La invención de los logaritmos

Susana B. Impellizere de Córdoba

Introducción

En el siglo XVI y comienzos del siglo XVII, a medida que la matemática se desarrollaba, se experimentaron enormes dificultades de carácter práctico-computacional. Estas dificultades se concentraban alrededor de los problemas de confección de tablas de las funciones trigonométricas, la determinación del valor de π , la búsqueda de algoritmos simples y confiables de determinación de las raíces de las ecuaciones con coeficientes numéricos dados, etc. Los cálculos se realizaban sólo a mano.
Se puede decir que en esa época Europa padeció una "epidemia de cálculo", que si bien es cierto que no exigía grandes sacrificios, también lo es, por otra parte, que en muchos cerebros causó tantos estragos, como causaban en los cuerpos las enfermedades de aquellos tiempos. Hombres como Viète, incluso, el mayor algebrista del siglo XVI, no retrocedían ante los cálculos numéricos que a menudo les ocupaban día y medio. Y cuando intervenían los astrónomos, queriendo determinar la posición de las estrellas cada vez con mayor exactitud, y construyendo al efecto tablas para las funciones trigonométricas, tendrían que verse plagados de números cada vez mayores, y los cálculos ya no tendrían fin. La inmensa cantidad de tiempo y de trabajo que dilapidaron los calculadores de Occidente fue irritante. Por citar un caso, diremos que las Leyes de Kepler fueron descubiertas como resultado de unos veintidós años de cálculo incesantes, sin logaritmos, en que se descartaba despiadadamente una hipótesis prometedora después de otra cuando se observaba que no satisfacían las exigencias de la precisión con que se habían observado. Sólo la fe pitagórica de Kepler en una armonía matemática de la naturaleza, posible de descubrir, pudo sostenerlo. La historia de su persistencia es una de las más heroicas de la ciencia.
Por esto algunos matemáticos pensaron en la forma de calcular mejor, ahorrando tiempo. Entre ellos están **Napier** y **Bürgi** que inventaron los **logaritmos**. La historia de los logaritmos es otra epopeya de la perseverancia.

JOST BÜRGI (1552 - 1632)

Jost Bürgi nació en Suiza. Se dedicaba a reparar relojes e instrumentos astronómicos. Trabajó con Kepler y lo ayudó en sus observaciones y cálculos. Para la simplificación de cálculos, durante ocho años (1603 - 1611) confeccionó su tabla de logaritmos sobre la base de una tabla del tipo de Stevin: $a(1+r)^n$. Las tablas de Stevin se basaban en comparar las sucesiones de potencias de los números con la sucesión de sus exponentes. Para que estas tablas fueran suficientemente compactas su base única convenía elegirla próxima a la unidad.

Para confeccionar su tabla Bürgi tomó un paso pequeño, tomó $r=\frac{1}{10^4}$. Para evitar las fracciones introdujo un factor complementario $a=10^8$. Obtuvo los valores de la progresión geométrica $g_k=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^k$, $k=0,1,2,3,....$ que los puso en correspondencia con los términos de la progresión aritmética: 0 , 10, 20, 30, ... Obtuvo dos sucesiones de valores:

$$\begin{array}{ccccc} 10^8 , & 10^8(1+10^{-4}) , & 10^8(1+10^{-4})^2 , & 10^8(1+10^{-4})^3 , & ...... \\ 0 , & 10 , & 20 , & 30 , & ...... \end{array}$$

Los números de la sucesión de abajo fueron impresos en rojo y por ello se denominaron "números rojos"; los de la sucesión de arriba, en pintura negra, por lo que se llamaron "números negros". De esta forma, en la tabla de Bürgi los números rojos constituían los logaritmos de los negros divididos en 10^8 con base $\sqrt[10]{1,0001}$. En esencia, la tabla de Bürgi, es una tabla de antilogaritmos. Los cálculos se llevaban a cabo hasta la novena cifra, gracias a la presencia del factor 10^8 . Fueron llevados hasta el llamado número negro completo, igual a 10^9. El correspondiente número rojo completo fue hallado con la aplicación de la interpolación y resultó igual a 230 270 022, esto es $1,0001^{230270022}.10^8 = 10^9$.

A instancias de Kepler, en el año 1620, recién Bürgi se decidió a publicar sus tablas en el libro *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen* , (Tablas de la progresión aritmética y geométrica con la instrucción detallada de cómo utilizarla para todo género de cálculos). El original de estas tablas junto a otros materiales del archivo de Kepler se conserva en el observatorio de Púlkovo (RUSIA), cerca de San Petesburgo.

JOHN NAPIER (1550 - 1617)

El Barón NAPIER o NEPER nació en Merchiston (Escocia, 1550-1617), cerca de Edimburgo. Estudió en la Universidad de San Andrés y durante su estancia allí fue seguidor del movimiento de la Reforma en Escocia y años más tarde tomó parte activa en los asuntos políticos promovidos por los protestantes. Era un hacendado que en los ratos de ocio que le dejaban sus deberes de terrateniente escribía sobre temas variados. En un comentario sobre el Apocalipsis de San Juan sostenía que el Papa de Roma era el Anticristo. Fue el autor de la primera interpretación importante en Escocia de la Biblia.

Con respecto a la matemática sólo le interesaban aspectos relacionados con el cálculo numérico y la trigonometría. Napier fue uno de los primeros, sino el primero, en utilizar la moderna notación decimal para expresar fracciones decimales de una forma sistemática. También inventó sistemas mecánicos para realizar cálculos aritméticos, descriptos en *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo* (1617). Las llamadas "varillas o huesos de Napier" eran unas varillas en las que estaban impresas las tablas de multiplicar, y las "analogías de Napier" y la "regla de Napier de las partes circulares" eran reglas mnemotécnicas para ayudar a recordar fórmulas de trigonometría esférica. Su mayor logro fue la invención de los **logaritmos**, descrito en *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614). En ella se daban tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas con 8 cifras para valores de los argumentos desde 0 hasta 90° cada 1´.

Los logaritmos decimales y naturales que se utilizan actualmente no usan la misma base que los logaritmos de Napier, aunque en su honor a los logaritmos naturales se los denomina neperianos.

A Napier le costó veinte años de trabajo razonar sobre las propiedades y existencia de los logaritmos. Debió reflexionar sobre las sucesiones de potencias de un número dado, que habían aparecido publicadas en la *Arithmetica integra* de Stifel cincuenta años antes y en las obras de Arquímedes. (La notación que usamos actualmente para potencias recién la introdujo Descartes después de la muerte de Napier). Napier observó que a los productos o cocientes de las potencias corresponden respectivamente las sumas o diferencias de los índices o exponentes de las potencias mismas. De ahí surgió la idea de sustituir cada multiplicación con una suma.

El problema que le encontraba es que si usaba una sucesión de potencias enteras de una base entera, por ejemplo dos, no resultaba útil para el cálculo debido a que los grandes huecos entre los términos sucesivos hacen la interpolación demasiada imprecisa. El conocimiento, a través de John Craig, del uso del *método de* *prostafairesis* que utilizaban los astrónomos en Dinamarca, lo animaron a redoblar sus esfuerzos publicando finalmente en 1614 su obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (descripción de la maravillosa regla de los logaritmos)

La idea clave de la obra de Napier fue la siguiente: para lograr que los términos de una progresión geométrica formada por las potencias enteras de un número dado estén muy próximos unos a otros, hace falta tomar ese número muy próximo a uno. Napier decidió tomar $1-10^{-7}=0.9999999$ como el número dado; entonces los términos de la progresión (decreciente) de potencias enteras crecientes, están muy próximos entre sí. Multiplicó todas las potencias por 10^7, para evitar el uso de decimales, así si $N=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L$, L será el "logaritmo de Napier del número N". El logaritmo de 10^7 será 0, el logaritmo de

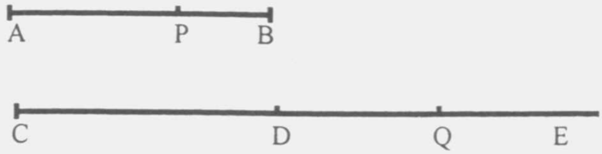
$10^7\cdot\left(1-\frac{1}{10^7}\right)=9999999$ será 1.

Al dividir los números y los logaritmos por 10^7, obtendríamos prácticamente un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, ya que $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ no se diferencia demasiado del $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$.

Napier no utilizaba la idea de base de un sistema de logaritmos, puesto que su definición es diferente de la nuestra.

Napier explicó en forma geométrica la correspondencia entre dos sucesiones de números, una en progresión aritmética y otra en progresión geométrica valiéndose del concepto de dos puntos que se mueven por diferentes líneas rectas, uno con velocidad uniforme, y el otro con velocidad acelerada.

Supongamos un segmento AB y una semirecta CDE dados (ver figura). Un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia a B; y que el punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ el logaritmo de la distancia PB.



Esta forma de definir los logaritmos está de acuerdo a la definición anterior.
Para la demostración, sea PB = x y CQ = y . Si tomamos AB = 10^7 = velocidad inicial de P, entonces, en el lenguaje actual es equivalente a la ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dt} = -x$ y $\dfrac{dy}{dt}=10^7$, con $x_0=10^7$, $y_0=0$.

Entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-10^7}{x}$, o bien $y=-10^7 lncx$, donde la constante c se determina a partir de las condiciones iniciales y resulta $c = 10^{-7}$, así pues, , $y=-10^7 ln\dfrac{x}{10^7}$

o bien $\dfrac{y}{10^7}=log_{1/e}\dfrac{x}{10^7}$.

Es decir, que si las distancias PB y CQ estuvieran divididas por 10^7 entonces la definición de Napier nos conduciría precisamente a un sistema de logaritmos de base $\dfrac{1}{e}$, tal como decíamos anteriormente.
Al principio Napier llamó a sus índices de potencias o exponentes "números artificiales" o "números de relación" (de la unión de las palabras griegas: $\lambda o \gamma o \zeta$ - relación, $\alpha \rho \iota \vartheta \mu o \xi$ - número). Esta denominación la eligió, para subrayar que los logaritmos constituyen números auxiliares que miden relaciones entre los números correspondientes.
A pesar de la idea general de la escala numérica continua, los logaritmos de Napier aún eran tablas de comparación de los valores de dos progresiones: aritmética y geométrica.
Más tarde Napier se decidió a llamarlos "logaritmo", nombre con el que lo conocemos actualmente, proveniente de la palabra compuesta de las dos palabras griegas *logos* (o razón) y *arithmos* (o número).
En vista de las exigencias de la astronomía de la época, como ya dijimos, la tabla de Napier la formaban, los logaritmos de las funciones trigonométricas. Ante todo, una columna aparte la formaban los logaritmos de los senos de los ángulos del

primer cuadrante, elegidos con intervalos de 1´. Ellos daban, de esta manera, también los valores de los logaritmos de los cosenos (como senos de los ángulos complementarios). En una columa especial, bajo la denominación de "diferencia" (differentiae) se ponían las diferencias de los logaritmos de los senos de los ángulos complementarios, esto es, los logaritmos de las tangentes. Napier conocía que los logaritmos de las funciones trigonométricas inversas se obtenían simplemente por un cambio de signo.

Diferencias entre los logaritmos de Napier y los actuales

Las reglas de logaritmación según Napier, se diferencian de las actuales. Son más engorrosas, ya que en ellas se tiene *log* $1 \neq 0$ (se convenía que *log* $10^8 = 1$). Por ejemplo, el logaritmo de un producto (o de un cociente) no es igual, en general, a la suma (o a la diferencia) de los logaritmos.

Si $L_1 = log\, N_1$, $L_2 = log\, N_2$, entonces $N_1 = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_1}$ y $N_2 = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_2}$ y por lo tanto $\frac{N_1 N_2}{10^7} = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_1+L_2}$, de donde se observa que la suma de los logaritmos de Napier $L_1 + L_2$ no es el logaritmo de $N_1 N_2$, sino de $\frac{N_1 N_2}{10^7}$.

Situaciones similares ocurren en el caso de logaritmos de cocientes, potencias y raíces.

Logaritmos decimales

En los logaritmos de Napier una complicación esencial en los cálculos lo introduce el hecho que *ln* $10 \neq 1$. Por esto se requiere de nuevo calcular la mantisa y la característica de los logaritmos de los números que se diferencian entre sí solo en el factor 10 elevado a la más o menos k, con k natural. Estas dificultades condujeron a Napier a la idea de logaritmos decimales, es decir, a suponer primeramente *log* $1 = 0$, *log* $10 = 1$.

HENRY BRIGGS (1561 - 1630)

Nació en Londres. Fue profesor de matemática en Oxford desde el año 1619 y después en Londres. Se hizo amigo de Napier, conoció su obra y compartió con él la idea y las ventajas de los logaritmos decimales. En trabajos conjuntos con Napier elaboraron un nuevo, prácticamente, más cómodo sistema decimal, basado en la comparación de las progresiones:

.... 0,01 0,1 1 10 100 ....

.... -2 -1 0 1 2 ....

Briggs se dedicó a la elaboración de una tabla de **logaritmos decimales**. En el año 1617 publicó una tabla con 8 cifras de los números desde el 1 hasta el el 10^3. En 1624 editó "La aritmética logarítmica", la cual contenía tablas de logaritmos de 14 cifras para los números del 1 al 20.000 y del 90.000 al 100.000. Para la propaganda del nuevo medio de cálculo publicó algunos artículos aclarando el método de cálculo de las tablas y la utilización de los logaritmos. A continuación explicamos uno de los métodos de Briggs.

La idea de Briggs es que si a un número cualquiera le extraemos sucesivamente la raíz cuadrada, después de un número suficientemente grande de extracciones obtendremos un resultado suficientemente próximo a la unidad.

Consideremos, por ejemplo el número 10 y $m=2^n$ el el número de extracciones. En este caso el resultado de la extracción siguiente de la raíz cuadrada puede escribirse: $\sqrt[2^{n+1}]{10}=1+\alpha$, donde α es pequeño. Elevemos ambas partes de la igualdad al cuadrado: $\sqrt[2^n]{10}=1+2\alpha+\alpha^2$. Para n suficientemente grande α^2 es tal que puede despreciarse y esto no influye en la exactitud dada de los cálculos.

$$\sqrt[2^{n+1}]{10}-1\approx\frac{\sqrt[2^n]{10}-1}{2}$$

Multiplicando ambos miembros por 2^{n+1}:

$$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{10}-1\right)\approx2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right),$$

es decir, la expresión prácticamente no cambia cuando n sigue creciendo. Si se designa: $\sqrt[2^n]{10}=x$, entonces $log_{10}x=\frac{1}{2^n}$ y

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right) = \frac{x-1}{log_{10}x} \qquad \text{(A)}$$

Este mismo valor de x puede obtenerse colocando en lugar de 10 cualquier otro número finito: $\sqrt[2^m]{a}\approx x$. Entonces $\log_{10}x=\dfrac{\log_{10}a}{2^m}$.

Reemplazando en (A) resulta: : $2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right)\approx\dfrac{2^m\left(\sqrt[2^m]{10}-1\right)}{\log_{10}a}$, de donde

$$\log_{10}a\approx\frac{2^m\left(\sqrt[2^m]{a}-1\right)}{2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right)}.$$

De esta manera, calcular el logaritmo decimal de cualquier número se reduce a la extracción sucesiva de las raíces cuadradas de ese número. Los valores de las potencias de 2 y las sucesivas extracciones de las raíces cuadradas de 10 se calculan previamente.

Para eliminar la acumulación de errores, Briggs efectuó la extracción de la raíz cuadrada de orden 54 con exactitud de hasta 32 cifras decimales:

$$\sqrt[2^{54}]{10}=1{,}00000000000000012781914932003235.$$

Otros aportes

- En el año 1620 el inglés John Speidell calculó las tablas de los logaritmos naturales los que inmediatamente conquistaron una enorme popularidad.
- En 1620 el profesor Edmund Gunter elaboró una escala logarítmica, que fue la primera variante de la llamada regla de cálculo.
- En el año 1628 el holandés A. Vlacq terminó el trabajo de Briggs, conformó y editó tablas de logaritmos decimales con 10 cifras de los números del 1 al 10^5. Completó hasta el final las tablas de logaritmos decimales con 10 cifras de las funciones trigonométricas con una frecuencia de cada 10´´.
- Gregorio de St. Vincent, en su *Opus Geometricum* (1647), proporcionó las bases para la importante conexión entre la hipérbola rectangular y la función logaritmo. Demostró, que si sobre la curva $y=\dfrac{1}{x}$ se consideran los puntos $P_i\ (x_i, y_i)$ con $i=0,1,2,3,\ldots$, los x_i se eligen de tal modo que las áreas determinadas por la hipérbola, las rectas $x=x_i$, $x=x_{i+1}$ y el eje x son iguales para todo i, entonces las y_i están en progresión geométrica. Esto

significa que la suma de las áreas desde x_0 hasta x_i es proporcional al logaritmo de y_i o, en nuestra notación,

$$\int_{x_0}^{x_i} \frac{dx}{x} = k \ln y_i$$

- Alrededor de 1665 Newton también se dio cuenta de la conexión entre el área encerrada bajo la hipérbola y los logaritmos, e incluyó esta relación en su *Method of Fluxions*. Desarrolló $\frac{1}{1+x}$ por el teorema del binomio e integró término a término obteniendo $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$
- En 1667, Kauffman (1620-1687) conocido bajo el nombre de N. Mercator, usando la aplicación de los elementos del análisis infinitesimal dio una manera nueva, más cómoda para el cálculo de los logaritmos. Partió de la relación demostrada por Saint-Vincent trasladando el eje de ordenadas a la derecha en una unidad. La ecuación de la hipérbola se convirtió en $y = \frac{1}{1+x}$ .Utilizó el método de cuadriculación de las áreas acotadas por curvas de la forma $y = x^n$, y las rectas $y = 0$, $y = y_0$, $y = y_1$, obteniendo en forma independiente la misma serie que Newton. Es decir, la posibilidad de calcular los valores de la función $\ln(1+x)$ mediante una serie de potencias.
- L. Euler (1707 - 1783) terminó la teoría de las funciones logarítmicas. A él pertenece la definición general de las funciones logarítmicas y exponencial como recíprocamente inversas, la extensión del concepto de logaritmo al caso de argumento complejo y la introducción del símbolo e para la base de los logaritmos naturales.

El problema de la prioridad

La demora de Bürgi en publicar sus trabajos trajo la controversia respecto de la prioridad, ya que, Napier los publicó 6 años antes que él.
La prioridad de la invención de los logaritmos constituye uno de los más desordenados campos de batalla de la historia de la matemática. En "Cajori en Napier tercentenary vol., Londres, 1914" se hace constar cómo se juzgaron en 1914 los resultados de la refriega. La prioridad de la publicación de Napier es

incontestable; Bürgi inventó independientemente los logaritmos, y construyó entre 1603 y 1611 una tabla, mientras que "Napier ya trabajó en los logaritmos hacia 1594...; por lo tanto es probable que Napier empezara a trabajar en los logaritmos mucho antes que Bürgi".

Cálculo aproximado de logaritmos

Para obtener el valor aproximado de un logaritmo neperiano podemos hacer uso de una fórmula recurrente que nos permite calcular $ln\left(n+h\right)$ conociendo $ln\ n$. Bastará calcular la diferencia

$$(1) \qquad ln(n+h) - ln\ n = ln\ \frac{n+h}{n}$$

Como la función $ln\left(1+x\right)$ es desarrollable en serie de potencias para $\left|x\right| < 1$

$$(2) \qquad ln\left(1+x\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ \left(-1\right)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Si reemplazamos $-x$ por x en $\left(2\right)$ obtenemos

$$(3) \qquad ln\left(1-x\right) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

y restando de $\left(2\right)$

$$(4) \qquad ln\ \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\right)$$

Comparando con $\left(1\right)$:

$$\frac{n+h}{n} = \frac{1+x}{1-x}\ , \quad \left|x\right| < 1$$

se sigue $x = \dfrac{h}{2n+h} < 1$

Reemplazando este valor de x en $\left(4\right)$ obtenemos la fórmula buscada:

$$(5) \qquad ln\left(n+h\right) = ln\ n +$$

$$+ 2\left[\frac{h}{2n+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2n+h} \right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2n+h} \right)^5 + \ldots\ldots \right]$$

y en particular, si $h = 1$

$$(6) \qquad ln\,(n+1) = ln\, n +$$

$$+ 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\ldots \right]$$

que nos da el logaritmo neperiano de un número entero conociendo el del anterior. Así, si $n = 1$, obtenemos:

$$ln\, 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^2} + \ldots\ldots \right)$$

que converge rápidamente ya que con sólo ocho términos se obtiene la cifra exacta

$$ln\, 2 = 0,69314718\ldots\ldots$$

$ln\, 4 = 2 ln\, 2 = 1,3862943\ldots\ldots$

$ln\, 5 = ln\,(4+1) = ln\, 4 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3.9^2} + \frac{1}{5.9^2} + \ldots\ldots \right) = 1,6094379\ldots\ldots$

$ln\, 10 = ln\,(2.5) = ln\, 2 + ln\, 5 = 2,3025851\ldots\ldots$

y así sucesivamente.
Si usamos como aproximación el primer término de la serie (5) obtendremos:

$$(7) \qquad ln\,(n+h) - ln\, n \approx \frac{2h}{2n+h}$$

Se puede mostrar usando teoría de series, que esta fórmula es tan exacta que si $n > 10000$, el error es menor que 10^{-13}; es decir, resulta el logaritmo con 13 decimales exactos.

Los logaritmos decimales se pueden escribir en términos de los neperianos mediante la relación $log_{10} x = log\, x = \frac{1}{ln\, 10} . ln\, x$ que se obtiene haciendo cambio de base. Por lo tanto para calcular el logaritmo decimal de un número bastará multiplicar el logaritmo neperiano de ese número por el factor $M = \frac{1}{ln 10} = 0,4342945.......$

Una relación equivalente a (7) se obtiene para los logaritmos decimales,

$$(8) \qquad log(n + h) - log\, n \approx \frac{2Mh}{2n + h}$$

Es con esta fórmula tan sencilla con la que se calculan las tablas de logaritmos. Para construir una tabla de logaritmos decimales con 7 cifras hasta 100 000, basta calcular los logaritmos de 10^4 a 10^5. Así, por ejemplo:

$$log 10001 = 4 + 2.0,4342945/20001 = 4,0000434$$

Conclusiones

- Independientemente de la prioridad de la invención de los logaritmos, lo importante es la aplicación que pudieron hacer de ellos los astrónomos y científicos de la época. Los logaritmos permitieron acelerar los cálculos numéricos, dejando a los científicos tiempo para realizar otras investigaciones que fueron de provecho para la ciencia y la humanidad.
- Actualmente los logaritmos no tienen la aplicación de esa época, porque contamos con calculadoras que nos hacen el cálculo en forma instantánea. Pero los logaritmos como función conservan todo su valor e importancia.

Bibliografía

- Historia de las Matemáticas - K. Ríbnikov - Editorial Mir, 1987.

- Historia de la Matemática - Carls Boyer - Alianza Editorial - 1° Reimpresión 1992.

- El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días - Morris Kline - Tomos: I,II y III - Alianza Editorial - 1° Reimpresión 1994.

- Historia de las Matemáticas - E.T. Bell - Fondo de Cultura Económica, 1949.

- La Magia de los Números - Dr. Paul Karlson - Editorial Labor, 1966.

- Análisis Matemático –Vol.1 - Rey Pastor, J. – Editorial Kapelusz, 8va. Edición 1969

- Enciclopedia Microsoft (R) Encarta (R) 98 -

Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán.
Avda. Independencia 1800 – (4000) San Miguel de Tucumán.
e-mail:simpellizzere@herrera.unt.edu.ar