado. Así obtenemos el polígono convexo buscado.

TEOREMA: El máximo número de ángulos interiores rectos que admite un polígono convexo de cinco o más lados es tres.

H) ABCD...N Polígono convexo de 5 o más lados

T) Como máximo $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son ángulos rectos



Demostración. Sea $n \geq 5$ el número de lados del polígono y supongamos que cuatro ángulos interiores son rectos.

Por consiguiente, la suma de los $(n - 4)$ ángulos interiores restantes es igual a

$$(2n - 4) R - 4 R. = (n - 4) 2 R.$$

Por ser el polígono convexo, cada ángulo interior es menor que 2R. Por consiguiente la suma de los $(n - 4)$ ángulos interiores restantes es estrictamente menor que

$$(n - 4) 2 R$$

Como $n \geq 5$, obtenemos $1 < 1$. Absurdo

REFERENCIAS

DELGADO, JORGE I., Geometría para el Ciclo Medio, Volumen I y II, Editorial Universitaria, San Luis, 1989.

Julio César Rastrilla.
Currículum y Enseñanza de la Matemática.
Departamento de Educación y Formación Docente
Facultad de Ciencias Humanas. Universidad Nacional de San Luis
Avda. ejército de los Andes 950
5700 - San Luis – Argentina
rastrill@unsl.edu.ar