Una igualdad muy joven

En 1995 Simon Plouffe demostró la siguiente igualdad

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Cuya demostración es extremadamente simple.

En efecto, para cada par de naturales k, i se tiene que

$$\sqrt{2^k}\int_0^{1/\sqrt{2}} x^{k-1+8i}dx = \sqrt{2^k}\left.\frac{x^{k+8i}}{k+8i}\right|_{x=0}^{x=1/\sqrt{2}} = \frac{1}{16^i(8i+k)}$$

Por consiguiente

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i(8i+k)} = \sqrt{2^k}\int_o^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx. \tag{1}$$

puesto que

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\frac{1}{8i+k} = \sqrt{2^k}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{1/\sqrt{2}} x^{k-1+8i}dx$$

$$= \sqrt{2^k}\int_o^{1/\sqrt{2}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(x^8)^i\right)x^{k-1}\,dx$$

$$= \sqrt{2^k}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx.$$

debido a que

$$\frac{1}{1-x^8} = \sum_{i=0}^{\infty}(x^8)^i \text{ (Serie geométrica)}$$

Por lo tanto, aplicando la fórmula (1) para $h = 1, 4, 5, 6$ se obtiene

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\Big(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\Big)$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8}\, dx \qquad (2)$$

Ahora hacemos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\, y$.

De esto, $dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\, dy$; si $x = 0,\ y = 0$; si $x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = 1$;

y la integral (2) es igual a

$$\int_0^1 \frac{16(y-1)}{y^4 - 2y^3 + 4y - 4}\, dy$$

$$= \int_0^1 4\,\frac{2-y}{y^2 - 2y + 2}\, dy + \int_0^1 4\,\frac{y}{y^2 - 2}\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{4 - 4y}{y^2 - 2y + 2}\, dy + \int_0^1 \frac{4}{1 + (y-1)^2}\, dy + \int_0^1 4\frac{y}{y^2 - 2}\, dy$$

$$= [-2\, ln(y^2 - 2y + 2) + 4\, arctan(y-1) + 2\, ln(2 - y^2)]_0^1$$

$$= \pi$$

Con respecto al error, se tiene que

$$\Big|\pi - \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{16^i}\Big(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\Big)\Big| \leq \frac{0.6}{16^N}$$

En efecto

$$\Big|\pi - \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{16^i}\Big(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\Big)\Big| =$$

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{16^i}\Big(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\Big)\Big|\leq\\
&\leq \sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{16^i}\Big(\frac{4}{8i+1}+\frac{2}{8i+4}+\frac{1}{8i+5}+\frac{1}{8i+6}\Big)\leq\\
&\leq \sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{16^i}(4+2+1+1)\\
&=8\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{16^i}=\frac{8}{16^{N+1}}\,\frac{1}{1-1/16}=\\
&=\frac{8}{15}\,16^N\leq\frac{0.6}{16^N}
\end{aligned}
$$

Por tanto, si deseamos calcular 1000 decimales exactos de π, la fórmula nos dice que debemos escoger N de modo que

$$\frac{0.6}{16^N}\leq\frac{1}{10^{1000}}$$

Tomando logaritmo resulta

$$log\,(0.6)-N\,log\,16\leq -1000\,log\,10$$

o pasado de miembros

$$\frac{log\,(0.6)+1000\;log\,10}{log\,16}\leq N$$

Como $log\,0,6\sim -0.5,\qquad log\,10\sim 2.3,\qquad log\,16\sim 2.8$

resulta $N\simeq 830$.