Aproximándose a la Modelación del Azar (I)

Eugenio Saavedra G. [1]

Resumen: Este artículo muestra, por medio del juego de lanzar dados, una forma de motivar la distribución binomial usada en el Cálculo de Probabilidades.

1 Introducción

Se lanza un dado "honesto", es decir, no está cargado a ningún número en particular, o dicho de otro modo, todos los números tienen igual chance de salir. Si el número que muestra el dado (en su cara superior) es un número primo, diremos que ocurrió un "éxito" y si no es primo, diremos que ocurrió un "fracaso". Hemos realizado una "tirada" cuando lanzamos una vez el dado. Los resultados posibles de una "tirada" son: 1 (éxito), 2 (éxito), 3 (éxito), 4 (fracaso), 5 (éxito), 6 (fracaso). Realizamos 10 tiradas del dado, obteniendo la secuencia

$$3, 5, 1, 4, 5, 3, 1, 4, 2, 2.$$

Si ahora contamos el número de veces en que ocurrió fracaso, y el número de veces en que ocurrió éxito, tendremos que, se obtuvieron 2 fracasos (2 veces cero éxito) y 8 éxitos (8 veces un éxito). Realizamos, nuevamente, 10 tiradas del dado obteniendo ahora la secuencia

$$1, 6, 5, 2, 6, 1, 6, 3, 2, 3.$$

En este caso resultaron 3 fracasos y 7 éxitos. Si realizamos otra vez 10 tiradas del dado, posiblemente resulte un número distinto de fracasos y un número distinto de éxitos, que los obtenidos anteriormente. Podríamos decir entonces, que el número de éxitos que obtenemos al lanzar el dado 10 veces depende del azar. ¿Existirá algún patrón o tendencia que siga la proporción de éxitos que resultan después de lanzar el dado 10 veces, 100 veces, o un "gran número" de veces ?.

[1]Parcialmente financiado por DICYT N° 049833SG .

También podríamos plantearnos la interrogante anterior, lanzando dos dados (n dados) en lugar de uno. La proporción de éxitos (que dependerá del azar) es la que se modelará matemáticamente, y a partir de la cuál, se deducirá un modelo para la distribución binomial.

2 Lanzando un Dado

Lanzamos un dado "muchas veces" y observamos, en cada lanzamiento, si el dado muestra un número primo o no. Como realizar "muchas" tiradas del dado (por ejemplo 1000), es un poco lento y engorroso, usaremos el computador para simular los lanzamientos. La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos en una simulación.

Columna uno: indica el número de veces que se tira el dado.

Columna dos: indica el número de veces que no salió número primo (cero éxito), al tirar el dado la cantidad de veces que indica la columna uno.

Columna tres: indica el número de veces que salió número primo (un éxito), al tirar el dado la cantidad de veces que indica la columna uno.

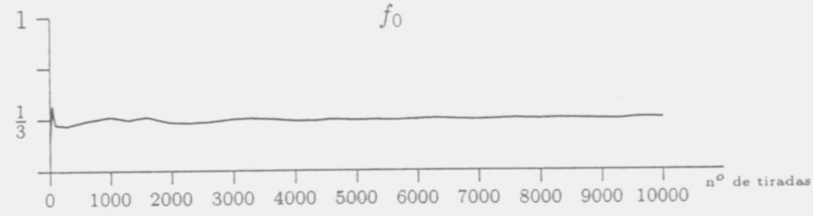
Columna cuatro: indica la fracción, columna 2 sobre columna 1 (la llamaremos frecuencia relativa de cero éxito, anotándose f_0).

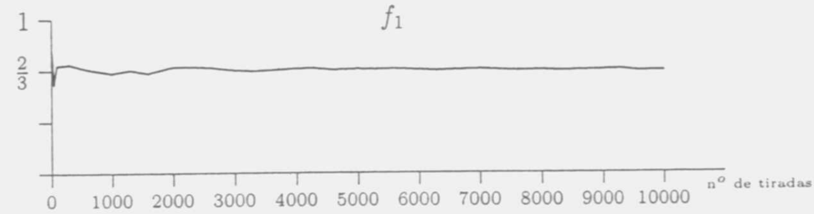
Columna cinco: indica la fracción, columna 3 sobre columna 1 (la llamaremos frecuencia relativa de un éxito, anotándose f_1).

Simulación del Experimento
(lanzar un dado)

nº de veces que se lanza un dado	nº de veces que no sale nº primo (0 éxito)	nº de veces que sale nº primo (1 éxito)	f_0	f_1
10	2	8	0,2000	0,8000
50	18	32	0.3600	0,6400
100	28	72	0,2800	0,7200
1000	326	674	0,3260	0,6740
2000	670	1330	0,3350	0,6650
3000	968	2032	0,3227	0,6773
4000	1326	2674	0,3315	0,6685
5000	1658	3342	0,3316	0,6684
6000	1968	4032	0,3280	0,6720
7000	2327	4673	0.3324	0,6676
8000	2661	5339	0.3326	0,6674
9000	3041	5959	0,3379	0.6621
10000	3304	6696	0,3304	0,6696
15000	5086	9914	0,3391	0.6609
20000	6705	13295	0,3353	0,6648
30000	9926	20074	0,3309	0,6691

A contiuación, mostramos los gráficos del número de tiradas versus f_0 y número de tiradas versus f_1.





De los gráficos podemos observar que mientras más tiradas realizamos, las frecuencias relativas varían muy poco, obteniéndose que f_0 es "cercano" a $\frac{1}{3}$ y que f_1 es "cercano" a $\frac{2}{3}$. Más aún, al simular nuevamente las tiradas de un dado, las columnas 2 y 3 de la tabla anterior cambian; pero, al igual que en la primera simulación, mientras más tiradas se realizan, las frecuencias relativas f_0 y f_1 serán nuevamente "cercanas" a $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente. Este hecho motiva el siguiente modelo matemático.

2.1 Modelo Matemático Asociado al Experimento

Si llamamos $b(1, \frac{2}{3}; 0)$ a la probabilidad de que no salga número primo al lanzar un dado (probabilidad de obtener cero éxito) y $b(1, \frac{2}{3}; 1)$ a la probabilidad de que salga número primo al lanzar un dado (probabilidad de obtener un éxito), entonces, motivados por la experiencia anterior, definimos

$$\begin{aligned} b\left(1, \frac{2}{3}; 0\right) &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{\text{n}^o \text{ de casos posibles en que no sale n}^o \text{ primo, al lanzar un dado}}{\text{n}^o \text{ total de resultados que pueden obtenerse al lanzar un dado}}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} b\left(1, \frac{2}{3}; 1\right) &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{\text{n}^o \text{ de casos posibles en que sale n}^o \text{ primo, al lanzar un dado}}{\text{n}^o \text{ total de resultados que pueden obtenerse al lanzar un dado}}. \end{aligned} \tag{2}$$

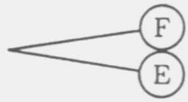
Si ahora denotamos por E_1 al valor $0 \cdot b(1, \frac{2}{3}; 0) + 1 \cdot b(1, \frac{2}{3}; 1)$, se obtiene que

$$E_1 = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Escribiendo este resultado como producto del número de dados que se lanzan (uno) y la probabilidad de obtener un éxito (dos tercios) resulta que

$$E_1 = 1 \cdot \frac{2}{3}. \tag{4}$$

El resultado del lanzamiento de un dado puede verse como el siguiente árbol, donde el símbolo F significa que ocurrió fracaso y el símbolo E que ocurrió éxito.



Este árbol tiene dos ramas, verificándose que:

Sólo una vez ocurre la rama un fracaso, o sea, cero éxito.

Sólo una vez ocurre la rama un éxito.

Escribiendo el número de ramas de este árbol como una secuencia de números, en forma horizontal, se tiene la secuencia

$$1 \quad 1$$

También, las probabilidades de cero éxito (fracaso) y un éxito pueden verse como el árbol

Entonces, una manera alternativa de escribir $b(1, \frac{2}{3}; 0)$ y $b(1, \frac{2}{3}; 1)$ es como producto; el cual contenga: al número de ramas del árbol y potencias de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ $(\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3})$:

$$
\begin{aligned}
b\left(1, \tfrac{2}{3}; 0\right) &= \tfrac{1}{3} = 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^1, \\
b\left(1, \tfrac{2}{3}; 1\right) &= \tfrac{1}{3} = 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

3 Lanzando dos Dados

Repetimos el experimento de la sección anterior, pero en lugar de lanzar un dado, lanzamos dos dados. Cabe señalar que, cualquiera de las siguientes formas de lanzar dos dados arroja el mismo tipo de resultados.

a) Se tienen dos dados (los identificamos como dado 1 y dado 2) y los lanzamos simultáneamente.

b) Se tienen dos dados (los identificamos como dado 1 y dado 2), lanzamos primero el dado 1 y luego lanzamos el dado 2.

c) Se tiene un dado, se lanza una vez (éste se identifica como el dado 1), se recoge y luego se lanza una segunda vez (éste se identifica como el dado 2).

Para fijar ideas usaremos la forma b) de lanzamiento. Precisemos que, si realizamos por ejemplo, 2 tiradas, esto significa que tomamos los dos dados, los lanzamos una vez, los recogemos y luego los volvemos a lanzar. Algunos resultados posibles de una tirada son:

dado 1	dado 2	
3	2	(éxito, éxito)
1	4	(éxito, fracaso)
6	6	(fracaso, fracaso)
⋮		
etc.		

Notar que la cantidad de resultados posibles de una tirada son 36.

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{dado 1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \cdots & \boxed{6} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{dado 2} & \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6} & \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6} & \cdots & \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}
\end{array}
$$

Al igual que en el experimento anterior, deseamos modelar matemáticamente la proporción de éxitos (que depende del azar) que resultan después de realizar "muchas" tiradas. Por esta razón, simularemos ahora en el computador el lanzamiento de dos dados. La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos en una simulación.

Columna uno: indica el número de veces que se tiran los dos dados

Columna dos: indica el número de veces que no se obtuvo número primo en ninguno de los dos dados (cero éxito), al tirar los dos dados la cantidad de veces que indica la columna uno.

Columna tres: indica el número de veces que se obtuvo número primo en sólo uno de los dos dados (un éxito), al tirar los dos dados la cantidad de veces que indica la columna uno.

Columna cuatro: indica el número de veces que se obtuvo número primo en los dos dados (dos éxitos), al tirar los dos dados la cantidad de veces que indica la columna uno.

Columna cinco: indica el número total de veces que se obtuvo número primo (número total de éxitos), al tirar los dos dados la cantidad de veces que indica la columna uno. Nótese que esta columna se obtiene al sumar la columna 3 más 2 veces la columna 4.

Columna seis: indica la fracción, columna 2 sobre columna 1, que al igual que en el primer experimento la llamaremos frecuencia relativa de cero éxito, anotándose f_0.

Columna siete: indica la fracción, columna 3 sobre columna 1, anotándose f_1.

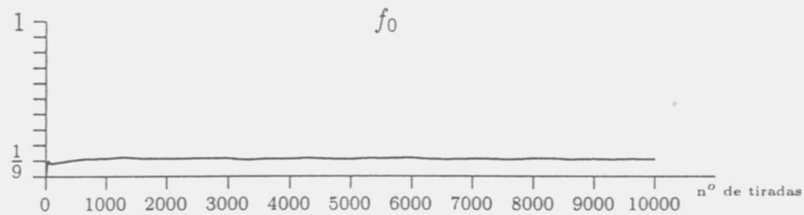
Columna ocho: indica la fracción, columna 4 sobre columna 1, anotándose f_2.

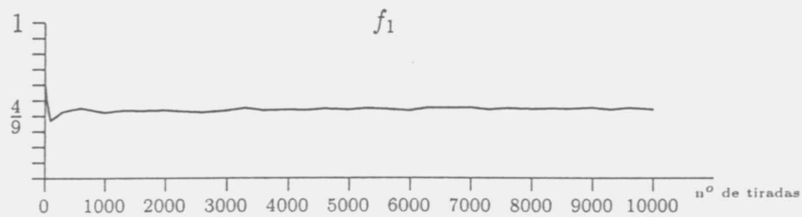
Columna nueve: indica la fracción columna 5 sobre columna 1, que representa el número promedio de primos (promedio de éxitos) que se han obtenido, al tirar dos dados la cantidad de veces que indica la columna 1, la anotaremos e_2.

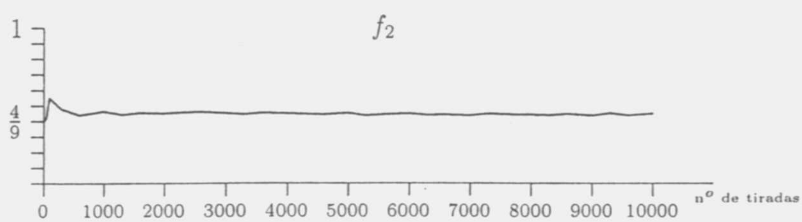
Simulación del Experimento
(lanzar dos dados)

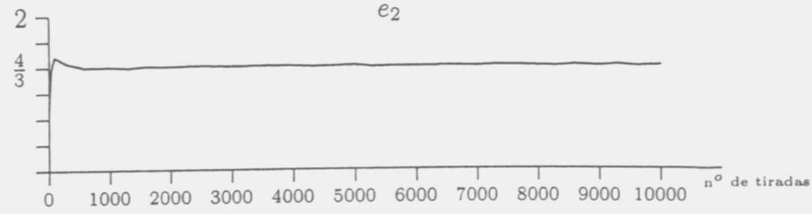
nº de veces que se lanzan dos dados	nº de veces que no sale primo en los dos dados (0 éxito)	nº de veces que sale primo en sólo un dado (1 éxito)	nº de veces que sale primo en los dos dados (2 éxitos)	nº total de veces que sale nº primo	f_0	f_1	f_2	e_2
10	0	6	4	14	0.0000	0.6000	0.4000	1.4000
50	5	24	21	66	0.1000	0.4800	0.4200	1.3200
100	8	37	55	147	0.0800	0.3700	0.5500	1.4700
1000	114	422	464	1350	0.1140	0.4220	0.4640	1.3500
2000	228	872	900	2672	0.1140	0.4360	0.4500	1.3360
3000	345	1301	1354	4009	0.1150	0.4337	0.4513	1.3363
4000	443	1755	1802	5359	0.1108	0.4388	0.4505	1.3398
5000	543	2194	2263	6720	0.1086	0.4388	0.4526	1.3440
6000	710	2599	2691	7981	0.1183	0.4332	0.4485	1.3302
7000	777	3167	3056	9279	0.1110	0.4524	0.4366	1.3256
8000	908	3547	3545	10637	0.1135	0.4434	0.4431	1.3296
9000	997	4061	3942	11945	0.1108	0.4512	0.4380	1.3272
10000	1093	4411	4496	13403	0.1093	0.4411	0.4496	1.3403
15000	1642	6755	6603	19961	0.1095	0.4503	0.4402	1.3307
20000	2180	8808	9012	26832	0.1090	0.4404	0.4506	1.3416
30000	3388	13191	13421	40033	0.1129	0.4397	0.4474	1.3344

Las gráficas siguientes muestran el número de tiradas versus f_0 (respectivamente f_1, f_2 y e_2).









Al igual que en el experimento anterior, las gráficas muestran que mientras más tiradas realizamos, las frecuencias f_0, f_1, f_2 y e_2 permanecen "cercanas" a los valores $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{4}{3}$, respectivamente. Estos resultados nos sugieren el siguiente modelo matemático.

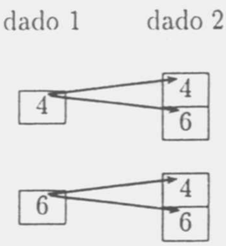
3.1 Modelo Matemático Asociado al Experimento.

Si llamamos $b(2, \frac{2}{3}; 0)$ a la probabilidad que en los dos dados lanzados no salga número primo (probabilidad de obtener cero éxito), entonces, motivados por los resultados experimentales previos, definimos:

$$b(2, \frac{2}{3}; 0) = \frac{1}{9} = \frac{4}{36}, \tag{6}$$

que corresponde al número de casos posibles en que al lanzar dos dados, en los dos no sale número primo (4 casos), dividido por el número total de resultados que pueden obtenerse al lanzar dos dados (36 casos).

Estos son los 4 casos en que no sale número primo en ninguno de los dos dados.



Si ahora llamamos $b(2, \frac{2}{3}; 1)$ a la probabilidad de que salga solamente un número primo al lanzar dos dados (probabilidad de obtener un éxito), entonces, nuevamente motivados por los resultados experimentales previos es que definimos

$$b(2, \frac{2}{3}, 1) = \frac{4}{9} = \frac{16}{36}, \tag{7}$$

que corresponde al número de casos posibles en que al lanzar dos dados, sale un número primo (16 casos), dividido por el número total de resultados que pueden obtenerse al lanzar dos dados (36 casos).

Estos son los 16 casos en que sólo en un dado sale número primo

dado 1		dado 2	dado 1		dado 2
$\boxed{4}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}$	$\boxed{1}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 4\\\hline 6\\\hline\end{array}$
			$\boxed{2}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 4\\\hline 6\\\hline\end{array}$
$\boxed{6}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}$	$\boxed{3}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 4\\\hline 6\\\hline\end{array}$
			$\boxed{5}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 4\\\hline 6\\\hline\end{array}$

Finalmente, llamando $b(2, \frac{2}{3}, 2)$ a la probabilidad de que en los dos dados lanzados salga número primo (probabilidad de obtener dos éxitos), definimos:

$$b(2, \frac{2}{3}, 2) = \frac{4}{9} = \frac{16}{36}, \tag{8}$$

que corresponde al número de casos posibles en que al lanzar dos dados, los dos salen número primo (16 casos), dividido por el número total de resultados que pueden obtenerse al lanzar dos dados (36 casos).

Los 16 casos donde, en los dos dados sale número primo son:

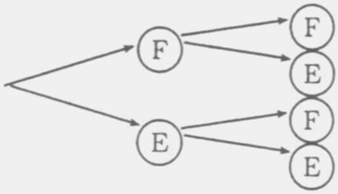
dado 1		dado 2	dado 1		dado 2
$\boxed{1}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}$	$\boxed{3}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}$
$\boxed{2}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}$	$\boxed{5}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}$

Si ahora, llamamos E_2 al valor, $0 \cdot b(2, \frac{2}{3}; 0) + 1 \cdot b(2, \frac{2}{3}; 1) + 2 \cdot b(2, \frac{2}{3}; 2)$, se obtiene

$$E_2 = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3}. \tag{9}$$

Es decir, E_2 es el producto del número de dados lanzados (dos), con la probabilidad de éxito al lanzar un dado (dos tercios). El valor E_2 es un modelo matemático para la frecuencia e_2, que muestra la columna 9 de la tabla anterior. O sea, E_2 representa un modelo para el número promedio de éxitos (números primos) que se obtienen al lanzar dos dados.

El siguiente árbol muestra los posibles resultados del lanzamiento de dos dados



Notar que este árbol tiene 4 ramas, verificándose que:

Sólo una vez ocurre la rama dos fracasos, o sea, cero éxito.

Dos veces ocurre la rama exactamente un éxito (y por tanto un fracaso).

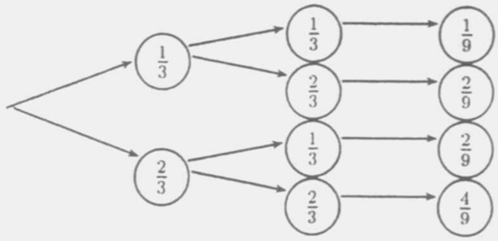
Sólo una vez ocurre la rama dos éxitos (y por tanto cero fracaso).

Escribiendo el número de ramas de este árbol como una secuencia de números, en forma horizontal, se tiene la secuencia.

$$1 \quad 2 \quad 1$$

Como vimos anteriormente, la probabilidad de que ocurra cero éxito (que no salga primo) en el lanzamiento del dado 1 es $\frac{1}{3}$, mientras que la probabilidad de que ocurra un éxito (que salga primo) es $\frac{2}{3}$. Estas mismas probabilidades son válidas para el lanzamiento del dado 2.

Veamos ahora las probabilidades de cero éxito, un éxito y dos éxitos como diagrama de árbol.



Nótese que:

Sólo en una rama ocurre cero éxito y dos fracasos, y esta rama tiene probabilidad $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

En dos ramas ocurre un éxito y un fracaso, y cada rama tiene la misma probabilidad, ésta es, $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Luego, la probabilidad de obtener un éxito y un fracaso es $2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.

Finalmente, sólo en una rama ocurren dos éxitos y cero fracaso, y esta rama tiene probabilidad $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Entonces, una forma alternativa de escribir $b(2, \frac{2}{3}; 0), b(2, \frac{2}{3}; 1)$ y $b(2, \frac{2}{3}; 2)$ como producto que contenga: el número de ramas del árbol, potencias de $\frac{2}{3}$ y potencias de $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$), es:

$$\begin{aligned} b(2, \tfrac{2}{3}; 0) &= \tfrac{1}{9} = 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \\ b(2, \tfrac{2}{3}; 1) &= \tfrac{4}{9} = 2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 \\ b(2, \tfrac{2}{3}; 2) &= \tfrac{4}{9} = 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \end{aligned} \tag{10}$$

4 Lanzando tres Dados

Nuevamente, repetimos el primer experimento, pero, en lugar de lanzar un dado, lanzamos tres dados. Los comentarios a), b), y c) del segundo experimento en la sección 3, también son válidos en este caso, cambiando dos dados por tres dados. Algunos resultados posibles en este caso son:

dado 1	dado 2	dado 3	
4	2	6	(fracaso, éxito, fracaso)
1	4	4	(éxito, fracaso, fracaso)
5	3	2	(éxito, éxito, éxito)
⋮	⋮	⋮	⋮

Existen 216 resultados posibles en una tirada (recordar que una tirada significa el lanzamiento de tres dados), los cuales se listan a continuación

111	112	113	114	115	116	121	122	123	124	125	126	131	132	133	134	135
136	141	142	143	144	145	146	151	152	153	154	155	156	161	162	163	164
165	166	211	212	213	214	215	216	221	222	223	224	225	226	231	232	233
234	235	236	241	242	243	244	245	246	251	252	253	254	255	256	261	262
263	264	265	266	311	312	313	314	315	316	321	322	323	324	325	326	331
332	333	334	335	336	341	342	343	344	345	346	351	352	353	354	355	356
361	362	363	364	365	366	411	412	413	414	415	416	421	422	423	424	425
426	431	432	433	434	435	436	441	442	443	444	445	446	451	452	453	454
455	456	461	462	463	464	465	466	511	512	513	514	515	516	521	522	523
524	525	526	531	532	533	534	535	536	541	542	543	544	545	546	551	552
553	554	555	556	561	562	563	564	565	566	611	612	613	614	615	616	621
622	623	624	625	626	631	632	633	634	635	636	641	642	643	644	645	646
651	652	653	654	655	656	661	662	663	664	665	666					

También en este experimento deseamos modelar matemáticamente la proporción de éxitos que se obtienen después de realizar "muchas" tiradas; por esta razón, simularemos ahora, en el computador, el lanzamiento de tres dados. La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos en una simulación.

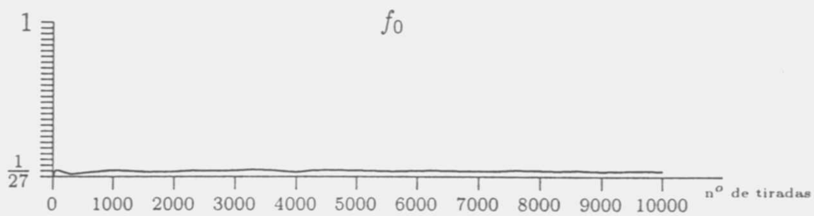
Nuevamente, columna uno indica el número de veces que se tiran los dados. Las restantes columnas son análogas a las columnas de la tabla de la sección 3, así por ejemplo, columna 4 indica el número de veces que salió número primo en solamente dos dados (dos éxitos), al tirar los tres dados la cantidad de veces que indica la columna uno.

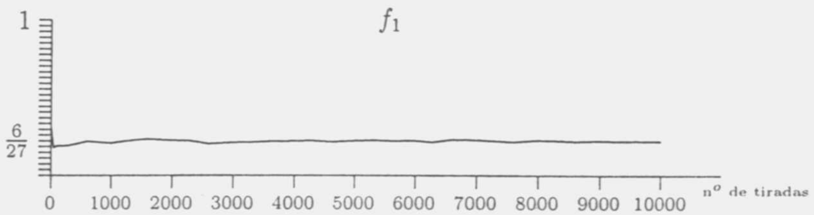
uno.

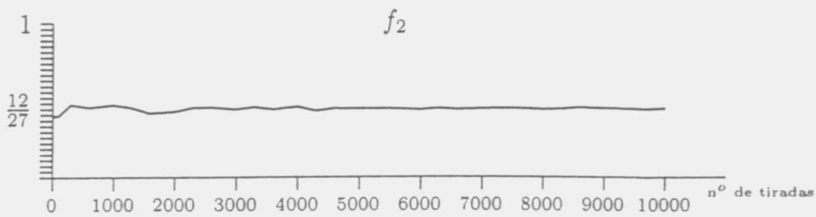
Simulación del Experimento
(lanzar tres dados)

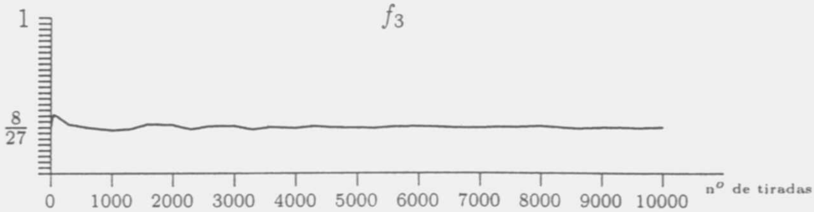
nº de veces que se lanzan tres dados	nº de veces que no sale primo en los tres dados (0 éxito)	nº de veces que sale primo en sólo un dado (1 éxito)	nº de veces que sale primo en los dos dados (2 éxitos)	nº de veces que sale primo en los tres dados (3 éxitos)	nº total de veces que sale nº primo	f_0	f_1	f_2	f_3	e_3
10	0	3	4	3	20	0.0000	0.3000	0.4000	0.3000	2.0000
50	2	9	20	19	106	0.0400	0.1800	0.4000	0.3800	2.1200
100	4	19	40	37	210	0.0400	0.1900	0.4000	0.3700	2.1000
1000	41	209	471	279	1988	0.0410	0.2090	0.4710	0.2790	1.988
2000	66	454	855	625	4039	0.0330	0.2270	0.4275	0.3125	2.0195
3000	119	638	1326	917	6041	0.0396	0.2127	0.4420	0.3057	2.0137
4000	117	889	1830	1164	8041	0.0293	0.2223	0.4575	0.2910	2.0103
5000	202	1120	2217	1461	9937	0.0404	0.2240	0.4434	0.2922	1.9874
6000	232	1346	2619	1803	11993	0.0386	0.2243	0.4365	0.3005	1.9988
7000	254	1610	3095	2041	13923	0.0362	0.2300	0.4421	0.2916	1.9890
8000	317	1749	3508	2426	16043	0.0396	0.2286	0.4385	0.3033	2.0054
9000	310	2029	4019	2642	17993	0.0344	0.2254	0.4466	0.2936	1.9992
10000	365	2217	4455	2963	20016	0.0365	0.2217	0.4455	0.2963	2.0016
15000	558	3311	6608	4523	30096	0.0372	0.2207	0.4405	0.3015	2.0064
20000	746	4467	8836	5951	39992	0.0373	0.2234	0.4418	0.2976	1.9996
30000	1059	6766	13387	8788	59904	0.0353	0.2255	0.4462	0.2929	1.9968

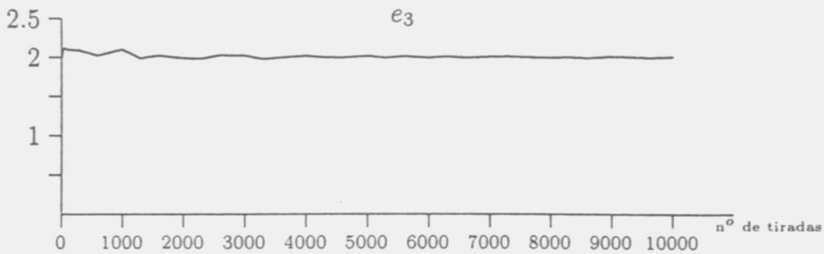
A continuación, se muestran los gráficos del número de tiradas versus f_0 (respectivamente f_1, f_2, f_3 y e_3).











Nuevamente, los gráficos muestran que mientras mayor es el número de tiradas que realizamos, las frecuencias f_0, f_1, f_2, f_3 y e_3 permanecen "cercanas" a los valores $\frac{1}{27}$, $\frac{6}{27}$, $\frac{12}{27}$, $\frac{8}{27}$ y 2 respectivamente. Estos resultados sugieren el siguiente modelo matemático.

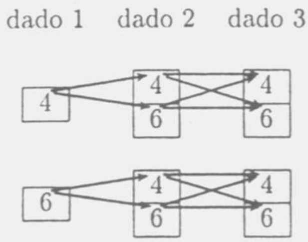
4.1 Modelo Matemático Asociado al Experimento

Llamando $b(3, \frac{2}{3}; 0)$ a la probabilidad de que no salga un número primo en ninguno de los tres dados lanzados (probabilidad de obtener 0 éxito), definimos

$$b\left(3, \frac{2}{3}, 0\right) = \frac{1}{27} = \frac{8}{216}, \tag{11}$$

que corresponde al número de casos posibles en que al lanzar tres dados, en ninguno sale primo (ocho casos) dividido por el número total de resultados que pueden obtenerse al lanzar tres dados (216 casos).

Estos son los ocho casos en que no sale primo en ninguno de los tres dados.



En forma análoga se tiene que:

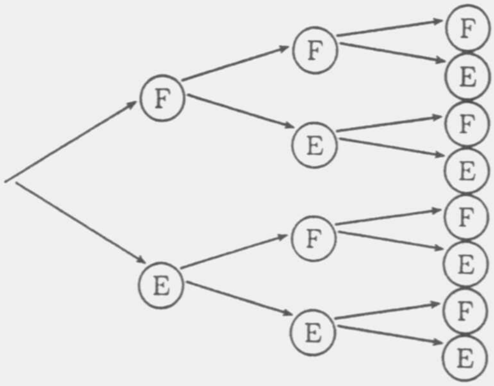
$$
\begin{aligned}
b\left(3, \tfrac{2}{3}; 1\right) &= \tfrac{6}{27} = \tfrac{48}{216}, \\
b\left(3, \tfrac{2}{3}; 2\right) &= \tfrac{12}{27} = \tfrac{96}{216}, \\
b\left(3, \tfrac{2}{3}; 3\right) &= \tfrac{8}{27} = \tfrac{64}{216}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Llamando ahora E_3, al valor, $0 \cdot b(3, \frac{2}{3}; 0) + 1 \cdot b(3, \frac{2}{3}; 1) + 2 \cdot b(3, \frac{2}{3}; 2) + 3 \cdot b(3, \frac{2}{3}; 3)$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
E_3 &= 0 \cdot \tfrac{1}{27} + 1 \cdot \tfrac{6}{27} + 2 \cdot \tfrac{12}{27} + 3 \cdot \tfrac{8}{27} \\
&= \tfrac{54}{27} \\
&= 2 \\
&= 3 \cdot \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Por lo cual, E_3 es el producto del número de dados lanzados (tres) por la probabilidad de éxito al lanzar un dado (dos tercios). El valor E_3 es un modelo matemático para la frecuencia e_3, que muestra la columna 11 de la tabla anterior. Es decir, E_3 representa el número promedio de éxitos (números primos) que se obtendrán al lanzar tres dados.

El resultado del lanzamiento de los tres dados, también puede verse como el siguiente árbol.



Este árbol tiene ocho ramas, cumpliéndose que:

Sólo una vez ocurre la rama tres fracasos, es decir, cero éxito.

Tres veces ocurre la rama exactamente un éxito (y por tanto dos fracasos).

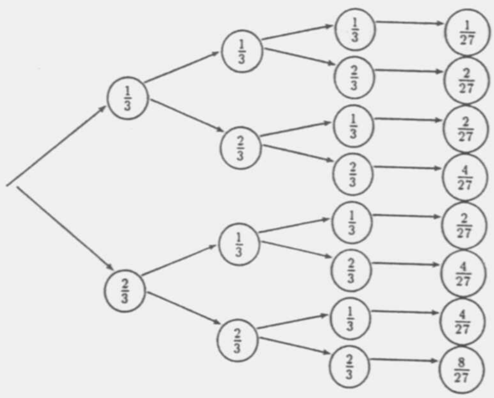
Tres veces ocurre la rama exactamente dos éxitos (y por tanto un fracaso).

Sólo una vez ocurre la rama tres éxitos (y por tanto cero fracaso).

Escribiendo el número de ramas de este árbol como secuencia de números, en forma horizontal, se tiene la secuencia: 1 3 3 1

Al igual que en el experimento anterior, la probabilidad de que ocurra cero éxito (que no salga primo) en el lanzamiento del dado 1 es $\frac{1}{3}$, mientras que la probabilidad de que ocurra un éxito (que salga primo) es $\frac{2}{3}$. Estas mismas probabilidades son válidas para el lanzamiento del dado 2 y dado 3.

Veamos ahora las probabilidades de cero éxito, un éxito, dos éxitos y tres éxitos como diagrama de árbol



Desde este árbol observamos que:

Sólo en una rama ocurre cero éxito y tres fracasos, y esta rama tiene probabilidad $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

En tres ramas ocurre un éxito y dos fracasos, cada rama tiene la misma probabilidad, ésta es, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$. Luego, la probabilidad de obtener un éxito y dos fracasos será $3\cdot\frac{2}{27} = \frac{6}{27}$.

En tres ramas ocurren dos éxitos y un fracaso, y cada rama tiene la misma probabilidad, ésta es, $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$. Entonces, la probabilidad de obtener dos éxitos y un fracaso será $3\cdot\frac{4}{27} = \frac{12}{27}$.

Finalmente, sólo en una rama ocurren tres éxitos y cero fracaso, y esta rama tiene probabilidad $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

Así, una forma alternativa de escribir $b(3, \frac{2}{3}; 0)$, $b(3, \frac{2}{3}; 1)$, $b(3, \frac{2}{3}; 2)$ y $b(3, \frac{2}{3}; 3)$ como producto que contenga: el número de ramas del árbol, potencias de $\frac{2}{3}$ y potencias de $\frac{1}{3}$, es:

$$\begin{aligned} b\left(3, \tfrac{2}{3}; 0\right) &= \tfrac{1}{27} = 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \\ b\left(3, \tfrac{2}{3}; 1\right) &= \tfrac{6}{27} = 3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \\ b\left(3, \tfrac{2}{3}; 2\right) &= \tfrac{12}{27} = 3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 \\ b\left(3, \tfrac{2}{3}; 3\right) &= \tfrac{8}{27} = 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \end{aligned} \tag{14}$$

5 Modelo para el Lanzamiento de cuatro Dados

Resumamos los resultados obtenidos en las tres secciones anteriores.

Lanzamiento de un dado

$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$
probabilidad de cero éxito	probabilidad de un éxito

Lanzamiento de dos dados

$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$
probabilidad de cero éxito	probabilidad de un éxito	probabilidad de dos éxitos

Lanzamiento de tres dados

$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$
probabilidad de cero éxito	probabilidad de un éxito	probabilidad de dos éxitos	probabilidad de tres éxitos

Si ahora, calculamos la potencias del binomio $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)$ (hasta la potencia 3), obtenemos

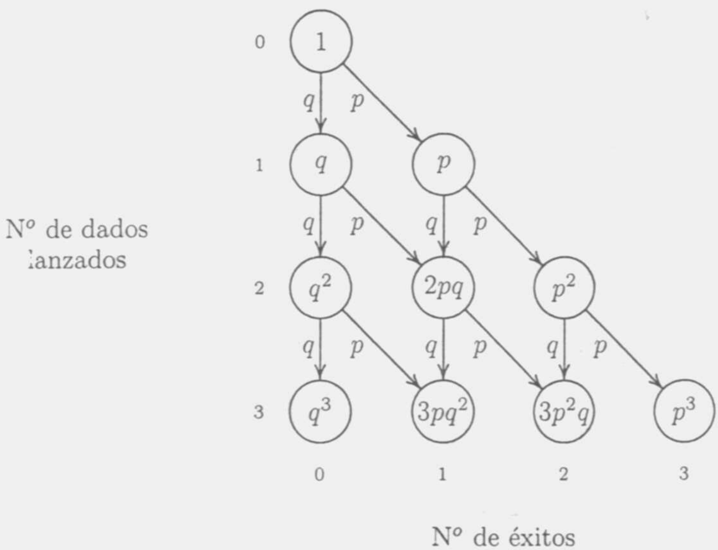
$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)^1 \\
&= \tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3} \\
&= 1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + 1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \\
&= b\left(1,\tfrac{2}{3};0\right) + b\left(1,\tfrac{2}{3};1\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)^2 \\
&= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \\
&= 1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + 1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \\
&= b\left(2,\tfrac{2}{3};0\right) + b\left(2,\tfrac{2}{3};1\right) + b\left(2,\tfrac{2}{3};2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)^3 \\
&= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right) \\
&= \left[1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+2\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^1+1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^0\right]\cdot\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right) \\
&= 1\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\cdot\tfrac{1}{3}+2\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^1\cdot\tfrac{1}{3}+1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^0\cdot\tfrac{1}{3}+1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\cdot\tfrac{2}{3} \\
&\quad +2\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^1\cdot\tfrac{2}{3}+1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^0\cdot\tfrac{2}{3} \\
&= 1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+3\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^1+1\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \\
&= b\left(3,\tfrac{2}{3};0\right)+b\left(3,\tfrac{2}{3};1\right)+b\left(3,\tfrac{2}{3};2\right)+b\left(3,\tfrac{2}{3};3\right).
\end{aligned}
$$

Lo cual verifica, nuevamente, que la suma de las probabilidades en cada experimento es uno.

El anterior resumen también puede verse como el siguiente diagrama, donde $p=\frac{2}{3}$ y $q=\frac{1}{3}$.



Si en el resumen anterior sólo consideramos las secuencias de ramas, (las llamaremos coeficientes) se tiene el diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \text{(ramas correspondientes al lanzamiento de un dado)} \\ & 1 & & 2 & & 1 & \text{(ramas correspondientes al lanzamiento de dos dados)} \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \;\text{(ramas correspondientes al lanzamiento de tres dados)} \end{array}$$

Recordemos que, por ejemplo, 2 es el número de ramas en que ocurre un éxito al lanzar dos dados; además, 3 es el número de ramas en que ocurren dos éxitos al lanzar tres dados. Expresando estos valores como un arreglo que considere el número de dados lanzados y el número de éxitos obtenidos podemos escribir

$$2 \;= \binom{2}{1} = \binom{\text{número de dados lanzados}}{\text{número de éxitos}}$$

$$3 \;= \binom{3}{2} = \binom{\text{número de dados lanzados}}{\text{número de éxitos}}$$

Entonces, el diagrama de las secuencias de ramas se escribe como:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Por otra parte, $n! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdots}n$, producto de uno por dos por tres, hasta el producto por n, y $0!$ se define como uno, entonces

$$\frac{1!}{0!(1-0)!} = 1 = \binom{1}{0} \qquad \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1 = \binom{3}{0}$$

$$\frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 = \binom{1}{1} \qquad \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3 = \binom{3}{1}$$

$$\frac{2!}{0!(2-0)!} = 1 = \binom{2}{1} \qquad \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 = \binom{3}{2}$$

$$\frac{2!}{1!(2-1)!} = 2 = \binom{2}{1} \qquad \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1 = \binom{3}{3}$$

$$\frac{2!}{2!(2-2)!} = 1 = \binom{2}{2}$$

Estos resultado sugieren el siguiente modelo

5.1 Modelo Matemático Asociado al Experimento de lanzar 4 dados

Llamemos $b(4, \frac{2}{3}; k)$ a la probabilidad de obtener k números primos al lanzar 4 dados. En función de los tres experimentos analizados anteriormente, podemos concluir que la secuencia de ramas que se obtendrán para este experimento serán:

$$\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

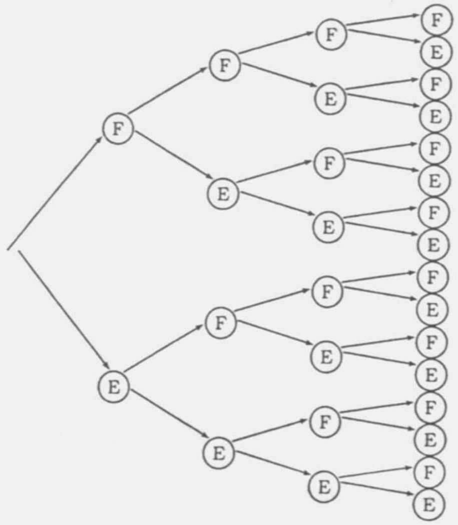
es decir,

$$\frac{4!}{0!(4-0)!} \qquad \frac{4!}{1!(4-1)!} \qquad \frac{4!}{2!(4-2)!} \qquad \frac{4!}{3!(4-3)!} \qquad \frac{4!}{4!(4-4)!}$$

o sea, la secuencia de ramas que se obtienen en el lanzamiento de 4 dados es

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$

Esta secuencia puede ser obtenida, al igual que en las actividades previas, del árbol que se muestra a continuación.



También, desde el resumen previo, podemos inferir que $b(4, \frac{2}{3}; k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, se escribe, como producto que contenga el número de ramas del árbol, potencias de $\frac{2}{3}$ y potencias de $\frac{1}{3}$, de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
b\left(4, \tfrac{2}{3}; 0\right) &= \tbinom{4}{0} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{4-0} &&= 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 &&= \tfrac{1}{81} \\
b\left(4, \tfrac{2}{3}; 1\right) &= \tbinom{4}{1} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{4-1} &&= 4 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 &&= \tfrac{8}{81} \\
b\left(4, \tfrac{2}{3}; 2\right) &= \tbinom{4}{2} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{4-2} &&= 6 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 &&= \tfrac{24}{81} \\
b\left(4, \tfrac{2}{3}; 3\right) &= \tbinom{4}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{4-3} &&= 4 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 &&= \tfrac{32}{81} \\
b\left(4, \tfrac{2}{3}; 4\right) &= \tbinom{4}{4} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{4-4} &&= 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 &&= \tfrac{16}{81}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Es decir,

$$
b\left(4, \frac{2}{3}; k\right) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k} \quad , k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \tag{16}
$$

Además, si calculamos la potencia cuarta del binomio $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right)^4 &= \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\right) \\
&= \left[1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 3 \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + 1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \left(\tfrac{1}{3}\right)^0\right] \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) \\
&= 1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 + 3 \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 \\
&\quad +1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 3 \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + 1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \\
&= 1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 + 4 \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + 6 \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 4 \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + 1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \\
&= b\left(4, \tfrac{2}{3}; 0\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 1\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 2\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 3\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 4\right),
\end{aligned}
$$

de donde,

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right)^4 \\
&= b\left(4, \tfrac{2}{3}; 0\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 1\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 2\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 3\right) + b\left(4, \tfrac{2}{3}; 4\right),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

lo que ratifica que la suma de las probabilidades $b(4, \frac{2}{3}, k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, es igual a 1.

También, un modelo matemático para representar el número promedio de éxitos (números primos) que se obtendrán al lanzar cuatro dados es, en este caso,

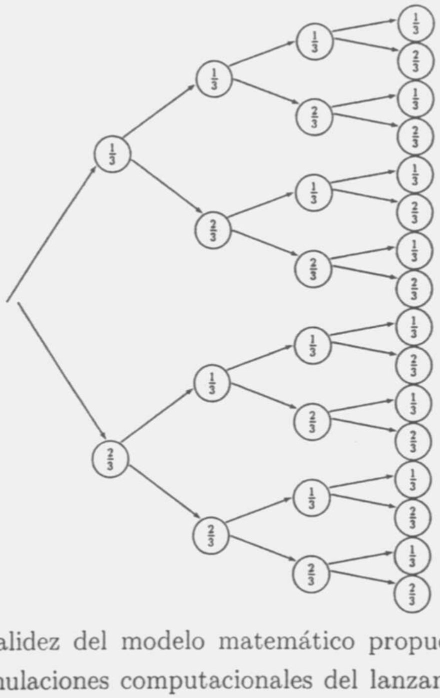
$$E_4 \quad = 0 \cdot b\left(4, \tfrac{2}{3}; 0\right) + 1 \cdot b\left(4, \tfrac{2}{3}; 1\right) + 2 \cdot b\left(4, \tfrac{2}{3}; 2\right) + 3 \cdot b\left(4, \tfrac{2}{3}; 3\right) + 4 \cdot b\left(4, \tfrac{2}{3}; 4\right), \tag{18}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} E_4 \quad &= 0 \cdot \tfrac{1}{81} + 1 \cdot \tfrac{8}{81} + 2 \cdot \tfrac{24}{81} + 3 \cdot \tfrac{32}{81} + 4 \cdot \tfrac{16}{81} \\ &= \tfrac{216}{81} \\ &= 4 \cdot \tfrac{2}{3}, \end{aligned} \tag{19}$$

por lo tanto, E_4 es nuevamente el producto del número de dados lanzados (cuatro) con la probabilidad de éxito al lanzar un dado (dos tercios).

El modelo para $b(4, \frac{2}{3}; k)$, al igual que en las secciones previas, puede ser deducido a partir de la secuencia de ramas recientemente obtenidas, y del árbol de probabilidades siguiente



Para verificar la validez del modelo matemático propuesto para $b(4, \frac{2}{3}; k)$ y E_4, se pueden realizar simulaciones computacionales del lanzamiento de cuatro dados. Las columnas de la tabla siguiente tienen análogo significado a las de la tabla presentada en la simulación del lanzamiento de tres dados.

Simulación del Experimento (lanzar cuatro dados)

nº de veces que se lanzan cuatro dados	nº de veces que no sale primo en ningún dado (0 éxito)	nº de veces que sale primo en sólo un dado (1 éxito)	nº de veces que sale primo en solo dos dados (2 éxitos)	nº de veces que sale primo en solo tres dados (3 éxitos)	nº de veces que sale primo en los cuatro dados (4 éxitos)	nº total de veces que sale nº primo	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	e_4
10	0	1	2	4	3	29	0.0000	0.1000	0.2000	0.4000	0.3000	2.9000
50	0	6	18	17	9	129	0.0000	0.1200	0.3600	0.3400	0.1800	2.5800
100	0	8	27	45	20	277	0.0000	0.0800	0.2700	0.4500	0.2000	2.7700
1000	12	97	283	397	211	2698	0.0120	0.0970	0.2830	0.3970	0.2110	2.6980
2000	30	181	600	799	390	5338	0.0150	0.0905	0.3000	0.3995	0.1950	2.6690
3000	42	273	901	1196	588	8015	0.0140	0.0910	0.3003	0.3987	0.1960	2.6717
4000	59	392	1165	1581	803	10677	0.0148	0.0980	0.2913	0.3953	0.2008	2.6693
5000	51	512	1484	1960	993	13332	0.0102	0.1024	0.2968	0.3920	0.1986	2.6664
6000	89	611	1726	2403	1171	15956	0.0148	0.1018	0.2877	0.4005	0.1952	2.6593
7000	80	730	2077	2758	1355	18578	0.0114	0.1043	0.2967	0.3940	0.1936	2.6540
8000	115	809	2320	3184	1572	21289	0.0144	0.1011	0.2900	0.3980	0.1965	2.6611
9000	101	871	2676	3572	1780	24059	0.0112	0.0967	0.2973	0.3969	0.1978	2.6732
10000	134	981	3006	3909	1970	26600	0.0134	0.0981	0.3006	0.3909	0.1970	2.6600
15000	188	1464	4447	5964	2937	39998	0.0125	0.0976	0.2965	0.3976	0.1958	2.6665
20000	245	1929	6061	7772	3993	53339	0.0123	0.0965	0.3031	0.3886	0.1997	2.6661
30000	385	2924	8924	11850	5917	79990	0.0128	0.0974	0.2975	0.3950	0.1972	2.6663

6 El Modelo General

El lanzamiento de dados y el hecho de considerar como éxito la salida de un número primo, es sólo un pretexto para introducir el llamado Esquema de Bernoulli, el cual modela situaciones muy frecuentes que se presentan en el Cálculo de Probabilidades.

Esquema de Bernoulli

Se realiza un cierto "ensayo" cuyos resultados dependen del azar. Un resultado del "ensayo" representa una determinada característica. Si la realización de un ensayo, da como resultado la característica, se dice que ocurrió un éxito, en caso contrario se dice que ocurrió un fracaso. Se repite n veces el "ensayo", cada repetición del "ensayo" se llama intento. Además, los "ensayos" son independientes, esto es, el resultado de un "ensayo" no tiene influencia ninguna en el resultado de otro "ensayo". Finalmente, la probabilidad de obtener éxito, digamos p, en cualquiera de los "ensayos" es siempre la misma.

Un "experimento" que cumple con las condiciones antes mencionadas se dice que sigue un Esquema Bernoulli de parámentros (n, p).

A modo de ejemplo: un dado es lanzado tres veces; ¿cuál es la probabilidad de obtener en dos de ellos un número primo?

Acá el ensayo corresponde a lanzar el dado, la característica representada es ser número primo, es decir, éxito significa que al lanzar el dado salió un número primo. Por tanto, fracaso significa que al lanzar el dado no salió un número primo, es decir, salió 4 ó 6. El número de veces que se repite el ensayo es tres y la probabilidad de obtener éxito en cualquiera de los tres ensayos es siempre la misma, igual a $\frac{2}{3}$ (según los resultados experimentales estudiados anteriormente). Por tanto, este experimento sigue un Esquema Bernoulli de parámetros $(3, \frac{2}{3})$.

6.1 Modelo Matemático Asociado al Esquema Bernoulli

Llamando $b(n, p, ; k)$ a la probabilidad de obtener exactamente k éxitos, y por tanto $n - k$ fracasos, en un "experimento" que sigue un Esquema Bernoulli con parámentros (n, p), definimos:

$$
\begin{aligned}
b(n,p;k) &= \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad , \qquad k \in \{0,1,...,n\} \\
&= \begin{pmatrix} \text{n}^o \text{ de ensayos} \\ \text{n}^o \text{ de éxitos} \end{pmatrix} p^{\,\text{n}^o \text{ de éxitos}} (1-p)^{\,\text{n}^o \text{ de fracasos}} \quad ,
\end{aligned} \tag{20}
$$

donde $\binom{n}{k}$ representa el valor $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

A este modelo se le conoce como distribución binomial de parámetros (n,p).

Inductivamente, podemos verificar que:

$$
\begin{aligned}
1 &= (p + (1-p))^n \\
&= \tbinom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \tbinom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + ... + \tbinom{n}{n} p^n (1-p)^0 \\
&= b(n,p;0) + b(n,p;1) + ... + b(n,p;n-1) + b(n,p;n) \,.
\end{aligned} \tag{21}
$$

En este caso, también podemos definir E_n como:

$$
E_n = 0 \cdot b(n,p;0) + 1 \cdot b(n,p;1) + ... + (n-1) \cdot b(n,p;n-1) + n \cdot b(n,p;n),
$$

que representa un modelo matemático para el número promedio de éxitos, que se obtendrán en un Esquema Bernoulli de parámetros (n,p). En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
E_n &= 0 \cdot \tbinom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + 1 \cdot \tbinom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + ... + n \cdot \tbinom{n}{n} p^n (1-p)^0 \\
&= np \left[\tbinom{n-1}{0} p^0 (1-p)^{(n-1)-0} + \tbinom{n-1}{1} p^1 (1-p)^{(n-1)-1} \right] \\
&\qquad\qquad + ... + \left[\tbinom{n-1}{n-1} p^{(n-1)} (1-p)^0 \right] \\
&= np \left[b(n-1,p;0) + b(n-1,p;1) + ... + b(n-1,p;n-2) + b(n-1,p;n-1) \right] \\
&= (np) \cdot 1 \\
&= np,
\end{aligned} \tag{22}
$$

que corresponde al producto del número de ensayos que se repiten, con la probabilidad de éxito en cualquiera de los ensayos.

Ejemplo: Se construyen dos versiones de un calefactor eléctrico, uno con cuatro componentes de calor y otro con dos componentes de calor. Existe probabilidad θ de que falle una de las componentes cuando se enciende el calefactor, independientemente de las otras componentes. Los calefactores no funcionan si falla más de la mitad de sus componentes.

a) Encuentre la probabilidad de que el calefactor de dos componentes funcione.

b) Encuentre la probabilidad de que el calefactor de cuatro componentes funcione.

c) ¿Qué valores de θ hacen igualmente fiables los dos calefactores?

Este problema sigue un Esquema de Bernoulli con:

a) . ensayo: revisar componentes cuando se enciende el calefactor

. ensayo: revisar componentes cuando se enciende el calefactor

. éxito: la componente falla

. probabilidad de éxito: θ

. número de ensayos repetidos: 2.

La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} b(2,\theta;0)+b(2,\theta;1) &= [b(2,\theta;0)+b(2,\theta;1)+b(2,\theta;2)]-b(2,\theta;2) \\ &= 1-b(2,\theta;2) \\ &= 1-\theta^2. \end{aligned}$$

b) . ensayo: revisar componentes cuando se enciende el calefactor

. éxito: la componente falla

. probabilidad de éxito:θ

. número de ensayos repetidos: 4

La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} b(4,\theta;0)+b(4,\theta;1)+b(4,\theta;2) &= (1-\theta)^4+4\theta(1-\theta)^3+6\theta^2(1-\theta)^2 \\ &= (1-\theta)^2((1-\theta)^2+4\theta(1-\theta)+6\theta^2) \\ &= (1-\theta)^2(1-2\theta+\theta^2+4\theta-4\theta^2+6\theta^2) \\ &= (1-\theta)^2(3\theta^2+2\theta+1) \\ &= 3\theta^4-4\theta^3+1. \end{aligned}$$

c) el valor de θ que hace igualmente fiable los dos calefactores debe satisfacer la ecuación

$$1-\theta^2 = 3\theta^4-4\theta^3+1,$$

o sea,

$$0=\theta^2(\theta-1)(\theta-1/3),$$

de donde $\theta=\frac{1}{3}$, pues $0<\theta<1$.

Referencias

[1] Pitman, J., Probability, Springer-Verlag, 1993.

[2] Saavedra, E., Descubriendo Distribuciones de Probabilidades, Monografía (por aparecer).

Departamento de Matemática y C.C., Universidad de Santiago de Chile,Casilla 307, Correo 2 Santiago, Chile,E-mail: keno@lauca.usach.cl