Aproximándose a la Modelación del Azar (II)

Eugenio Saavedra G. [1]

Resumen: En [2], se usó el lanzamiento de dados y la característica de número primo para motivar el modelo binomial usado en el Cálculo de Probabilidades. En este artículo mostraremos como relacionar las probabilidades obtenidas a partir del modelo binomial con áreas bajo una curva continua, más precisamente, la curva normal.

1 Introducción

Al lanzar un dado 'honesto", es decir, que no está cargado a ningún número en particular, o dicho de otro modo, que todos los números tienen igual chance de salir, diremos que ocurrió un "éxito" si el número que muestra el dado (en su cara superior) es un número primo, y si no es primo, diremos que ocurrió un "fracaso". Los resultados posibles de una lanzamiento son: 1 (éxito), 2 (éxito), 3 (éxito), 4 (fracaso), 5 (éxito), 6 (fracaso).

En [2], se verificó experimentalmente que, si lanzamos n dados, con $n \leq 4$, en cualquiera de las formas siguientes de lanzamiento

a) se tienen n dados (los identificamos como dado 1, dado 2, ..., dado n) y los lanzamos simultáneamente,

b) se tienen n dados (los identificamos como dado 1, dado 2, ..., dado n), lanzamos primero el dado 1 y luego lanzamos el dado 2 y así sucesivamente,

c) se tiene un dado, se lanza una vez (éste se identifica como el dado 1), se recoge y luego se lanza una segunda vez (éste se identifica como el dado 2) y así sucesivamente,

entonces, un modelo adecuado para la probabilidad de obtener k éxitos en los n lanzamientos del dado (que se anota $b(n, \frac{2}{3}; k)$) era

$$\begin{aligned} b(n, \tfrac{2}{3}; k) &= \binom{\text{n}^o \text{ de dados lanzados}}{\text{n}^o \text{ de éxitos}} (\tfrac{2}{3})^{\text{n}^o \text{ de éxitos}} (1 - \tfrac{2}{3})^{\text{n}^o \text{ de fracasos}} \\ &= \tbinom{n}{k} (\tfrac{2}{3})^k (1 - \tfrac{2}{3})^{n-k} \quad , \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Parcialmente financiado por DICYT N^o 049833SG .

donde $\binom{n}{k}$ representa el valor $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Estos resultados experimentales sugieren la extensión de la relación (1) a todo n, es decir, al lanzamiento de n dados, ahora con $n \geq 5$. Más aún, el lanzamiento de dados y el hecho de considerar como éxito la salida de un número primo, es sólo un pretexto para introducir el llamado Esquema de Bernoulli, el cual modela situaciones muy frecuentes que se presentan en el Cálculo de Probabilidades, en particular, el caso anterior.

El Esquema de Bernoulli puede enunciarse de la siguinete manera:

Se realiza un cierto "ensayo" cuyos resultados dependen del azar. Un resultado del "ensayo" representa una determinada característica. Si la realización de un ensayo, da como resultado la característica, se dice que ocurrió un éxito, en caso contrario se dice que ocurrió un fracaso. Se repite n veces el "ensayo", cada repetición del "ensayo" se llama intento. Además, los "ensayos" son independientes, esto es, el resultado de un "ensayo" no tiene influencia ninguna en el resultado de otro "ensayo". Finalmente, la probabilidad de obtener éxito, digamos p, en cualquiera de los "ensayos" es siempre la misma. Un "experimento" que cumple con las condiciones antes mencionadas se dice que sigue un Esquema Bernoulli de parámentros (n, p).

Si $b(n,p;k)$ modela la probabilidad de obtener exactamente k éxitos, y por tanto $n-k$ fracasos, en un "experimento" que sigue un Esquema Bernoulli con parámentros (n,p), entonces

$$\begin{aligned} b(n,p;k) &= \binom{\text{n}^o \text{ de ensayos}}{\text{n}^o \text{ de éxitos}} p^{\text{ n}^o \text{ de éxitos}}(1-p)^{\text{ n}^o \text{ de fracasos}} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad , \qquad k \in \{0,1,...,n\}. \end{aligned} \tag{2}$$

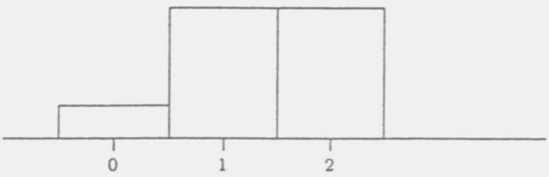
A este modelo se le conoce como distribución binomial de parámetros (n,p).

2 Probabilidades y Area

Las siguientes tablas muestran el número de éxitos k y la probabilidad $b(n, \frac{2}{3}; k)$, de obtener k éxitos en n lanzamientos del dado, para $n \in \{2,3,4,10,50\}$. Para los casos $n=2$, $n=3$ y $n=4$, las tablas se obtuvieron de los resultados encontrados en [2]. Para el caso $n=10$ y $n=50$, los valores se calcularon usando una forma recursiva de la distribución binomial (véase [1] ó [3]). Además, para cada tabla se muestra su gráfico asociado.

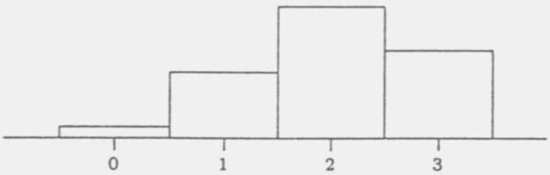
Lanzamiento de $n = 2$ dados

k	$b\left(2, \frac{2}{3}; k\right)$
0	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{4}{9}$
suma	1



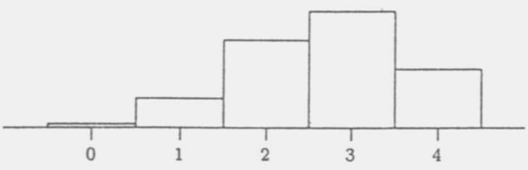
Lanzamiento de $n = 3$ dados

k	$b\left(3, \frac{2}{3}; k\right)$
0	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{6}{27}$
2	$\frac{12}{27}$
3	$\frac{8}{27}$
suma	1



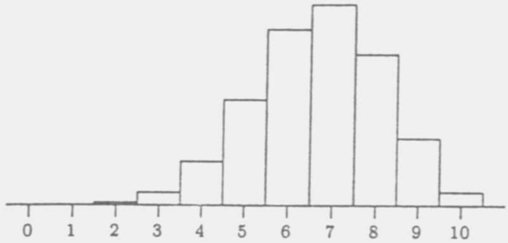
Lanzamiento de $n = 4$ dados

k	$b\left(4, \frac{2}{3}; k\right)$
0	$\frac{1}{81}$
1	$\frac{8}{81}$
2	$\frac{24}{81}$
3	$\frac{32}{81}$
4	$\frac{16}{81}$
suma	1



Lanzamiento de $n = 10$ dados

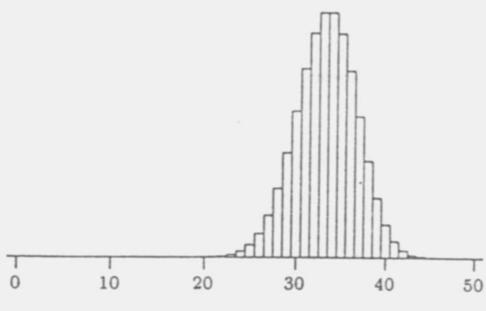
k	$b(10, \frac{2}{3}; k)$		k	$b(10, \frac{2}{3}; k)$
0	0.00001694		6	0.22760758
1	0.00033870		7	0.26012295
2	0.00304832		8	0.19509221
3	0.01625768		9	0.08670765
4	0.05690190		10	0.01734153
5	0.13656455			



Lanzamiento de $n = 50$ dados

k	$b(n, \frac{2}{3}; k)$		k	$b(n, \frac{2}{3}; k)$		k	$b(n, \frac{2}{3}; k)$
0	0.00000000		17	0.00000179		34	0.11782545
1	0.00000000		18	0.00000659		35	0.10772289
2	0.00000000		19	0.00002221		36	0.08976638
3	0.00000000		20	0.00006886		37	0.06792928
4	0.00000000		21	0.00019675		38	0.04647653
5	0.00000000		22	0.00051869		39	0.02860008
6	0.00000000		23	0.00126287		40	0.01572957
7	0.00000000		24	0.00284137		41	0.00767273
8	0.00000000		25	0.00590988		42	0.00328821
9	0.00000000		26	0.01136482		43	0.00122348
10	0.00000000		27	0.02020353		44	0.00038927
11	0.00000000		28	0.03319052		45	0.00010380
12	0.00000000		29	0.05035652		46	0.00002256
13	0.00000000		30	0.07049701		47	0.00000384
14	0.00000002		31	0.09096116		48	0.00000048
15	0.00000010		32	0.10801314		49	0.00000003
16	0.00000044		33	0.11782545		50	0.00000000

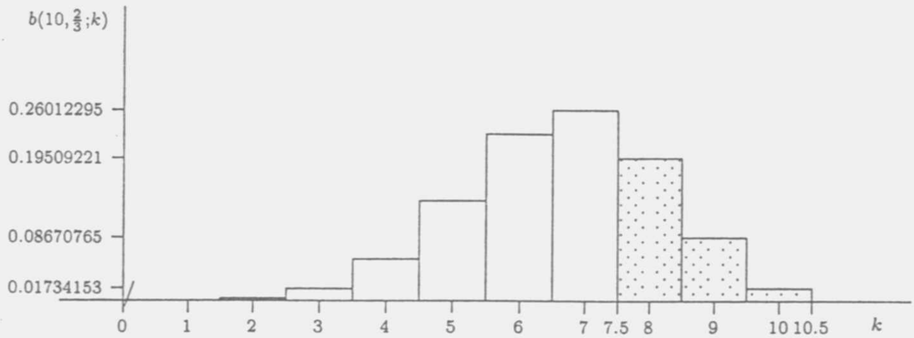
Los valores de la tabla menores que 10^{-8} se aproximaron a 0



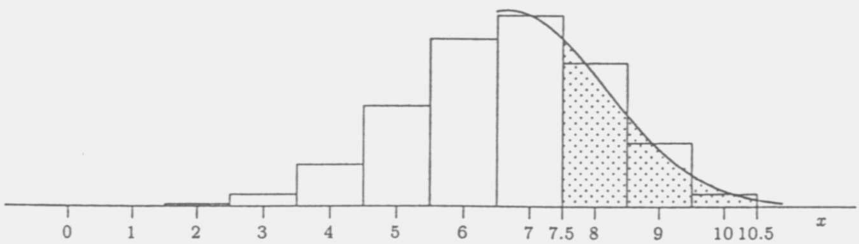
Nótese que en todos los gráficos anteriores, el valor $b(n, \frac{2}{3}; k)$ es igual al área del rectángulo de base el segmento (unitario) con punto medio k y altura $b(n, \frac{2}{3}; k)$. Así, por ejemplo, la probabilidad de obtener, al menos 8 éxitos (8 veces número primo) al lanzar 10 veces un dado es

$$b\left(10, \tfrac{2}{3}; 8\right) + b\left(10, \tfrac{2}{3}; 9\right) + b\left(10, \tfrac{2}{3}; 10\right) = 0.29914139,$$

que corresponde al área achurada del gráfico siguiente



¿Será posible encontrar una función $f(x)$, continua y positiva, de modo que el área bajo la curva $f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = 7.5$ y $x = 10.5$, sea "aproximadamente" igual al área achurada del gráfico anterior? En otras palabras, ¿será posible encontrar una función $f(x)$, continua y positiva, de modo que el área bajo la curva $f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = 7.5$ y $x = 10.5$, sea "aproximadamente" igual a la probabilidad de obtener al menos 8 éxitos (8 veces número primo) al lanzar 10 veces un dado, que resulta ser 0.29914139?.



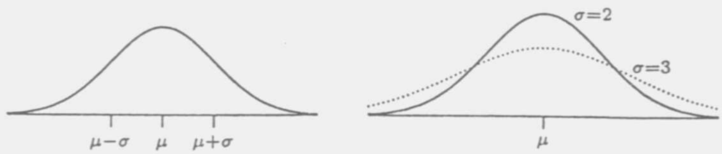
En forma más general, si un "experimento" sigue un Esquema Bernoulli con parámetros (n, p), ¿será posible encontrar una función $f(x)$, cotinua y positiva, de modo que la probabilidad de obtener al menos m éxitos y a lo más r éxitos $(m < r)$ sea "aproximadamente" igual al área bajo la curva $f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = m - 0.5$ y $x = r + 0.5$?. En el caso anterior, $m = 8$; $r = 10$; $n = 10$ y $p = \frac{2}{3}$.

2.1 La Curva Normal

La curva normal tiene como ecuación:

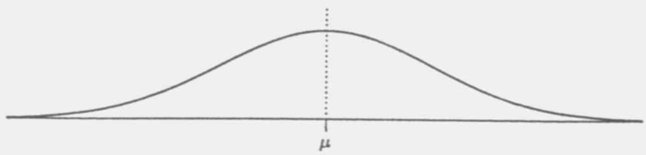
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad , -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

La ecuación involucra dos constantes fundamentales $\pi = 3.141592653...$ y $e = 2.718281828...$ (base del logaritmo natural). La curva tiene dos parámetros, μ que puede ser un real positivo o negativo y σ que puede ser un real estrictamente positivo. La gráfica de la curva normal (μ, σ^2) resulta ser del tipo

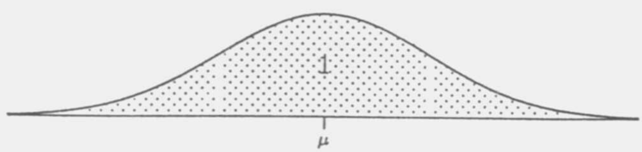


Algunas Características de la Gráfica de la Curva Normal (μ, σ^2) que pueden ser verificables

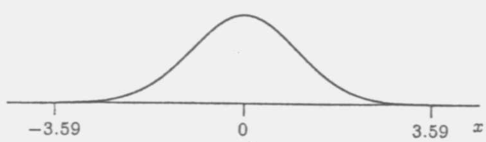
i) La curva es simétrica respecto del eje $x = \mu$



ii) El área que se encuentra bajo la curva normal (μ, σ^2) y sobre el eje x es igual a 1

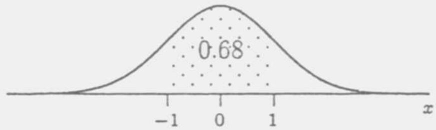


iii) El área que se encuentra bajo la curva normal $(0, 1)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = -3.59$ es "aproximadamente" igual a cero



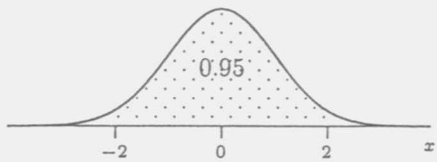
Por simetría de la curva normal $(0, 1)$, el área bajo la curva normal $(0, 1)$, sobre el eje x y después de la recta $x = 3.59$ es "aproximadamente" igual a cero

iv) El área que se encuentra bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y entre las rectas $x=-1$, $x=1$ es "aproximadamente" igual a 0.68 (también se dice el 68%)



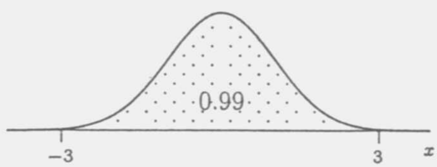
Por simetría, el área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x, después de la recta x=0 y antes de la recta $x=1$ es "aproximadamente" 0.34.

v) El área que se encuentra bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y entre las rectas $x=-2$, $x=2$ es "aproximadamente" igual a 0.95 (95%)

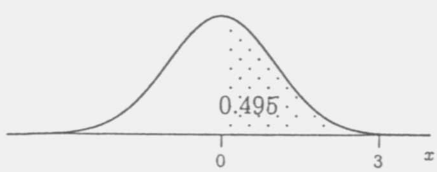


Por simetría, el área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x, después de la recta $x=0$ y antes de la recta $x=2$ es "aproximadamente" 0.475.

vi) El área que se encuentra bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y entre las rectas $x=-3$, $x=3$ es "aproximadamente" igual a 0.99 (99%)



Por simetría, el área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x, después de la recta $x=0$ y antes de la recta $x=3$ es "aproximadamente" 0.495.

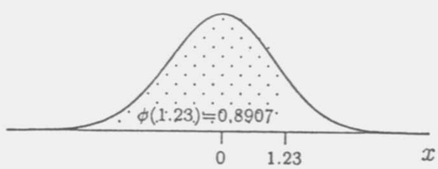


vii) Sea c número real positivo, entre 0 y 3.59, con incrementos de 0.01, es decir, c pertenece al conjunto $C=\{0,0.01,0.02,0.03,...,0.09,0.1,0.101,...3.58,3.59\}$, el cual tiene 360 elementos. El área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = c$, es denotada por $\Phi(c)$ y está calculada en la tabla siguiente, para todos los valores de c pertenecientes al conjunto C.

Tabla normal(0,1)

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5783	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6464	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

Por ejemplo, para encontrar el área bajo la curva normal $(0, 1)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = 1.23$, es decir, $\Phi(1.23)$, obsérvese el valor de la fila 1.2 y la columna 0.03 $(1.23 = 1.2 + 0.03)$. Este valor resulta ser 0.8907, entonces $\Phi(1.23) = 0.8907$.



Nótese que, el área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = -2.38$, es decir, $\Phi(-2.38)$, no está tabulada en la tabla anterior, por esta razón, se debe usar la simetría de la curva normal $(0,1)$ para calcular esta área.

El área total bajo la curva normal $(0,1)$ y sobre el eje x es 1. El área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y después de la recta $x = 2.38$ es igual al área total, 1, menos el área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = 2.38$, $\Phi(2.38)$.

De la simetría de la curva normal resulta que $\Phi(-2.38)$ es igual a $1 - \Phi(2.38)$

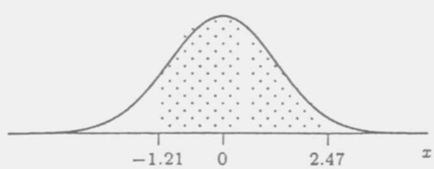
De la tabla anterior, $\Phi(2.38) = 0.9913$, por lo tanto,

$$\Phi(-2.38) = 1 - \Phi(2.38) = 1 - 0.9913 = 0.0087.$$

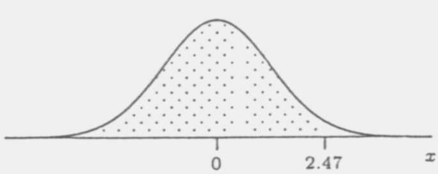
El análisis previo es válido para cualquier valor c negativo, luego, si c es negativo, es decir, $-c$ es positivo,

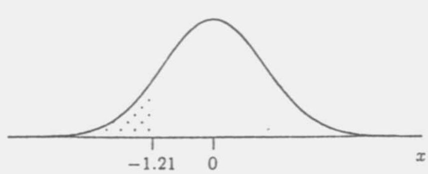
$$\Phi(c) = 1 - \Phi(-c). \tag{4}$$

vii) ¿Cómo calcular el área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x, y entre las rectas x=-1.21 y x=2.47 ?



Al área achurada que se muestra en el lado izquierdo de la figura siguiente (que corresponde es $\phi(2.47)$), se le debe restar el área achurada que se muestra en el lado derecho (que corresponda a $\phi(-1.21)$

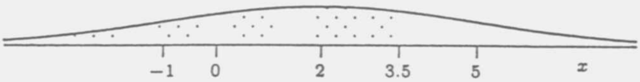




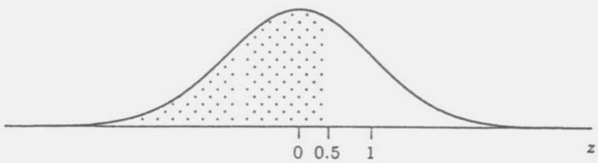
Entonces, el área buscada es $\Phi(2.47) - \Phi(-1.21)$. De la tabla normal $(0,1)$ se tiene que $\Phi(2.47) = 0.9932$, $\Phi(1.21) = 0.8869$ y por tanto, $\Phi(-1.21) = 1 - 0.8869 = 0.1131$. Luego, el área buscada es 0.9932-0.1131=0.8801.

Si en lugar de $x = -1.21$ y $x = 2.47$ ponemos $x = a$ y $x = b$, respectivamente, con $a < b$ reales, entonces el área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a $\Phi(b) - \Phi(a)$.

viii) ¿Cómo calcular el área bajo la curva normal $(2,9)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = 3.5$?



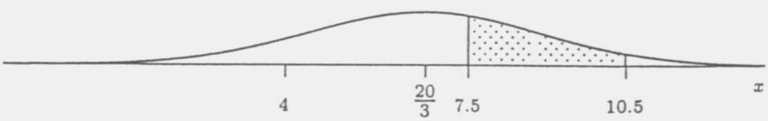
Si la "escala x" se reemplaza por la "escala z", donde $z = \frac{x-2}{\sqrt{9}}$, entonces, el área bajo la curva normal $(2,9)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = 3.5$ es igual al área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje z y antes de la recta $z = \frac{3.5-2}{\sqrt{9}} = \frac{1.5}{3} = 0,5$.



Desde la tabla normal$(0,1)$, se tiene que el valor de $\Phi(0,5)$ es 0.6915; luego, el área bajo la curva normal $(2,9)$, sobre el eje x y antes de la recta $x = 3,5$ es $\Phi(\frac{3.5-2}{\sqrt{9}}) = 0.6915$.

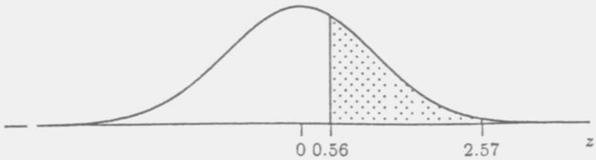
El resultado anterior es válido para cualquier curva normal (μ, σ^2) y cualquier valor x=c, así, el área bajo la curva normal (μ, σ^2), sobre el eje x y antes de la recta $x = c$ es igual a $\Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})$.

ix) ¿ Cómo calcular el área bajo la curva normal $(\frac{20}{3}, \frac{20}{9})$, sobre el eje x y entre las rectas $x = 7.5$ y $x = 10.5$?.



Reemplazando la "escala x" por la "escala z", con $z = \frac{x - \frac{20}{3}}{\sqrt{\frac{20}{9}}}$, el área buscada resulta ser igual al área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje z y entre las rectas

$$z = \frac{7.5-20/3}{\sqrt{20/9}} = 0.56 \quad \text{y} \quad z = \frac{10.5-20/3}{\sqrt{20/9}} = 2.57$$



Por lo tanto, el área pedida es $\Phi(2.57) - \Phi(0.56)$. Desde la tabla normal $(0,1)$, $\Phi(2.57) = 0.9949$ y $\Phi(0.56) = 0.7123$ luego, el valor del área es $0.9949 - 0.7123 = 0.2826$.

2.2 Aproximación Normal de la Binomial

Sean m y r enteros tales que, $0 \leq m < r$. Denotemos por $P(m \to r)$, a la probabilidad de obtener entre m y r éxitos (ambos extremos incluidos) en un "experimento" que sigue un Esquema Bernoulli con parámetros (n,p). Es decir,

$$P(m \to r) = b(n,p;m) + b(n,p;m+1) + \ldots + b(n,p;r-1) + b(n,p;r)\,. \tag{5}$$

Entonces, $P(m \to r)$ es "aproximadamente" igual al área bajo la curva normal $(0,1)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = \frac{m-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ y $x = \frac{r+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. O sea,

$$P(m \to r) \simeq \Phi\left(\frac{r+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{m-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{6}$$

Una demostración formal de esta propiedad, la cual es un caso particular del Teorema del Límite Central, puede consultarse en [1].

En el caso particular en que $m = 0$, es decir, cuando $P(0 \to r)$ representa la probabilidad de obtener a lo más r éxitos en un "experimento" que sigue un Esquema de Bernoulli con parámetros (n,p), la "aproximación" que resulta es:

$$P(0 \to r) \simeq \Phi\left(\frac{r+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + \Phi\left(\frac{0.5+np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1. \tag{7}$$

Ejemplo. La probabilidad de que salgan al menos 8 éxitos (8 veces un número primo) al lanzar 10 veces un dado es, según cálculos previos 0.29914139, es decir,

$$P(8 \to 10) = 0.29914139\,.$$

Usando la aproximación normal de la binomial, resulta que

$$
\begin{aligned}
P(8 \to 10) &\simeq \Phi\left(\frac{10+0.5-10\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{10\cdot\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})}}\right) - \Phi\left(\frac{8-0.5-10\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{10\cdot\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})}}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{10.5-20/3}{\sqrt{20/9}}\right) - \Phi\left(\frac{7.5-20/3}{\sqrt{20/9}}\right)\\
&= \Phi(2.57) - \Phi(0.56)\\
&= 0.9949 - 0.7123\\
&= 0.2826.
\end{aligned}
$$

La aproximación tiene un error del orden del 1.7%.

Ejemplo. La probabilidad de que salga exactamente 210 veces un número primo, 210 éxitos, al lanzar 300 veces un dado es,

$$
\begin{aligned}
b\left(300, \tfrac{2}{3}; 210\right) &= \binom{300}{210}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{210}\left(1-\tfrac{2}{3}\right)^{300-210}\\
&= \frac{300!}{210!90!}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{210}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{90}\\
&= 0.0233995\,.
\end{aligned}
$$

Este último valor no es fácil de calcular, debido a los factoriales involucrados. Usando la aproximación normal de la binomial resulta que:

$$
\begin{aligned}
b\left(300, \tfrac{2}{3}; 210\right) &= P(210 \to 210)\\
&\simeq \Phi\left(\frac{210+0.5-300\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{300\cdot\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})}}\right) - \Phi\left(\frac{210-0.5-300\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{300\cdot\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})}}\right)\\
&= \Phi(1.29) - \Phi(1.16)\\
&= 0.9015 - 0.8770\\
&= 0.0245.
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] Pitman, J., Probability, Springer-Verlag, 1993.

[2] Saavedra, E., Aproximándose a la Modelación del Azar (I), Revista de Educación Matemática, U.N.C., 2001.

[3] Saavedra, E., Descubriendo Distribuciones de Probabilidades, Monografía, 2000 (por aparecer).

Departamento de Matemática y C.C., Universidad de Santiago de Chile,Casilla 307, Correo 2 Santiago, Chile,E-mail: keno@lauca.usach.cl