Problemas para resolver

1) Sobre el máximo de un volumen.

Se tiene una pirámide regular, cuya base es un triángulo equilátero, y las caras laterales, triángulos isósceles, todos iguales. Rebatidas éstas sobre la base, haciéndolas girar sobre el lado común con ella, se forma una estrella de tres puntas.

Se inscribe la estrella en un círculo de radio r y se pide determinar la longitud de las aristas en función de r, cumpliendo la condición de que el volumen de la pirámide sea máximo.

2) Un problema curioso sobre números naturales.

Si se escriben en la forma usual las 10 cifras de nuestro sistema de numeración sobre una hoja de papel y se hace girar ésta 180° en su plano, se observa que el 0 y el 8 recobran su aspecto, que el 6 se convierte en 9 y éste en 6, y que las demás cifras carecen de significación.

Sabido esto, se pregunta cuántos números hay comprendidos entre 1 y 10 elevado a n, que se lean lo mismo en la posición normal que en la invertida.

Nota. En la interpretación de este enunciado no deberán considerarse números tales como el 080, esto es, números cuya primera cifra de la izquierda es un 0.

3) Lugar geométrico de los puntos de tangencia entre unas circunferencias variables.

En un rectángulo de lados 2a y 2b (a mayor que b), y con centro en o, se inscriben óvalos tangentes al rectángulo en los puntos medios A, A', B, B', de sus lados.

Para esto, primero se dibujan dos circunferencias iguales, tomando sus centros P y P' en la parte interior de la mediana mayor AA' del rectángulo, circunferencias que resultan tangentes a los lados en los puntos A y A' del rectángulo. Se trazan después otras dos circunferencias iguales entre sí, tangentes a las anteriores, y a los otros dos lados del rectángulo en los puntos B y B'; sus centros están en la mediana $B\,B'$ o en su prolongación.

Se pide el lugar geométrico de los cuatro puntos de tangencia entre las circunferencias cuando los centros P y P' varían de posición dentro de los segmentos $O\,A$, $O\,A'$.

4) Un número de cinco cifras con una propiedad particular.

Encontrar un número de cinco cifras diferentes que sea igual a la suma de todos los de tres guarismos que se puedan formar con dichas cinco cifras, coordinándolas sin repetición de todas las maneras posibles.

5) Determinación de un número natural de seis cifras.

Encontrar un número:

$$N = abcdef$$

que en nuestro sistema de numeración decimal tiene seis cifras (f. unidades; e, decenas; d, centenas, etc.) y que multiplicado por 2,3,4,5 y 6 produce los cinco números:

$$bcdefa, \qquad cdefab, \qquad defabc, \qquad efabcd \quad y \quad fabcde.$$

6) Ejercicios en el sistema de numeración de base seis.

En el sistema de numeración de base seis se desea hallar:

1°. La parte entera y el resto de la raíz cuadrada del número 4521254.

2°. En cuántos ceros termina a la derecha el cubo del producto de los 55555 primeros números? O sea:

$$(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,10\,.\,11\ldots15\,.\,20\,.\,21\ldots55555)^3 = (55555!)^3.$$

Todos estos datos están escritos en el sistema de la base seis y los resultados y todas las operaciones han de obtenerse precisamente en ese sistema sin cambiar de base.

7) Descomposición de un número natural en una suma de potencias distintas de la base 2.

Demuéstrese primeramente que todo número entero y positivo se puede descomponer en una suma de potencias distintas de la base 2, y que esto sólo puede hacerse de una manera única.

Supóngase después de realizada este descomposición para todos los números comprendidos entre 1 y $2^m - 1$, ambos inclusive, y calcúlese, en función de m, la suma total de los exponentes obtenidos.

8) Cálculo de una probabilidad.

En una urna hay 10 bolas, numeradas de 0 a 9. Se extraen, sucesivamente, bolas, anotando el número de cada una y volviéndola a la urna, cuya composición, por consiguiente, no cambia. Se interrumpe la operación cuando por primera vez sale el cero y se pide la probabilidad para que la suma de los números de las bolas salidas no pase de 10.

Se admitirá como caso favorable aquel en que el cero sea el primero que salga.

9) Mínimo relativo de costo de una obra.

Una población que en la actualidad consta de 9.680 habitantes, se supone crece en un 1 por 100 anual.

Se proyecta abastecerla de agua, dotándola, como mínimo, a razón de 270 litros por habitante y día, con una tubería capaz de conducir un caudal de q litros por segundo. El costo, en pesos, de la obra, se admite es proporcional a la raíz de q, según la fórmula:

$$c = 1000.000\sqrt{q}.$$

En estas condiciones queda asegurado el abastecimiento durante un cierto número, t, de años.

Para pagar la obra se consigna todos los años, al final, una anualidad a, que, al interés $i = 0,04$ (por 100), ha de amortizar en el tiempo t el capital empleado y sus intereses.

Preguntamos en qué plazo, t, ha de hacerse la previsión del abastecimiento y para qué caudal consiguiente, a base de que la anualidad resulte lo más módica posible.

10) Diámetro de una tubería que hace mínimo el coste de una instalación.

Se proyecta una cierta construcción de agua mediante una motobomba que impulsará el caudal $q = 10$ litros por segundo de tiempo en el interior de una tubería de fundición, de d diámetro, hasta un cierto depósito.

La pérdida de energía debida a la resistencia de las paredes interiores de la tubería se calcula, por metro de ella y segundo de tiempo, por la siguiente fórmula:

$$E = 1.17\frac{q^3}{d^{5,3}}$$

expresándose q y d en las repetidas unidades, y E, en kilowatios.

El precio del kilowatio-hora es de $1,15$ pesos, y el de la tubería, de dos pesos por cada metro de longitud y cada centímetro de diámetro. La instalación funcionará solamente ocho horas diarias.

Considérese el año medio de 365.25 días. Se supone que el alquiler de energía se pagará cada fin de año y que el interés del dinero invertido es el cinco por ciento anual.

Si a los cincuenta años se ha de amortizar la instalación, se pide: determinar el diámetro teórico preciso, en forma que se obtenga la mayor economía posible.