# Geometría Futbolística

Una experiencia de aula

*María Rosa Berraondo, Marcela Sanluis*
*Juan Ignacio Perna, Carlos Nicolás Gugliermo*

*El calendario ha cubierto su ciclo y empiezan los campeonatos de fútbol. Argentina es un país en el cual el fútbol es un deporte nacional. Aprovechando esta circunstancia, yo le planteo a los alumnos de 2° año (14 años) del Instituto San Agustín de San Luis, Argentina, averiguar la forma de la pelota.*

*Ellos elaboran una hipótesis: La pelota de fútbol es un poliedro, y se abocan a estudiar los poliedros con los siguientes objetivos:*

- Identificar la pelota de fútbol.
- Identificar las figuras geométricas por las que está compuesta una pelota de fútbol.
- Conocer la geometría de los poliedros.
- Adquirir nociones de volúmenes al construir poliedros.
- Analizar distintos desarrollos de poliedros para descubrir cuáles arman poliedros y cuáles no.

*Se transcribe el informe que hizo el grupo para presentarse en la Feria de Ciencias, en el convencimiento que el mismo describe cómo se trabajó.*

Como nuestra hipótesis es que la pelota de fútbol es un poliedro, empezamos a buscar poliedros y referencias históricas al respecto.

Quizás convenga remontarse a aquel diálogo del Fedón, donde Sócrates dice que la tierra, vista desde el espacio exterior, será "coloreada como pelotas hechas de doce trozos de fieltro", esta frase nos da una pista sobre la técnica con que los deportistas helénicos construían sus pelotas. Como expertos geómetras que eran, no cabe duda que los doce trozos eran otros tantos pentágonos regulares iguales, que al ser cocidos por sus lados entre sí, formaban el poliedro platónico llamado Dodecaedro regular, cuyo relleno con trapos remendaría aceptablemente una pelota esférica.

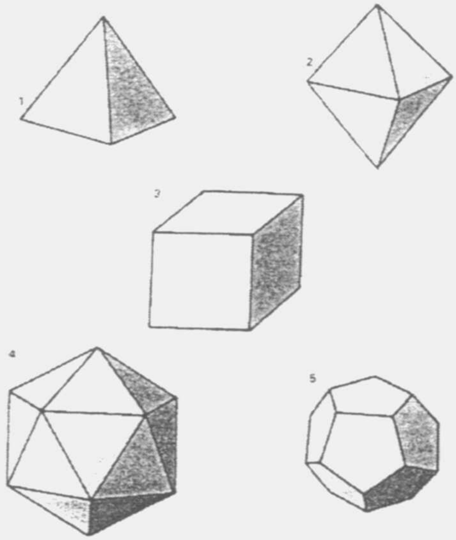
Según podemos apreciar en la figura de la página siguiente hay cinco poliedros regulares formados por polígonos regulares y llamados a saber:

1. **Tetraedro** (cuatro triángulos equiláteros).
2. **Octaedro** (ocho triángulos equiláteros).
3. **Hexaedro o cubo** (seis cuadrados).
4. **Icosaedro** (veinte triángulos equiláteros).
5. **Dodecaedro** (doce pentágonos regulares).

Los griegos amaban los poliedros regulares, ya que los consideraban una expresión matemática de la belleza.

En otro diálogo de Platón, su personaje central, Timeo, los asociaba con cuatro elementos que según las ideas de la época, formaban el universo: agua, aire, tierra y fuego, que si eran asociados con el Icosaedro (agua por lo brillante), octaedro (aire por lo inestable o aéreo), cubo (tierra por lo estable y sólido) y tetraedro (fuego por lo simple).

Y en cuanto al elemento sobre el dodecaedro era asociado a todo el universo diciendo: "aún quedó una construcción, la quinta, y Dios la usó para el todo, adornándola con una serie de imágenes de animales".

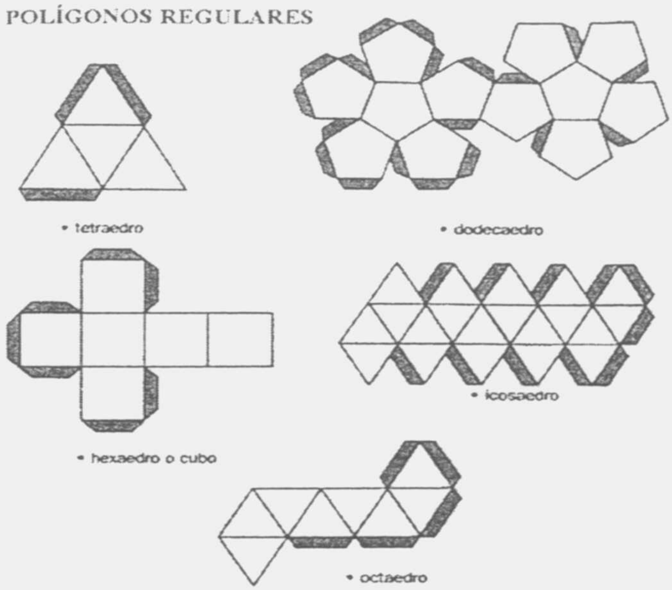


*Luego de la historia, pensamos que los desarrollos de los poliedros eran importantes y conjuntamente con la profesora de plástica, nos abocamos a su construcción.*

En estos momentos, nuestro objetivo es construir los cuerpos platónicos.

En el libro del doctor Santaló encontramos los desarrollos de los cinco poliedros regulares.

Todos armamos el tetraedro sin problemas y también el octaedro. Luego armamos el cubo:




Existen cinco y solamente cinco poliedros regulares, a saber: los poliedros cuyas caras son todas polígonos regulares congruentes entre sí.

La situación se complicó bastante cuando quisimos armar el dodecaedro.

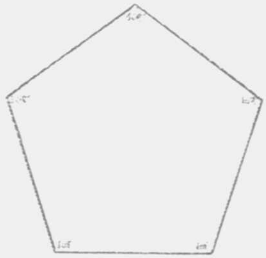
Primero no sabíamos como dibujar un pentágono regular. Nos preguntamos, ¿Cuánto miden los ángulos interiores de tal pentágono?, y encontramos la respuesta:

Sabemos que $S_m = 2R.(m-2)$. Luego para el pentágono tenemos:

$S_5 = 2R.(5-2) = 2.90^{\circ}.3 = 540^{\circ}$ .

Entonces cada ángulo mide: $540^{\circ}/5 = 108^{\circ}$ , ya que todos los ángulos son iguales.

Y el ángulo exterior resulta: $180^{\circ} - 108^{\circ} = 72^{\circ}$ :



A pesar de todo es difícil dibujar bien así que vamos a tratar de hacer el pentágono inscripto en una circunferencia.

Al estudiar este problema descubrimos que todo polígono regular es inscriptible en una circunferencia. Luego nos preguntamos: "¿Cuál es la relación entre el radio de la circunferencia y el lado del pentágono?".

En un libro encontramos:

$$L_5 = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \quad .$$

Esta es la fórmula que necesitábamos. Si queremos hacer un pentágono de tres centímetros de lado, aplicando la fórmula, ¿Cuál es el radio?:

$$3 = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \therefore 6 = r\sqrt{10-2\sqrt{5}} \therefore r = 6/\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$\sqrt{5} = 2.236068$ (¡ojo!, es un número irracional, tiene infinitas cifras decimales).

Luego, $2.\sqrt{5} \cong 4.4721358$

y $10-2\sqrt{5} \cong 10-4.4721 \cong 5.5279$.

Finalmente: $\sqrt{5.5279} \cong 2.35114$.

Y entonces $6/2.35114 \cong 2.5519535$.

Podemos tomar $r = 2.55$ cm.

Luego el diámetro es $d = 5.10$.

Creemos que no en vano los griegos lo consideraban el universo.

Finalmente armamos el **Icosaedro**. Ninguno de estos poliedros es la pelota actual y no sabemos que hacer.

¿Hasta que punto es bueno el dodecaedro como simulador de la esfera?.

La medida definitiva de su grado de redondez **"será el cociente entre su volumen y el de su esfera circunscripta"**.

En el libro de Santaló, y usando la computadora encontramos los respectivos volúmenes de los cuerpos platónicos en función de sus aristas **a**, y la relación entre dichos volúmenes y el volumen de la esfera.

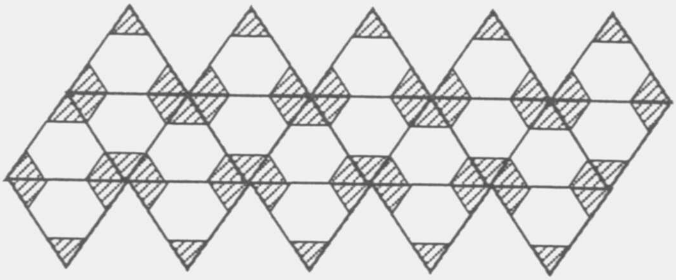
| POLIEDRO | VOLUMEN | % DEL VOL. DE LA ESFERA QUE OCUPA EL POLIEDRO CORRESP. |
|---|---|---|
| TETRAEDRO | $(\sqrt{2}/12)a^3$ | 12.25% |
| HEXAEDRO O CUBO | $a^3$ | 36.76% |
| OCTAEDRO | $(\sqrt{2}/3)a^3$ | 31.83% |
| DODECAEDRO | $\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$ | 66.49% |
| ICOSAEDRO | $5/12(3+\sqrt{5})a^3$ | 60.55% |

Este fue un punto especial en el proyecto hasta que empezamos a truncar los poliedros platónicos... pero el primer problema fue cómo truncarlos.

Este fue un momento especial cuando pensaron en truncar, su primer instinto fue dividir por la mitad las caras del icosaedro que son triángulos entonces obtuvieron:

Como pierden el lado, obtienen nuevamente un triángulo, por lo que deducen que la proporción no es la correcta. Entonces piensan en dividir el lado con otras fracciones y cuando lo hacen con 1/3 obtienen los hexágonos y pentágonos que necesitaban.

Ya que:

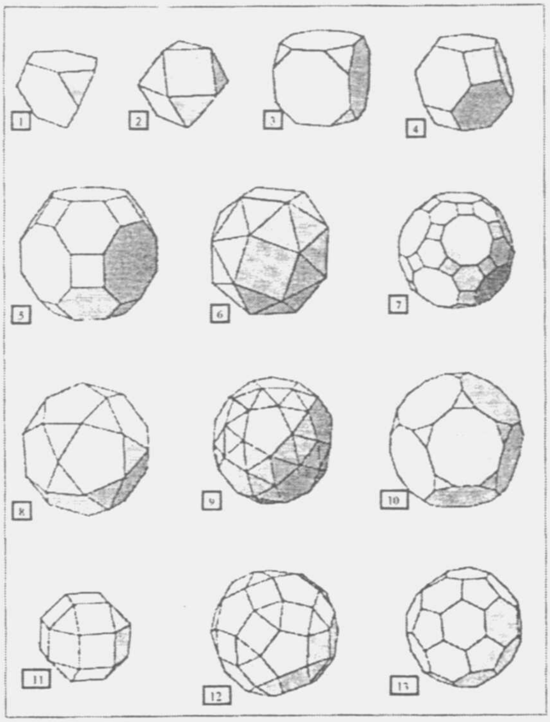


Hay trece polígonos semirregulares, a saber:

1. **Tetraedro truncado:** tiene 8 caras (cuatro hexágonos regulares y cuatro triángulos equiláteros).
2. **Cuboctaedro:** tiene 14 caras (seis cuadrados y ocho triángulos equiláteros).

3. **Cubo truncado**: tiene 14 caras (6 octógonos regulares y 8 triángulos regulares).
4. **Octaedro truncado**: tiene 14 caras (8 hexágonos regulares y 6 cuadrados).
5. **Gran Rombicuboctaedro**: tiene 14 caras (8 hexágonos regulares y 6 cuadrados).
6. **Cubo achatado:** tiene 38 caras (cuadrados y triángulos equiláteros).
7. **Gran Rombicosidodecaedro**: tiene 62 caras(cuadrados, hexágonos regulares y decágonos regulares).
8. **Icosidodecaedro**: tiene 32 caras (triángulos equiláteros y pentágonos regulares).
9. **Dodecaedro achatado**: tiene 92 caras (triángulos equiláteros y pentágonos regulares).
10. **Dodecaedro truncado**: tiene 32 caras (12 decágonos y 20 triángulos equiláteros).
11. **Rombicuboctaedro**: tiene 26 caras (cuadrados y triángulos equiláteros).
12. **Rombicosidodecaedro**: tiene 62 caras (triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos).
13. **Icosaedro truncado**: tiene 32 caras (20 hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares).

**<u>Este último es la pelota de fútbol.</u>**




Hacer el **Icosaedro truncado** nos costó bastante ya que aparecen de vuelta los pentágonos regulares.

Luego hicimos el **rombicosidodecaedro** con triángulos regulares, cuadrados y pentágonos regulares; este nos costó muchísimo, ya que tiene 62 lados. Finalmente la asesora nos sugirió contar vértices, aristas y caras, para los poliedros regulares y semirregulares y obtuvimos:

$$\text{Tetraedro}\begin{cases} Vértices\ 4 \\ Caras\ 4 \\ Aristas\ 6 \end{cases} \Rightarrow 4+4-6=2$$

$$\text{Octaedro}\begin{cases} Vértices\ 6 \\ Caras\ 8 \\ Aristas\ 12 \end{cases} \Rightarrow 6+8-12=2$$

$$\text{Cubo}\begin{cases} Vértices\ 8 \\ Caras\ 6 \\ Aristas\ 12 \end{cases} \Rightarrow 8+6-12=2$$

$$\text{Dodecaedro}\begin{cases} Vértices\ 20 \\ Caras\ 12 \\ Aristas\ 30 \end{cases} \Rightarrow 20+12-30=2$$

$$\text{Icosaedro}\begin{cases} Vértices\ 12 \\ Caras\ 20 \\ Aristas\ 30 \end{cases} \Rightarrow 12+20-30=2$$

Luego aquí se verifica el teorema de Euler, según el cual: **V-A+C=2**.

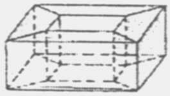
Leonardo Euler (1707 - 1783) nació en Basilea, Suiza. Desde muy joven se apasionó por las matemáticas, obtuvo su maestría a los 16 años y, como no encontraba trabajo, en el campo de las matemáticas empezó a estudiar teología y lenguas orientales; pero en 1727, con la recomendación de los Bernoulli, fue contratado para trabajar en la academia de ciencias de San Petesburgo, Rusia, donde pasó 14 años.

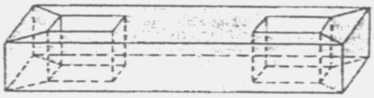
Fue durante mucho tiempo el matemático más importante de Europa, y es todavía el autor más prolífico de toda la historia de las matemáticas. Euler fue un hombre simple, generoso y muy sociable, contrariamente a otros genios matemáticos, le gustaba cultivar su jardín y contar cuentos a su abundante progenie de 13 hijos.

En 1771 quedó completamente ciego, pero siguió trabajando como si nada, dictando sus fórmulas y sus ecuaciones a sus asistentes.

Tenía Euler una memoria fabulosa y un poder de cálculo impresionante.

La relación entre los números de vértices, aristas y caras de un poliedro se llama relación de Euler y vale para todos los poliedros convexos y aún los no convexos, siempre y cuando no tengan agujeros que vayan de un lado a otro como las figuras siguientes:





Aquí se ve que en el primero:

$V = 16, A = 32, C = 16 \therefore V - A + C = 0$

y para la figura de la derecha, que tiene dos agujeros es:

$V = 24, A = 44$ $y$ $C = 18$ luego $V - A + C = -2$.

O sea que aquí, al tener agujeros de lado a lado, no se verifica el teorema de Euler, también lo verificamos para algunos poliedros semirregulares como por ejemplo:

$$\text{Tetraedro Truncado}\begin{cases} \textit{Vértices}\, 12 \\ \textit{Caras}\, 8 \\ \textit{Aristas}\, 18 \end{cases} \Rightarrow 12+8-18=2$$

$$\text{Octaedro Truncado}\begin{cases} \textit{Vértices}\, 24 \\ \textit{Caras}\, 14 \\ \textit{Aristas}\, 36 \end{cases} \Rightarrow 24+14-36=2$$

$$\text{Cubo truncado}\begin{cases} \textit{Vértices}\ 24 \\ \textit{Caras}\ 14 \\ \textit{Aristas}\ 36 \end{cases} \Rightarrow 24+14-36=2$$

$$\text{Dodecaedro Truncado}\begin{cases} \textit{Vértices}\ 60 \\ \textit{Caras}\ 32 \\ \textit{Aristas}\ 90 \end{cases} \Rightarrow 60+32-90=2$$

$$\text{Icosaedro Truncado}\begin{cases} \textit{Vértices}\ 60 \\ \textit{Caras}\ 32 \\ \textit{Aristas}\ 90 \end{cases} \Rightarrow 60+32-90=2$$

También conseguimos información que nos permite afirmar el acierto de los artesanos del cuero, ya que, entre todos los poliedros semirregulares, este es el más aproximado a la esfera, según podemos apreciar en la siguiente tabla.

| Poliedros | Vol. Poliedro / Vol. Esfera |
| --- | --- |
| Tetraedro Truncado | 34.43% |
| Cuboctaedro | 49.68% |
| Cubo Truncado | 52.05% |
| Octaedro Truncado | 61.71% |
| Gran Rombicuboctaedro | 62.86% |
| Cubo Achatado | 64.89% |
| Gran Rombicosidodecaedro | 68.51% |
| Icosidodecaedro | 68.58% |
| Dodecaedro Achatado | 69.47% |
| Dodecaedro Truncado | 72.21% |
| Rombicuboctaedro | 73.08% |
| Rombicosidecaedro | 75.94% |
| Icosaedro Truncado | 82.44% |

Definitivamente adoptamos el **Icosaedro Truncado** para confeccionar nuestras "pelotas" de **fútbol** porque de todos los poliedros semirregulares es el más aproximado a la esfera.

### *Conclusiones de los alumnos*

1. Hay 5 y solamente 5 poliedros regulares o platónicos.
2. El pentágono regular tiene ángulos interiores de 108° y exteriores de 72°.
3. Todo polígono regular está inscripto en una circunferencia.
4. El lado del pentágono L5 está relacionado con el radio de la circunferencia circunscripta mediante la fórmula: $L_5 = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.
5. Hay 13 y solamente 13 poliedros semirregulares.

6. El Icosaedro truncado (20 hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares) es la pelota de fútbol.
7. El teorema de Euler V - A + C = 2 se verifica para todos los poliedros convexos y no convexos, siempre que no tengan agujeros que vayan de un lado a otro.
8. El Icosaedro truncado (32 caras) es el más aproximado a la esfera de todos los poliedros semirregulares.

Aquí termina la tarea de todo el año, nos presentamos con este informe a la Feria Provincial de Ciencias y obtuvimos el primer premio en el nivel y el segundo en el área, por lo que fuimos a Corrientes a la Feria Nacional de Ciencias. Aquí, también obtuvimos el 1° premio en nuestro nivel y el 2° en el área, por lo que fuimos invitados a la Feria Nacional de Ciencias en la República hermana de Paraguay.

Ya estamos bastante cerca, a lo mejor, en el futuro se pueda diseñar algo mejor.

## Conclusiones de los docentes

- Destacar la importancia de la historia como fuente de conocimiento.
- Rescatar el trabajo grupal como forma de aprendizaje que además consolida la convivencia.
- Realizar un aprendizaje constructivo de lo concreto o manipulable a lo abstracto logra aprendizajes significativos.
- Encontrar geometría en las cosas cotidianas contribuye a redescubrir la geometría, gran ausente en la escuela argentina.

Lic. María Rosa Berraondo.Universidad Nacional de San Luis
E-mail: mrberr@unsl.edu.ar
Dominicos Puntanos 866. Tel: 02652 - 425431

Marcela Sanluis.Instituto San Agustín.Barrio CGT. Tel: 02652 - 431321

*Alumnos:*
Juan Ignacio Perna.Instituto San Agustín.Belgrano 160.Tel: 02652 - 430602

Carlos Nicolás Gugliermo.Instituto San Agustín.Ciudad del Rosario 364
Tel: 02652 - 426364