Sucesiones Recursivas Lineales

Juan Sabia *Susana Tesauri*

1. Introducción

Una forma usual de definir sucesiones de números es recursivamente. Por ejemplo, si alguien conoce la sucesión de Fibonacci, es probable que la recuerde como la sucesión de enteros $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1}$$

y no como la sucesión definida por

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Sin embargo, (2) da la fórmula exacta de cualquier término de la sucesión de Fibonacci y, en algunas situaciones, esto puede ser más útil que conocer la definición (1). Por ejemplo, a partir de (2), tenemos una expresión para f_{1000} sin necesidad de conocer los 999 términos anteriores y, en general, de esta forma se puede estimar el orden de f_n: para esta sucesión, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f_n}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n}\right) = 1$ y por lo tanto se deduce que su crecimiento es similar al de $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, es decir, es exponencial en n. Más adelante veremos como se puede usar (2) para acotar la cantidad de pasos del algoritmo de Euclides para números naturales.

Aplicando inducción se puede demostrar que las sucesiones definidas por (1) y por (2) coinciden pero cómo obtener la fórmula (2) a partir de (1)? Este problema no es arbitrario: en muchos contextos aparecen sucesiones definidas en forma recursiva y no por medio de una fórmula explícita del término n-ésimo. Analicemos, por ejemplo, el siguiente caso:

Queremos diseñar un algoritmo que pueda triangular cualquier matriz cuadrada en $\mathbb{R}^{n\times n}$ y nos interesa contar la cantidad máxima de operaciones $(+, -, \times, \div)$ necesarias para hacerlo (no se contarán las comparaciones ni los cambios de lugar de coeficientes). Para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos entonces un número x_n que cuenta la cantidad máxima de operaciones necesarias para triangular una matriz de $n \times n$ y esto define una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si tomamos como algoritmo el método de Gauss, podemos observar las siguientes propiedades de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

(i) $x_1 = 0$ (una matriz de 1×1 ya está triangulada).

(ii) Dada la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, podemos suponer que $a_{11} \neq 0$ (si fuese cero, podemos elegir algún elemento $a_{i1} \neq 0$ $(2 \leq i \leq n)$ e intercambiar la fila i con la fila 1; en el caso en que sean todos cero, nuestro problema se reduce a triangular una matriz de $(n-1) \times (n-1)$). Para lograr un cero en el lugar que ocupa a_{21} hay que multiplicar la primer fila por $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ y restársela a la segunda fila.

¿Cuántas operaciones se realizan? Hay una división (que calcula $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$), $(n-1)$ multiplicaciones y $(n-1)$ restas (como ya sabemos que en el primer lugar de la fila va a ir un cero, no nos tomamos el trabajo de hacer la cuenta $a_{21} - (\dfrac{a_{21}}{a_{11}}).a_{11}$). Este procedimiento lo tenemos que realizar $(n-1)$ veces para obtener ceros en los primeros lugares de las todas las filas i $(2 \leq i \leq n)$. Y ahora sólo nos resta triangular una matriz de $(n-1) \times (n-1)$. Por lo tanto, tenemos que

$$x_n = (1 + 2(n-1))(n-1) + x_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 .$$

Es decir, haciendo un cambio de variables, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ queda definida por la recursión

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{n+1} = (2n^2 + n) + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sin embargo, de esta forma, por ejemplo, no podemos estimar cuántas operaciones serán necesarias para triangular una matriz de $n \times n$ por medio de este algoritmo sin antes calcular cuántas serán necesarias para triangular matrices de menor tamaño. Si conociésemos para cierta computadora el tiempo que tarda en llevarse a cabo una operación, con la fórmula explícita del término x_n podríamos estimar *a priori* el tiempo que tardaría en efectuarse la triangulación de una matriz de $n \times n$.

La intención de estas notas es exhibir un método para encontrar una forma cerrada o fórmula general para el término n-ésimo (es decir, una fórmula que no dependa de los términos anteriores) de ciertas sucesiones definidas por recurrencia. Este método se basa en técnicas de Algebra Lineal. Por razones de espacio, en esta primera parte nos limitaremos a dar algunas definiciones y ejemplos. En la segunda parte, que aparecerá en el próximo número de la revista, mostraremos una forma de calcular la fórmula general.

2. Definiciones y ejemplos

Primero, definamos el tipo de sucesiones con las que vamos a trabajar. Para no tener que considerar restricciones, consideraremos sucesiones de números complejos. El conjunto de todas las sucesiones de números complejos se notará $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Definición: Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se dice **recursiva lineal** si existen $k \in \mathbb{N}$ y números complejos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ tales que

$$x_{n+k} = \alpha_0.x_n + \alpha_1.x_{n+1} + \cdots + \alpha_{k-1}.x_{n+k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En este caso, se dice que la sucesión recursiva es de orden menor o igual que k.

Es decir, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será recursiva lineal cuando existe $k \in \mathbb{N}$ tal que el $(k+1)$-ésimo término, el $(k+2)$-ésimo término y todos los siguientes se pueden calcular haciendo una combinación lineal fija de los k términos anteriores.

Analicemos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Consideremos todas las posibles sucesiones recursivas lineales de orden menor o igual que 1. Necesariamente, la definición será (para algún a y algún λ en $\mathbb{C}$)

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \lambda . x_n \end{cases} .$$

En este caso, es muy fácil conjeturar el término general de la sucesión y probar que

$$x_n = a.\lambda^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(por convención, consideraremos $0^0 = 1$). Esta sucesión se llama la sucesión geométrica de primer término a y razón λ.

Ejemplo 2: Consideremos, dados a y λ complejos, la sucesión recursiva lineal

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = \lambda . a \\ x_{n+2} = \lambda^2 . x_n \end{cases} .$$

Es inmediato ver que esta sucesión es la geométrica de primer término a y razón λ. Según esta definición, su orden es menor o igual que 2 y según la definición dada en el Ejemplo 1 su orden es menor o igual que 1. Es decir, como una sucesión recursiva lineal puede definirse de distintas maneras, no se puede dar una noción exacta del orden que dependa de una sola de estas definiciones. Lo único que se puede afirmar a priori es que el orden será menor o igual que cierto número natural.

Ejemplo 3: Dada la sucesión aritmética de primer término $a \in \mathbb{C}$ y razón $\lambda \in \mathbb{C}$, es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \lambda + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

intentaremos ver si es recursiva lineal. Es evidente que, a menos que $\lambda = 0$ (en cuyo caso la sucesión coincide con la geométrica de primer término a y razón 1), esta definición no nos sirve para decidir si es recursiva lineal o no así que trataremos de modificarla. Consideremos dos términos consecutivos

$$x_{n+1} = \lambda + x_n$$
$$x_{n+2} = \lambda + x_{n+1}$$

Si restamos miembro a miembro las igualdades anteriores, obtenemos

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que nos permite afirmar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es recursiva lineal de orden menor o igual que 2 y está definida por

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a + \lambda \\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ejemplo 4: La sucesión de Fibonacci $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ver (1) en Introducción) es evidentemente recursiva lineal de orden menor o igual que 2.

Ejemplo 5: Consideremos la sucesión periódica

$$(1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, ...).$$

Una posible definición por recurrencia será

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \\ x_{n+3} = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

y su orden es menor o igual que 3.

Ejemplo 6: La sucesión cuyo término n-ésimo cuenta la cantidad máxima de operaciones del algoritmo de Gauss para triangular una matriz de $n \times n$ es (ver Introducción)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{n+1} = (2n^2 + n) + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

¿Será ésta una sucesión recursiva lineal?

Consideremos, para todo $n \in \mathbb{N}$ los términos x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} y x_{n+4} de la sucesión:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (2n^2 + n) + x_n \\ x_{n+2} &= (2n^2 + 5n + 3) + x_{n+1} \\ x_{n+3} &= (2n^2 + 9n + 10) + x_{n+2} \\ x_{n+4} &= (2n^2 + 13n + 21) + x_{n+3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Podemos pensar las expresiones $(2n^2 + n)$, $(2n^2 + 5n + 3)$, $(2n^2 + 9n + 10)$ y $(2n^2 + 13n + 21)$ que aparecen en las igualdades como polinomios en n de grado 2. Pero cuatro polinomios de grado 2 son necesariamente linealmente dependientes, es decir, existe una combinación lineal no trivial de ellos que da el polinomio 0. Planteando las cuentas correspondientes se obtiene que

$$(-1)(2n^2 + n) + 3(2n^2 + 5n + 3) - 3(2n^2 + 9n + 10) + 1(2n^2 + 13n + 21) = 0.$$

Aplicando la misma combinación lineal a las ecuaciones en (3) miembro a miembro, resulta

$$(-1)x_{n+1} + 3x_{n+2} - 3x_{n+3} + x_{n+4} = (-1)x_n + 3x_{n+1} - 3x_{n+2} + x_{n+3}$$

y, por lo tanto, la sucesión analizada cumple

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - 1x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, la sucesión está definida por

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 13 \\ x_4 = 34 \\ x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - 1x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

por lo que es recursiva lineal de orden menor o igual que cuatro.

En los próximos dos ejemplos, probaremos que ciertas sucesiones **no** son recursivas lineales.

Ejemplo 7: La sucesión $\{2^{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es recursiva lineal.

Supongamos que sí lo es. Existen entonces $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ números complejos tales que

$$2^{2^{n+k}} = \sum_{0\leq i\leq k-1} \alpha_i 2^{2^{n+i}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea $C = \max\{|\alpha_i| \ / \ 0 \le i \le k-1\}$ y consideremos el módulo de la expresión anterior. Entonces

$$2^{2^{n+k}} = |\sum_{0 \le i \le k-1} \alpha_i 2^{2^{n+i}}| \le \sum_{0 \le i \le k-1} |\alpha_i| 2^{2^{n+i}} \le$$

$$\le \sum_{0 \le i \le k-1} C 2^{2^{n+k-1}} = kC 2^{2^{n+k-1}}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$2^{2^{n+k-1}} = \frac{2^{2^{n+k}}}{2^{2^{n+k-1}}} \le kC \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

pero esto es absurdo ya que el primer miembro es el término general de una sucesión que tiende a infinito cuando n tiende a infinito y, por lo tanto, no puede estar acotado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 8: Consideremos la sucesión $\{\log n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y supongamos que es recursiva lineal de orden menor o igual que k para algún $k \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces existirán números complejos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ tales que

$$\log(n+k) = \alpha_0 \log(n) + \alpha_1 \log(n+1) + \ldots + \alpha_{k-1} \log(n+k-1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando parte real de ambos lados de la igualdad, se obtiene una ecuación de recurrencia a coeficientes reales. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ son números reales. Consideremos la función $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log(x+k) - \alpha_0 \log(x) - \alpha_1 \log(x+1) - \ldots - \alpha_{k-1} \log(x+k-1).$$

f es continua y derivable en $(0, +\infty)$ y $f(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, usando el Teorema de Rolle, su derivada f' vale cero en infinitos puntos. Calculando f' se obtiene

$$f'(x) = \frac{1}{x+k} - \alpha_0 \frac{1}{x} - \alpha_1 \frac{1}{x+1} - \ldots - \alpha_{k-1} \frac{1}{x+k-1}$$

y operando

$$f'(x) = \frac{\prod\limits_{0\leq i\leq k-1} (x+i) - \alpha_0 \prod\limits_{1\leq i\leq k} (x+i) - \ldots - \alpha_{k-1} \prod\limits_{\substack{0\leq i\leq k \\ i\neq k-1}} (x+i)}{\prod\limits_{0\leq i\leq k} (x+i)}.$$

Como f' vale cero en infinitos puntos, el numerador es un polinomio que tiene infinitas raíces y por lo tanto debe ser el polinomio nulo. Sin embargo, cuando evaluamos el numerador en $(-k)$, obtenemos $\prod\limits_{0\leq i\leq k-1} (-k+i)$ que es un número distinto de cero. Esto es una contradicción que proviene del hecho de suponer que la sucesión $(\log n)_{n\in\mathbb{N}}$ es recursiva lineal.

Para terminar con esta sección, probaremos una propiedad sobre la sucesión suma de una sucesión recursiva lineal:

Proposición. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal de orden menor o igual que k y sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$S_n = \sum_{1\leq i\leq n} x_i \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión recursiva lineal de orden menor o igual que $k+1$.

Demostración: Consideremos la definición por recurrencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x_{n+k} = \alpha_0.x_n + \alpha_1.x_{n+1} + \cdots + \alpha_{k-1}.x_{n+k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, reemplazando n por $n+1$, vale

$$x_{n+1+k} = \alpha_0.x_{n+1} + \alpha_1.x_{n+2} + \cdots + \alpha_{k-1}.x_{n+k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pero como $x_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, reemplazando y despejando S_{n+1+k}, se tiene que

$$S_{n+1+k} = \alpha_0.(S_{n+1} - S_n) + \cdots + \alpha_{k-1}.(S_{n+k} - S_{n+k-1}) - S_{n+k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si reagrupamos y sumamos los términos del segundo miembro, nos da la recurrencia de orden menor o igual que $k+1$ buscada. □

Ejercicios

Ejercicio 1. Decidir cuáles de las siguientes sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son recursivas lineales. En caso afirmativo hallar una ecuación de recurrencia.

i) $a_n = 3^n + n.3^{n-1}$ ii) $a_n = \frac{1}{n}$

iii) $a_n = (3^n + n.3^{n-1})(5^n - n.5^{n-1})$ iv) $a_n = n^2$

v) $a_n = \sum_{1\le i\le n} i^3$

Ejercicio 2. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos creciente. Probar que, si es recursiva lineal, existe una constante C tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Vale la recíproca?

Ejercicio 3.

i) Sean $a_1, \dots, a_k, a \in \mathbb{C}$. Se considera la sucesión

$$\begin{cases} x_1 , \dots , x_k \\ x_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i.x_{n+i} + a & \text{si } n \ge 1. \end{cases}$$

Probar que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión recursiva lineal.

ii) Sean $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal. Probar que la sucesión

$$\begin{cases} y_1 = a_1 , \dots , y_k = a_k \\ y_{k+n} = x_n & \text{si } n \ge 1 \end{cases}$$

es recursiva lineal.

Ejercicio 4. Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado k. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = P(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es recursiva lineal de orden menor o igual que $k+1$.

Ejercicio 5.

i) Sea $S \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto finito y sea $\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión recursiva lineal tal que $x_i \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ es periódica a partir de cierto término.

ii) Sea $\{x_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ la sucesión de los dígitos del desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ y sea $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Probar que para ningún valor de k existe $f : D^k \to D$ tal que $f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}) = x_{n+k} \, \forall \, n \in \mathbb{N}$. (Sugerencia: usar la idea del ítem anterior para hacer una demostración similar en este caso en el que f no es necesariamente lineal).

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Departamento de Matemática. Ciudad Universitaria - Pabellón I -
(1428) - Buenos Aires
jsabia@dm.uba.ar stesauri@dm.uba.ar