Extremos Condicionados

Una Propuesta Metodológica para su Resolución

S. Gigena – M. Binia – D. Abud

1. Introducción.

En este artículo nos proponemos exponer un camino alternativo general para la búsqueda de máximos, mínimos y puntos de ensilladura para funciones sujetas a restricciones. Esta propuesta puede realizarse con total generalidad matemática porque, como se verá, las demostraciones son válidas para cualquier número de variables independientes y para cualquier número de funciones de restricción.

Con frecuencia ocurre que a un problema de máximo o mínimo se agregan condiciones de manera que las variables no resultan todas independientes. Son los problemas de extremos condicionados, también llamados *ligados, restringidos* o *vinculados*. Estos problemas son muy comunes en Ingeniería y en otras ramas de ciencia aplicada donde los vínculos tienen una especial importancia por el grado de incertidumbre que le agrega al problema.

Sabemos que para el caso de una función de dos variables, decimos que la función

$$z = f(x, y)$$

diferenciable tiene un *máximo o mínimo relativo* con la condición (diferenciable)

$$G(x, y) = 0$$

en el punto (a, b) si en algún entorno V de (a, b) la función, restringida al conjunto de puntos donde también se cumple la mencionada condición, toma valores que no son mayores, o no son menores (respectivamente), que el valor de la función en el punto.

Si la función a extremar es de tres variables

$$u = f(x, y, z)$$

puede admitir: o una ecuación de condición

$$G(x, y, z) = 0\text{, (dos variables "libres"),}$$

o dos ecuaciones de condición:

$$G_1(x, y, z) = 0,\quad G_2(x, y, z) = 0\text{, (una variable "libre").}$$

Ejemplos de estas situaciones son los siguientes problemas geométricos:

1. Determinar la mínima distancia del origen de coordenadas hasta una curva (plana) de ecuación dada por $G(x, y) = 0$: la función a extremar es $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, y la ecuación de ligadura
$$G(x, y) = 0.$$
2. Determinar la mínima distancia del origen de coordenadas a una curva en el espacio. La función a extremar es $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, las ecuaciones de ligadura:
$$G_1(x, y, z) = 0,\quad G_2(x, y, z) = 0$$
(la curva está dada por la intersección de dos superficies:
$$G_1(x, y, z) = 0 \text{ y } G_2(x, y, z) = 0\text{)}$$

En el caso general la función a extremar está dada por una expresión de la forma:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

con m condiciones:

$$G_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0$$

(donde $i = 1, 2, \ldots, m$)

(Caso general la función a extremar: , $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$; y las cuaciones de condición serán expresadas por : $G\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m,\ G(x) = 0$)

En los casos en que no es posible despejar a partir de la condición algunas de las variables en términos de las otras, se utiliza el procedimiento conocido como *Método de los Multiplicadores de Lagrange*. A seguir, vamos a recordar el teorema en el cual se basa dicho método, e incluir una demostración del mismo, con el principal objetivo de exponer, simultáneamente, una de las nomenclaturas a ser usada en el resto de este artículo. (Ver también [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7])

Teorema. Sea X_0 un punto extremo de una función diferenciable $f: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ restringida a un conjunto $S = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid G(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, donde la función $G = (G_1, ..., G_m)$: $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable, y la matriz Jacobiana $G'(X_0)$ tiene m columnas linealmente independientes. Entonces, existen valores escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$, tales que X_0 es punto crítico de la función definida por $F = f + \lambda_1 G_1 + ... + \lambda_m G_m : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $X_0 = (a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+m})$ y supongamos, por comodidad y sin pérdida de generalidad, que las m columnas linealmente independientes de $G'(X_0)$ son las m últimas (si así no fuera reordenamos las variables): $\dfrac{\partial G}{\partial x_{n+1}}, \dfrac{\partial G}{\partial x_{n+2}}, ..., \dfrac{\partial G}{\partial x_{n+m}}$.

Llamando $U_0 = (a_1, ..., a_n)$ y $V_0 = (a_{n+1}, ..., a_{n+m})$, el Teorema de la Función Implícita asegura que existe una función diferenciable $h = (h_1, ..., h_m)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida sobre un entorno abierto $N \subset \mathbb{R}^n$, de U_0, tal que $h(U_0) = V_0$ y $H(u) = (u, h(u)) \in S, \forall u \in N$. Tenemos entonces que: $S \cap (N \times \mathbb{R}^m)$ = Grafo de h = Imagen de H. En otras palabras, la función $H : N \to \mathbb{R}^{n+m}$ realiza una parametrización de (la variedad diferenciable) S en un entorno de X_0 y, por lo tanto, las columnas del Jacobiano de H en U_0 :

$$H'(U_0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{U_0},$$

resultan vectores generadores del espacio tangente a S en X_0, al cual llamaremos $T_{X_0}(S)$. Como estos vectores son claramente linealmente independientes, la dimensión de $T_{X_0}(S)$ es n. Ahora bien, como f restringida a S tiene un punto extremo en X_0, y H parametriza a S en un entorno de X_0, resulta que $f \circ H$ tiene un extremo relativo en U_0, luego

$$\left(f \circ H\right)'(U_0) = f'(X_0) \cdot H'(U_0) = 0 .$$

Por otra parte, puesto que $G \circ H$ es constantemente cero en S, resulta que también tenemos

$$\left(G \circ H\right)'(U_0) = G'(X_0) \cdot H'(U_0) = 0 .$$

Entonces las filas de las matrices

$$f'(X_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_{n+m}}\right)_{X_0} \quad \text{y} \quad G'(X_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix}_{X_0}$$

son vectores pertenecientes a $\left(T_{X_0}(S)\right)^{\perp}$, *espacio ortogonal* al espacio tangente $T_{X_0}(S)$.

Como la dimensión de $\left(T_{X_0}(S)\right)^{\perp}$ es $(n+m)-n=m$, y tenemos $m+1$ vectores, estos deben ser linealmente dependientes y, por lo tanto, existen escalares $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_m$, no todos nulos, tales que

$$\begin{pmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m\end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix}_{X_0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Puesto que $G'(X_0)$ tiene rango m, entonces debe ser $\beta_0\neq 0$. Luego, multiplicando la anterior expresión por el inverso β_0^{-1}, y llamando $\lambda_i=\dfrac{\beta_i}{\beta_0}$, $1\le i\le m$, obtenemos $\left(f+\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\cdots+\lambda_mG_m\right)'\left(X_0\right)=\left(0,0,\dots,0\right)$. Esto nos permite afirmar, por lo tanto, que $f+\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\cdots+\lambda_mG_m$ tiene un punto crítico en X_0, lo que concluye la demostración del teorema.

En conclusión, basándonos en el teorema que acabamos de demostrar, podemos detectar los posibles extremos condicionados calculando los puntos críticos de la función

$$F(x_1,\ldots,x_{n+m}) = f(x_1,\ldots,x_{n+m}) + \lambda_1 G_1(x_1,\ldots,x_{n+m}) + \ldots + \lambda_m G_m(x_1,\ldots,x_{n+m}).$$

A los escalares λ_i, $1 \le i \le m$, se los llama *Multiplicadores de Lagrange*, y al procedimiento se lo conoce como *Método de los Multiplicadores de Lagrange*.

2. Examen de las derivadas segundas. Nuestra propuesta.

Usando la misma notación, vamos a presentar un método para determinar si los puntos críticos encontrados mediante el teorema anterior son, efectivamente, máximos, mínimos o puntos de ensilladura condicionados, y para ello procedemos a analizar la función $f \circ H: N \to \mathbb{R}$ en el punto U_0, y estudiar qué tipo de punto crítico tiene en el conjunto abierto $N \subset \mathbb{R}^n$, siguiendo los pasos requeridos en el estudio de extremos libres mediante el Hessiano de la función $f \circ H$.

Pero, aquí surge un problema: muchas veces es muy dificultoso, y a veces imposible, obtener la función $H = (Id, h)$ en forma explícita. En estos casos, se debe recurrir a derivar en forma implícita la función h a partir de la expresión $G \circ H = G \circ (Id, h) = 0$.

En el resto de esta exposición supondremos que, tanto la función escalar f como la función vectorial G, son diferenciables de clase $C^{(2)}$.

La matriz Hessiana de $f \circ H$,

$$Hess_{f \circ H} = \left\{ \frac{\partial^2 (f \circ H)}{\partial u_i \partial u_j} \right\},$$

puede ser calculada de la siguiente forma: denotamos $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a las n

primeras coordenadas del argumento de G y $v=(v_1,v_2,\dots,v_m)$ a las m últimas.

Entonces la función h está definida por: $h(u)=(v_1(u),v_2(u),\dots,v_m(u))$.

Denotamos con G'_v a la matriz cuya fila *i*-ésima está formada por las derivadas parciales de G_i respecto a las variables $v_1,v_2,\dots,v_m$, esto es

$$G'_v=\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial v_1} & \frac{\partial G_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial v_m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial G_m}{\partial v_1} & \frac{\partial G_m}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial v_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+2}} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+2}} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}}\end{bmatrix}.$$

A fin de facilitar la expresión de las ecuaciones a ser presentadas, vamos a denotar, también, con subíndices las derivadas sucesivas de las funciones escalares y vectoriales, así, por ejemplo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}:=f_i,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}:=f_{ij},\ \frac{\partial G}{\partial x_i}:=G_i,\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j}:=G_{ij},\ \frac{\partial G_{\alpha-n}}{\partial x_i}:=G_{\alpha-n,i},\ \frac{\partial^2 G_{\alpha-n}}{\partial x_i\partial x_j}:=G_{\alpha-n,ij}.$$

Además, para mayor claridad en la exposición, usaremos los siguientes rangos de índices: con letras latinas minúsculas denotaremos índices variando entre 1 y n, i.e., $1\le i,j,k,l\dots\le n$; mientras que las minúsculas griegas serán reservadas para denotar una variación entre $n+1$ y $n+m$, i.e., $n+1\le\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\dots\le n+m$. Con esta convención resulta, por ejemplo, la expresión de la matriz

$[G'_v]=\left(\frac{\partial G_{\alpha-n}}{\partial v_{\beta-n}}\right)=\left(\frac{\partial G_{\alpha-n}}{\partial x_\beta}\right)=\left(G_{\alpha-n,\beta}\right)$, y, puesto que ésta es no singular, denotaremos su inversa con la expresión $[G'_v]^{-1}=\left(G^{\alpha\beta}\right)$.

Ahora, retornando a nuestra exposición, puesto que se cumple la condición $K(u) := G(u\ ,\ h(u)) = 0,\ \forall u \in N \subset \mathbb{R}^n$, resulta que todas las derivadas de esta función se anulan. En particular para las primeras derivadas, con respecto a u_i, obtenemos:

$$\frac{\partial K}{\partial u_i} = \frac{\partial G}{\partial u_i}\big(u, h(u)\big) + G'_v\big(u, h(u)\big) \cdot \frac{\partial h}{\partial u_i}(u) \;=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

que, en términos de la notación anterior, puede ser representada por:

$$G_{\alpha-n,i} + \sum_{\beta} G_{\alpha-n,\beta} h_{\beta-n,i} = 0,$$

entonces

$$\frac{\partial h}{\partial u_i}(u) = -\left[G'_v\big(u, h(u)\big)\right]^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_i}\big(u, h(u)\big) \qquad \textbf{(1)},$$

esto es, nuevamente en la notación indicial,

$$h_{\gamma-n,i} = -\sum_{\alpha} G^{\alpha\gamma} G_{\alpha-n,i}\ .$$

Similarmente, si derivamos nuevamente la expresión de la primera derivada $\frac{\partial K}{\partial u_i}$, ahora respecto a u_j:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u_j \partial u_i} = \frac{\partial^2 G}{\partial u_j \partial u_i} + \left(\frac{\partial G}{\partial u_i}\right)'_v \cdot \frac{\partial h}{\partial u_j} + \frac{\partial\left(G'_v\right)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial h}{\partial u_i} + \left[\frac{\partial h}{\partial u_i}\right]^T \cdot \left[\left(G'_v\right)'_v\right] \cdot \frac{\partial h}{\partial u_j} + G'_v \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_i} = 0,$$

que podemos también representar por

$$G_{\alpha-n,ij}+\sum_{\mu}G_{\alpha-n,i\mu}h_{\mu-n,j}+\sum_{\beta}G_{\alpha-n,\beta j}h_{\beta-n,i}+\sum_{\beta,\nu}G_{\alpha-n,\beta\nu}h_{\beta-n,i}h_{\nu-n,j}+\sum_{\beta}G_{\alpha-n,\beta}h_{\beta-n,ij}=0$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}(u)=-\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j}+\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u_i}\right)'_v\cdot\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\frac{\partial G}{\partial u_i}+\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\frac{\partial\left[G'_v\right]}{\partial u_j}\cdot\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\frac{\partial G}{\partial u_i}-$$
$$-\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\left\{\left[\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\frac{\partial G}{\partial u_i}\right]^T\cdot\left[\left(G'_v\right)'_v\right]\cdot\left[G'_v\right]^{-1}\cdot\frac{\partial G}{\partial u_j}\right\} \qquad \mathbf{(2)}$$

y, en la notación indicial, resulta

$$h_{\gamma-n,ij}=-\sum_{\alpha}G^{\alpha\gamma}G_{\alpha-n,ij}+\sum_{\alpha,\mu,\rho}G^{\alpha\gamma}G_{\alpha-n,i\mu}G^{\rho\mu}G_{\rho-n,j}+\sum_{\alpha,\beta,\rho}G^{\alpha\gamma}G_{\alpha-n,\beta j}G^{\rho\beta}G_{\rho-n,i}-$$
$$-\sum_{\alpha,\beta,\nu,\rho,\mu}G^{\alpha\gamma}G_{\alpha-n,\beta\nu}G^{\rho\nu}G_{\rho-n,j}G^{\mu\beta}G_{\mu-n,i}\,.$$

Sea ahora $J=f\circ H$. Para obtener el Hessiano de esta función calculamos primero $\dfrac{\partial J}{\partial u_i}(u)$:

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}(u)=\frac{\partial f}{\partial u_i}(u,h(u))+f'_v(u,h(u))\frac{\partial h}{\partial u_i}(u),$$

esto es, en notación indicial:

$$J_i=f_i+\sum_{\alpha}f_\alpha h_{\alpha-n,i}=f_i-\sum_{\alpha,\beta}f_\alpha G^{\beta\alpha}G_{\beta-n,i}\,.$$

A seguir, derivando esta expresión respecto a u_j, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_i \partial u_j}(u) &= \frac{\partial^2 f(u,h(u))}{\partial u_i \partial u_j}(u,h(u)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)_v^{'} \cdot [G_v']^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_j} + \left\{ \frac{\partial f_v'}{\partial u_j} + \left[-[G_v']^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_j} \right]^T \cdot (f_v')_v' \right\} \cdot \left\{ -[G_v']^{-1} \frac{\partial G}{\partial u_i} \right\} + \\
&\quad + f_v' \cdot [G_v']^{-1} \cdot \left(\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} + \left(\dfrac{\partial G}{\partial u_i}\right)_v^{'} \cdot [G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_i} + \dfrac{\partial [G_v']}{\partial u_j} \cdot [G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_i} - \\ \qquad - \left\{ \left[[G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_i} \right]^T \cdot \left[(G_v^{'})_v^{'} \right] \cdot [G_v']^{-1} \cdot \dfrac{\partial G}{\partial u_j} \right\} \end{array} \right),
\end{aligned}
$$

que también puede expresarse por

$$
\begin{aligned}
J_{ij} &= f_{ij} - \sum_{\alpha,\beta} f_{i\alpha} G^{\beta\alpha} G_{\beta-n,j} - \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha j} G^{\beta\alpha} G_{\beta-n,i} + \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} f_{\alpha,\beta} G^{\mu\alpha} G_{\mu-n,i} G^{\nu\beta} G_{\nu-n,j} + \\
&\quad + \sum_{\gamma} f_{\gamma} \left(\begin{array}{l} -\sum\limits_{\alpha} G^{\alpha\gamma} G_{\alpha-n,ij} + \sum\limits_{\alpha,\mu,\rho} G^{\alpha\gamma} G_{\alpha-n,i\mu} G^{\rho\mu} G_{\rho-n,j} + \sum\limits_{\alpha,\beta,\rho} G^{\alpha\gamma} G_{\alpha-n,\beta j} G^{\rho\beta} G_{\rho-n,j} \\ - \sum\limits_{\alpha,\beta,\nu,\rho,\mu} G^{\alpha\gamma} G_{\alpha-n,\beta\nu} G^{\rho\nu} G_{\rho-n,j} G^{\mu\beta} G_{\mu-n,i} \end{array} \right).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, la naturaleza del punto crítico puede ser determinada evaluando la expresión anterior en el punto U_0, y usando los métodos conocidos para extremos libres:

$$
\frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_i \partial u_j}(U_0) = \frac{\partial^2 f(u,h(u))}{\partial u_i \partial u_j}(U_0, h(U_0)).
$$

Vemos entonces que esta derivada, lugar (*i, j*) del Hessiano de $J = f \circ H$ siempre puede ser calculada en términos de los datos con que se cuenta, que son:

Derivadas de las funciones f **y** G **, hasta de segundo orden, valuadas en** $(U_0, h(U_0)) = (U_0, V_0)$.

Veamos a continuación dos casos ilustrativos del método propuesto:

□ Cuando **n = 1** y **m = 2**

La función a extremar:

$$y = f(x_1, x_2, x_3).$$

Las ecuaciones de condición pueden ser representadas por:

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ G_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned},$$

es decir $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G(X) = (G_1(X), G_2(X))$, $G(x_1, x_2, x_3) = 0$, cuyo Jacobiano podemos expresar por:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_3} \\ \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Si las dos últimas columnas son linealmente independientes es posible definir las dos variables (x_2, x_3) en función de x_1:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x_1) \\ \\ h_2(x_1) \end{pmatrix}$$

y calcular sus derivadas. En efecto, derivando las ecuaciones de condición, y usando la notación indicial para la función G:

$$\begin{pmatrix} G_{1,1} \\ \\ G_{2,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{1,2} & G_{1,3} \\ \\ G_{2,2} & G_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx_2}{dx_1} \\ \dfrac{dx_3}{dx_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3),$$

y despejando resulta

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dh_1}{dx_1} \\ \dfrac{dh_2}{dx_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_2}{dx_1} \\ \dfrac{dx_3}{dx_1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} G_{1,2} & G_{1,3} \\ \\ G_{2,2} & G_{2,3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} G_{1,1} \\ \\ G_{2,1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} G_{2,3} & -G_{1,3} \\ \\ -G_{2,2} & G_{1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_{1,1} \\ \\ G_{2,1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\dfrac{B}{\Delta} \\ -\dfrac{C}{\Delta} \end{pmatrix}$$

donde para mayor comodidad y claridad en la notación hemos definido los menores determinantes del Jacobiano de G de acuerdo al siguiente esquema:

$$\Delta = G_{1,2}G_{2,3} - G_{1,3}G_{2,2}, \quad \mathrm{B} = G_{1,1}G_{2,3} - G_{1,3}G_{2,1}, \quad \mathrm{C} = G_{1,2}G_{2,1} - G_{1,1}G_{2,2} .$$

Ahora si, como en el caso general, denotamos $H = (Id, h)$ tenemos que

$$H(x_1) = (Id(x_1), h(x_1)) = (x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)).$$

Entonces H parametriza a S y podemos escribir

$$J(x_1) = (f \circ H)(x_1) = f(x_1, h(x_1)) = f(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)),$$

cuya primera derivada resulta, entonces,

$$\frac{dJ}{dx_1} = \frac{d(f \circ H)}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} = f_1 - f_2\left(\frac{B}{\Delta}\right) - f_3\left(\frac{C}{\Delta}\right).$$

Veamos la anterior expresión en términos de la nomenclatura matricial:

$$x_1 = u_1, \; x_2 = v_1 = h_1(x_1), \; x_3 = v_2 = h_2(x_1), \; f'_v(u, h(u)) = \left(\frac{\partial f}{\partial v_1}, \frac{\partial f}{\partial v_2}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right),$$

$$G_v'\left(u,h(u)\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \frac{\partial G_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \frac{\partial G_2}{\partial x_3}\end{pmatrix}$$, y de aquí: $\left[G_v'\right]^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\frac{\partial G_2}{\partial x_3} & -\frac{\partial G_1}{\partial x_3}\\ -\frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$, donde hemos

expresado, igualmente, $\Delta:=\det\left(G_v'\right)=\frac{\partial G_1}{\partial x_2}\frac{\partial G_2}{\partial x_3}-\frac{\partial G_1}{\partial x_3}\frac{\partial G_2}{\partial x_2}$.

Se obtiene, entonces, la siguiente expresión para la derivada primera:

$$\frac{dJ}{dx_1}=\frac{d\left(f\circ H\right)}{dx_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\frac{\partial G_1}{\partial x_3}\frac{\partial G_2}{\partial x_1}-\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\frac{\partial G_2}{\partial x_3}}{\frac{\partial G_1}{\partial x_2}\frac{\partial G_2}{\partial x_3}-\frac{\partial G_1}{\partial x_3}\frac{\partial G_2}{\partial x_2}}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\frac{\partial G_2}{\partial x_2}-\frac{\partial G_1}{\partial x_2}\frac{\partial G_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial G_1}{\partial x_2}\frac{\partial G_2}{\partial x_3}-\frac{\partial G_1}{\partial x_3}\frac{\partial G_2}{\partial x_2}}.$$

En búsqueda del "*Hessiano*" derivamos otra vez en la expresión (3):

$$\begin{pmatrix}G_{1,11}+G_{1,12}\frac{dx_2}{dx_1}+G_{1,13}\frac{dx_3}{dx_1}\\ G_{2,11}+G_{2,12}\frac{dx_2}{dx_1}+G_{2,13}\frac{dx_3}{dx_1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}G_{1,21}+G_{1,22}\frac{dx_2}{dx_1}+G_{1,23}\frac{dx_3}{dx_1} & G_{1,31}+G_{1,32}\frac{dx_2}{dx_1}+G_{1,33}\frac{dx_3}{dx_1}\\ G_{2,21}+G_{2,22}\frac{dx_2}{dx_1}+G_{2,23}\frac{dx_3}{dx_1} & G_{2,31}+G_{2,32}\frac{dx_2}{dx_1}+G_{2,33}\frac{dx_3}{dx_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx_2}{dx_1}\\ \frac{dx_3}{dx_1}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}G_{1,2} & G_{1,3}\\ G_{2,2} & G_{2,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d^2x_2}{\left(dx_1\right)^2}\\ \frac{d^2x_3}{\left(dx_1\right)^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

de la cual obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d^2x_2}{(dx_1)^2} \\ \dfrac{d^2x_3}{(dx_1)^2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} G_{1,2} & G_{1,3} \\ G_{2,2} & G_{2,3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{1,11} + G_{1,12}\dfrac{dx_2}{dx_1} + G_{1,13}\dfrac{dx_3}{dx_1} \\ G_{2,11} + G_{2,12}\dfrac{dx_2}{dx_1} + G_{2,13}\dfrac{dx_3}{dx_1} \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} G_{1,2} & G_{1,3} \\ G_{2,2} & G_{2,3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{1,21} + G_{1,22}\dfrac{dx_2}{dx_1} + G_{1,23}\dfrac{dx_3}{dx_1} & G_{1,31} + G_{1,32}\dfrac{dx_2}{dx_1} + G_{1,33}\dfrac{dx_3}{dx_1} \\ G_{2,21} + G_{2,22}\dfrac{dx_2}{dx_1} + G_{2,23}\dfrac{dx_3}{dx_1} & G_{2,31} + G_{2,32}\dfrac{dx_2}{dx_1} + G_{2,33}\dfrac{dx_3}{dx_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx_2}{dx_1} \\ \dfrac{dx_3}{dx_1} \end{pmatrix}$$

y de esta última resulta la expresión

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d^2x_2}{(dx_1)^2} \\ \dfrac{d^2x_3}{(dx_1)^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} G_{2,3}G_{1,11} - G_{1,3}G_{2,11} \\ G_{1,2}G_{2,11} - G_{2,2}G_{1,11} \end{pmatrix} - \frac{2}{\Delta^2}\begin{pmatrix} \left(G_{1,3}G_{2,12} - G_{2,3}G_{1,12}\right)B + \left(G_{1,3}G_{2,13} - G_{2,3}G_{1,13}\right)C \\ \left(G_{2,2}G_{1,12} - G_{1,2}G_{2,12}\right)B + \left(G_{2,2}G_{1,13} - G_{1,2}G_{2,13}\right)C \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{1}{\Delta^3}\begin{pmatrix} \left(G_{2,3}G_{1,22} - G_{1,3}G_{2,22}\right)B^2 + \left(G_{2,3}G_{1,33} - G_{1,3}G_{2,33}\right)C^2 + 2\left(G_{2,3}G_{1,23} - G_{1,3}G_{2,23}\right)BC \\ \left(G_{1,2}G_{2,22} - G_{2,2}G_{1,22}\right)B^2 + \left(G_{1,2}G_{2,33} - G_{2,2}G_{1,33}\right)C^2 + 2\left(G_{1,2}G_{2,23} - G_{2,2}G_{1,23}\right)BC \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos calcular el "Hessiano", primeramente escribimos:

$$J_{11} = \frac{d^2(f\circ H)}{(dx_1)^2} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1}\right)\frac{dx_2}{dx_1} +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d^2x_2}{(dx_1)^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x_3)^2}\frac{dx_3}{dx_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)\frac{dx_3}{dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{d^2x_3}{(dx_1)^2},$$

y, sustituyendo los valores de las dos primeras derivadas de h calculadas anteriormente:

$$J_{11}=f_{11}-\frac{2}{\Delta}\left(Bf_{12}+Cf_{13}\right)+\frac{1}{\Delta^2}\left(B^2f_{22}+C^2f_{33}+2BCf_{23}\right)-$$

$$-f_2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\Delta}\left(G_{2,3}G_{1,11}-G_{1,3}G_{2,11}\right)+\frac{2}{\Delta^2}\left[B\left(G_{1,3}G_{2,12}-G_{2,3}G_{1,12}\right)+C\left(G_{1,3}G_{2,13}-G_{2,3}G_{1,13}\right)\right]+\\+\frac{1}{\Delta^3}\left[B^2\left(G_{2,3}G_{1,22}-G_{1,3}G_{2,22}\right)+C^2\left(G_{2,3}G_{1,33}-G_{1,3}G_{2,33}\right)+2BC\left(G_{2,3}G_{1,23}-G_{1,3}G_{2,23}\right)\right]\end{array}\right\}+$$

$$-f_3\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\Delta}\left(G_{1,2}G_{2,11}-G_{2,2}G_{1,11}\right)+\frac{2}{\Delta^2}\left[B\left(G_{2,2}G_{1,12}-G_{1,2}G_{2,12}\right)+C\left(G_{2,2}G_{1,13}-G_{1,2}G_{2,13}\right)\right]+\\+\frac{1}{\Delta^3}\left[B^2\left(G_{1,2}G_{2,22}-G_{2,2}G_{1,22}\right)+C^2\left(G_{1,2}G_{2,33}-G_{2,2}G_{1,33}\right)+2BC\left(G_{1,2}G_{2,23}-G_{2,2}G_{1,23}\right)\right]\end{array}\right\}.$$

El mismo resultado puede ser obtenido, en la notación matricial, efectuando los cálculos indicados y representando las matrices de acuerdo al siguiente esquema:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)_v^{'}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1},\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1}\right),\quad \frac{\partial G}{\partial u_j}=\begin{pmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial f_v^{'}}{\partial u_j}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\right),$$

$$\left(f_v^{'}\right)_v^{'}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_3)^2}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial G_v^{'}}{\partial u_j}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1\partial x_3}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial^2 G}{\partial u_i\partial u_j}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 G_1}{(\partial x_1)^2}\\ \frac{\partial^2 G_2}{(\partial x_1)^2}\end{pmatrix},$$

$$\left(G_v^{'}\right)_v^{'}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 G}{(\partial x_2)^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_2\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2 G}{(\partial x_3)^2}\end{pmatrix}.$$

Cuando **n = 2 y m = 1**

La función a extremar:

$$y = f(x_1, x_2, x_3)$$

La ecuación de condición:

$$G(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

En este caso vamos a suprimir el uso de subíndices para las componentes de G, puesto que hay sólo una, y escribimos $G_1 := G$. Similarmente, escribiremos $h_1 := h$.

Por otra parte, el Jacobiano de G es

$$G'(X) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \frac{\partial G}{\partial x_3} \right) = \left(G_1, G_2, G_3 \right)$$

y, si suponemos que $\dfrac{\partial G}{\partial x_3} = G_3 \neq 0$, es posible definir a x_3 como función de x_1 y x_2,

i.e., $x_3 = h\left(x_1, x_2\right)$, y calcular sus derivadas parciales.

Así, derivando en la ecuación de condición obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial G}{\partial x_1} + \dfrac{\partial G}{\partial x_3} \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x_2} + \dfrac{\partial G}{\partial x_3} \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right\},$$

y, en consecuencia, podemos expresar las derivadas parciales de la función h por las ecuaciones:

$$\left. \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_1} = - \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_3}} = - \frac{G_1}{G_3}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = - \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_3}} = - \frac{G_2}{G_3} \right\}.$$

A continuación, consideramos la función

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2) &:= (f\circ H)(x_1,x_2) = f(H(x_1,x_2)) \\
&= f(Id(x_1,x_2),h(x_1,x_2)) \\
&= f((x_1,x_2),h(x_1,x_2))
\end{aligned}
$$

siendo

$$
\begin{aligned}
h &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\
H &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

Derivando con respecto a cada variable libre:

$$
\frac{\partial J}{\partial x_1} = \frac{\partial (f\circ H)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_3}},
$$

$$
\frac{\partial J}{\partial x_2} = \frac{\partial (f\circ H)}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_3}}.
$$

Podríamos también, en su caso, calcular las expresiones anteriores en términos de la nomenclatura usada alternativamente:

$$
x_1 = u_1,\ \ x_2 = u_2,\ \ x_3 = v_1 = h(x_1,x_2),\ \ f_v'(u,h(u)) = \frac{\partial f}{\partial v_1} = \frac{\partial f}{\partial x_3},
$$

$$
G_v'(u,h(u)) = \frac{\partial G}{\partial x_3},\ \left[G_v'\right]^{-1} = \frac{1}{\dfrac{\partial G}{\partial x_3}}.
$$

Entonces, expresando las primeras derivadas en términos de la notación con índices resultan:

$$J_1 = f_1 - f_3 \frac{G_1}{G_3} \quad \text{y} \quad J_2 = f_2 - f_3 \frac{G_2}{G_3} \ .$$

Finalmente derivamos otra vez:

$$\frac{\partial^2 J}{(\partial x_1)^2} = \frac{\partial^2 (f \circ H)}{(\partial x_1)^2} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x_3)^2} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial^2 x_3}{(\partial x_1)^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 J}{(\partial x_2)^2} = \frac{\partial^2 (f \circ H)}{(\partial x_2)^2} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x_3)^2} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial^2 x_3}{(\partial x_2)^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 (f \circ H)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x_3)^2} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \ ,$$

y, también, para representar estas derivadas segundas en términos de la nomenclatura alternativa, escribimos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right)_v^{'} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_i}, \quad i = 1,2 \ ; \quad \frac{\partial G}{\partial u_j} = \frac{\partial G}{\partial x_j}, \quad j = 1,2 \ ; \quad \frac{\partial f_v^{'}}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_3}, \quad j = 1,2 \ ;$$

$$\left(f_v^{'} \right)_v^{'} = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_3)^2}, \quad \frac{\partial G_v^{'}}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_3}, \quad j = 1,2 \ ; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i,j = 1,2 \ ;$$

$$\left(G_v^{'} \right)_v^{'} = \frac{\partial^2 G}{(\partial x_3)^2} \ .$$

Entonces, en términos de la nomenclatura indicial, obtenemos la siguientes ecuaciones para las componentes de la matriz Hessiana:

$$J_{11}=f_{11}-f_{13}\frac{G_1}{G_3}-f_{31}\frac{G_1}{G_3}+f_{33}\left(\frac{G_1}{G_3}\right)^2+f_3\frac{1}{G_3}\left\{-G_{11}+G_{13}\frac{1}{G_3}G_1+G_{31}\frac{1}{G_3}G_1-G_{33}\left(\frac{G_1}{G_3}\right)^2\right\},$$

$$J_{22}=f_{22}-f_{23}\frac{G_2}{G_3}-f_{32}\frac{G_2}{G_3}+f_{33}\left(\frac{G_2}{G_3}\right)^2+f_3\frac{1}{G_3}\left\{-G_{22}+G_{23}\frac{1}{G_3}G_2+G_{32}\frac{1}{G_3}G_2-G_{33}\left(\frac{G_2}{G_3}\right)^2\right\},$$

$$J_{12}=f_{12}-f_{13}\frac{G_2}{G_3}-f_{32}\frac{G_1}{G_3}+f_{33}\frac{G_1}{G_3}\frac{G_2}{G_3}+f_3\frac{1}{G_3}\left\{-G_{12}+G_{23}\frac{1}{G_3}G_1+G_{31}\frac{1}{G_3}G_2-G_{33}\frac{G_1}{G_3}\frac{G_2}{G_3}\right\}.$$

3. Comparación con otros métodos.

Recordemos, a seguir, los clásicos métodos ya desarrollados en [1]; [2]; [4] y 6]: Por ejemplo, Spring, D. [6] considera, de acuerdo a nuestra nomenclatura, la función Lagrangiana $L:\mathbb{R}^{n+2m}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$L(\lambda_1,\ldots,\lambda_m,x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n})=f(x_1,\ldots,x_{m+n})+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha G_\alpha(x_1,\ldots,x_{m+n}).$$

En consecuencia, su Hessiano es una matriz (**n+2m**) x (**n+2m**) que podemos representar por la ecuación:

$$HL(Y_0)=\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{m+n}}(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{m+n}}(Y_0) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_1}(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_{m+n}}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_{m+n}}(Y_0) \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_{m+n}}(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_{m+n}\partial x_1}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_{m+n}^2}(Y_0) \end{matrix} \end{bmatrix}$$

donde $Y_0 = (\lambda, X_0)$, y tenemos **m** condiciones o funciones de restricción; **n** variables libres. (para una mayor información ver [6]. También se puede ver un caso particular en Marsden y Tromba, [4], donde **m** = 1). El análisis de Spring, en cuanto a determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de ensilladura, está basado en el estudio de una sucesión finita de menores principales superiores izquierdos de la matriz anterior. (Ver [6], Sección 2, Teorema 1). A continuación exponemos una síntesis de su trabajo.

Sea $(y_j)_{1 \le j \le r}$ una sucesión no trivial de números reales (esto es, con no todos sus términos iguales a cero). Sea y_k el último término diferente de cero en esta sucesión.

Definiciones:

3.1. La sucesión (y_j) se dice que es *positiva semi-definida* si $y_j > 0, \ j = 1, \dots, k$.

3.2. La sucesión (y_j) se dice que es *negativa semi-definida* si $(-1)^j y_j > 0, \ j = 1, \dots, k$.

3.3. La sucesión no trivial (y_j) se dice que es de *tipo ensilladura* si ninguna de las condiciones (3.1) o (3.2) se satisface. Esto es, se verifica: ya sea que algún $y_j = 0, \ j < k$, o la sucesión de signos no es la indicada en (3.1) o (3.2).

3.4. La sucesión (y_j) se dice que es *positiva (negativa) definida* si es positiva (negativa) semi-definida y $k = r$ (esto es, el último término $y_r \neq 0$).

Notación.

(a) Un menor principal de orden j – ésimo de una matriz cuadrada M, de orden $n \times n$, es el determinante de una submatriz principal $j \times j$ de M (esto es, una submatriz obtenida suprimiendo $(n-j)$ filas y las correspondientes $(n-j)$ columnas de M.

(b) Sea M una matriz cuadrada $n \times n$. Para cada permutación π de $\{1, \dots, n\}$ denotemos con $M(\pi)$ la matriz obtenida a partir de M permutando las filas y columnas de acuerdo a π.

Sea

$\Gamma_k = (-1)^m \times$[menor principal superior izquierdo de orden k de la matriz Hessiana $HL(Y_0)$], donde $1 \le k \le 2m+n$. En particular $\Gamma_{2m+n} = (-1)^m \det HL(Y_0)$.

Sea π una permutación de $\{1,...,2m+n\}$; y sea

$\Gamma_k(\pi) = (-1)^m \times$[menor principal superior izquierdo de orden k de la matriz $HL(Y_0)(\pi)$],

$1 \le k \le 2m+n$. Sólo las sucesiones $(\Gamma_{2m+p})_{1\le p\le n} = (\Gamma_{2m+1},...,\Gamma_{2m+n})$ y $(\Gamma_{2m+p}(\pi))_{1\le p\le n}$ serán usadas en el análisis.

Teorema 1. (Examen de las segundas derivadas). Supongamos que $Y_0 = (\lambda, X_0)$ es un punto crítico de la función Lagrangiana L. Supongamos que f , G_1: $\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, sean funciones diferenciables de clase $C^{(3)}$ en un entorno de X_0, y que el Jacobiano de la función $G = (G_1,...,G_m)$: $\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ tiene rango maximal ($= m$) en X_0. En particular, reordenando las variables $(x_1,...,x_n,x_{n+1}...,x_{n+m})$, si fuera necesario, supongamos que el determinante Jacobiano

$$\det\left[\frac{\partial(G_1,...,G_m)}{\partial(x_1,...,x_m)}(X_0)\right] \ne 0.$$

(Obsérvese que aquí, a diferencia de lo que nosotros postulamos en la demostración del teorema de la Sección 1, se supone que las m columnas linealmente independientes de $G'(X_0)$ son las m primeras).

(a) Supongamos que $\Gamma_{2m+n} \ne 0$ (esto es, que $\det HL(Y_0) \ne 0$).
   (i) Si la sucesión $(\Gamma_{2m+p})_{1\le p\le n}$ es positiva-definida entonces, sujeta a las restricciones, f tiene un mínimo local estricto en X_0.
   (ii) Si la sucesión $(\Gamma_{2m+p})_{1\le p\le n}$ es negativa-definida entonces, sujeta a las restricciones, f tiene un máximo local estricto en X_0.

(b) Supongamos que la sucesión $(\Gamma_{2m+p})_{1\le p\le n}$ es no trivial y de tipo ensilladura (en particular no suponemos que $\det HL(Y_0) \neq 0$, sólo que $(\Gamma_{2m+p})_{1\leq p\leq n} \neq 0$ para algún p).

Entonces, sujeta a las restricciones, f no tiene máximo local ni mínimo local en X_0.

Este caso se conoce como la alternativa de ensilladura.

(b)′ (Alternativa de ensilladura amplia). Supongamos que existe una permutación π de las últimas n filas y columnas de la matriz $HL(Y_0)$ (esto corresponde a una permutación de las últimas n variables $\mathbb{R}^{n+m}$: $(x_1, \ldots, x_{m+n}) \rightarrow (x_1, \ldots, x_m, x_{\pi(m+1)}, \ldots, x_{\pi(m+n)})$) tal que la sucesión $(\Gamma_{2m+p}(\pi))_{1\leq p\leq n}$ asociada a la matriz $HL(Y_0)(\pi)$ sea no trivial y de tipo ensilladura. Entonces, sujeta a las restricciones, f no tiene máximo local ni mínimo local en X_0.

Por su parte, Fleming considera:

$$F_{ij} = L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}$$

que son los elementos de la submatriz $(m+n)\times(m+n)$ de derivadas segundas de L que podemos ver en el ángulo inferior derecho del Hessiano "mayor" usado por Spring. El análisis de Fleming se basa en el siguiente resultado, (Ver en [2], Sección 4-8, Ejercicio 11), aquí también expuesto según nuestra nomenclatura:

Sean f y G de clase $C^{(2)}$, y sea

$$Q(Y,t) = \sum_{i,j=1}^{n+m} F_{ij}(Y)t^i t^j$$

a) si $f|_S$ tiene un máximo relativo en X_0, entonces $Q(Y_o,t) \geq 0 \quad \forall t \in T_{X_0}(S)$, espacio tangente a S en X_0.

b) si $Q(Y_o,t) > 0, \quad \forall t \in T_{X_0}(S), \quad t \neq 0$, entonces $f|_S$ tiene un máximo relativo estricto en el punto X_0

Finalmente, concluimos que nuestro método para analizar puntos críticos maneja una matriz más reducida y, en cierto sentido, más fácil de operar. En efecto, y según lo expuesto anteriormente, tendremos para la matriz Hessiana a ser considerada, tres alternativas dimensionales:

1) Según nuestro método: **n** x **n.**

2) Método de Spring y otros (caso particular Marsden-Tromba **m=1**):(**n+2m**) x **n+2m**).

3) Método de Fleming: (**n+m**) x (**n+m**).

Además, y por otro lado, en nuestro método no intervienen los multiplicadores de Lagrange, mientras que en los otros dos son parte esencial del cálculo.

Referencias

[1] Carathéodory, C. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, págs. 175-197, 1965.
[2] Fleming, W.H. *Functions of Several Variables*, Addison-Wesley, 1965.
[3] Gigena, S., Binia, M., Joaquín D., Cabrera, E., Abud, D., *Análisis Matemático II – Teoría, Práctica y Aplicaciones,* Editorial Galeón, 1998.
[4] Marsden, J. y Tromba, A. J. *Vector Calculus*, 2nd edition, Freeman, 1976.
[5] Murata, Y. *Mathematics for Stability and Optimization of Economics Systems*, Academic Press, 1977.
[6] Spring, D. *On the Second Derivative Test for Constrained Local Extrema*, Am. Math Monthly, (1985), 631-643.
[7] Apostol, T. *Análisis Matemático*. Ed. Reverté. España. Año 1960.

Direcciones académicas de los autores:

Salvador Gigena (1,2)

1) Departamento de Matemáticas. Fac. de Cs. Exs., Fis. y Nats. Universidad Nacional de Córdoba. Avda. Velez Sarsfield 299. - 5000 Córdoba.

Correo electrónico: sgigena@fceia.unr.edu.ar

Moisés Binia (1) - Daniel Abud (1)

1) Departamento de Matemáticas. Fac. de Cs. Exs., Ing. y Agr. Universidad Nacional de Rosario. Avda. Pellegrini 250. - 2000 Rosario.

Correo electrónico: mbinia@gtwing.efn.uncor.edu - dabud@gtwing.efn.uncor.edu.