# Encuentros y desencuentros de dos circunferencias

*Walter N. Dal Lago*

En este artículo, como el título lo sugiere, nos proponemos analizar qué posición relativa puede ocupar una circunferencia respecto de otra en el plano euclidiano $\pi$. Además vamos a demostrar un importante resultado acerca de circunferencias secantes y daremos algunas aplicaciones clásicas del mismo.

En primer lugar, repasaremos algunos conceptos y resultados que nos serán útiles en el desarrollo del tema. Denotaremos con $I\!N$ y $I\!R$ a los conjuntos de números naturales y reales respectivamente.

Trabajaremos en el contexto de la axiomática del plano euclidiano denominada clásica o sintética, que es básicamente el sistema de Euclides, perfeccionado por David Hilbert. Siguiendo la clasificación de Hilbert, podemos enunciar los axiomas de continuidad de la siguiente manera.

**Axioma de Arquímedes.** Dados dos segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$, existe un $n \in I\!N$ tal que $n.\overline{ab} > \overline{cd}$.

**Axioma de completitud.** Dada una sucesión de segmentos $\overline{a_n b_n}$ con $n \in I\!N$, tal que $\overline{a_{n+1}\, b_{n+1}} \subseteq \overline{a_n b_n}$ $\forall\, n \in I\!N$, la intersección $\bigcap\limits_{n \in I\!N} \overline{a_n b_n} \neq \emptyset$.

Usando estos axiomas se puede demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 0.** *Fijemos un segmento $U$ en el plano $\pi$, llamado segmento unidad.*

*Sea $A$ una recta en $\pi$ y sean $o$, $u \in A$ tales que $\overline{ou} \equiv U$. Entonces existe una única función biyectiva. $\rho : A \longrightarrow I\!R$ que satisface:*

*i)* $\rho(p) \geq 0 \quad \forall\, p \in \overrightarrow{ou}$.

*ii)* $\rho(p+q) = \rho(p) + \rho(q) \quad \forall\, p, q \in A$, *donde $p+q$ es el punto de $A$ tal que, si consideramos los vectores $(o,p)$ y $(o,q)$, entonces $(o,p) + (o,q) = (o, p+q)$.*

*iii)* $\rho(u) = 1$.

**Definición.** *La función $\rho$ del Teorema se llama sistema de abscisas sobre $A$, asociado al vector $(o,u)$.*

Los sistemas de abscisas permiten definir la longitud de un segmento y la distancia entre dos puntos.

**Definición.** *Dado un segmento* $\overline{pq}$*, sea* $u \in \overrightarrow{pq}$ *tal que* $\overline{pu} \equiv U$ *y sea* $\rho$ *el sistema de abscisas sobre* $\overleftrightarrow{pq}$ *asociado al vector* $(p, u)$*. Definimos la longitud de* $\overline{pq}$ *respecto de* $U$ *por*

$$| \overline{pq} |= \rho(q)$$

Si extendemos la noción de segmento $\overline{pq}$ al caso en que $p = q$, es decir $\overline{pq} = \{p\}$, no tenemos definida una semirrecta $\overrightarrow{pq}$, pero si consideramos cualquier semirrecta de origen $p$, obtenemos $|\overline{pq}| = 0$.

Las propiedades que caracterizan a los sistemas de abscisas, establecidas en el Teorema 0, permiten probar sin mayores dificultades los resultados que enunciamos a continuación y que necesitaremos más adelante.

**Corolario.** *i) Si en la recta* $A$ *tomamos el orden tal que* $o < u$*,* $\rho$ *preserva el orden, o sea, si* $p < q$ *entonces* $\rho(p) < \rho(q)$*.*

*ii) Dados dos segmentos* $\overline{ab}$ *y* $\overline{cd}$*, se cumple que* $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$ *si y sólo si* $| \overline{ab} |= |\overline{cd} |$*.*

*iii) Dado un segmento* $\overline{ab}$*, si* $c \in \overline{ab}$*, se verifica que* $|\overline{ab}| = |\overline{ac}| + |\overline{cb}|$*.*

De la experiencia y la práctica surge naturalmente la definición siguiente.

**Definición.** *Dados los puntos* $a$ *y* $b$ *en* $\pi$*, definimos la distancia de* $a$ *a* $b$ *por*

$$d(a, b) = |\bar{ab}|$$

**Observación.** *Es fácil ver que se satisfacen las propiedades que caracterizan a una distancia, a saber:*

*i)* $\forall\ a, b \in \pi \qquad d(a, b) \geq 0$ *y* $d(a, b) = 0$ *si y sólo si* $a = b$*.*

*ii)* $\forall\ a, b \in \pi \qquad d(a, b) = d(b, a)$ *(simetría).*

*iii)* $\forall\ a, b, c \in \pi \qquad d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ *(desigualdad triangular).*

**Definición.** *Si* $o \in \pi$ *y* $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $r > 0$ *, la circunferencia de centro* $o$ *y radio* $r$ *es* $C(o,r) = \{p \in \pi / d(p,o) = r\}$.
*Un punto* $q$ *es interior a* $C(o,r)$ *si* $d(q,o) < r$ *y es exterior si* $d(q,o) > r$.

**Hipótesis general.** *Consideraremos dos circunferencias,* $C = C(o,r)$ *y* $C' = C(o',r')$ *con* $r \leq r'$ *y* $o \neq o'$. *El segmento* $\overline{ab}$ *denotará el diámetro de* $C$ *contenido en* $\overleftrightarrow{oo'}$, *donde* $b \in \overrightarrow{oo'}$ *y* $a$ *está en la semirrecta opuesta. Llamaremos* $S$ *a una de las semicircunferencias de* $C$ *determinadas por el diámetro* $\overline{ab}$.
*En la recta* $\overleftrightarrow{oo'}$ *tomaremos el orden tal que* $o < o'$.

Con un poco de esfuerzo podemos imaginarnos las ubicaciones relativas que podrían tener las circunferencias $C$ y $C'$, según se muestra en las figuras siguientes.

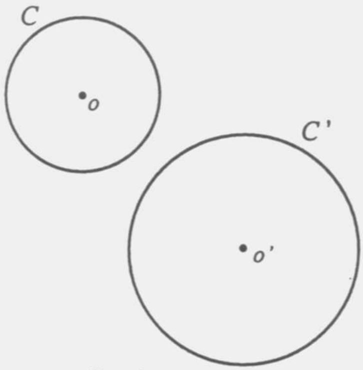


fig. 1

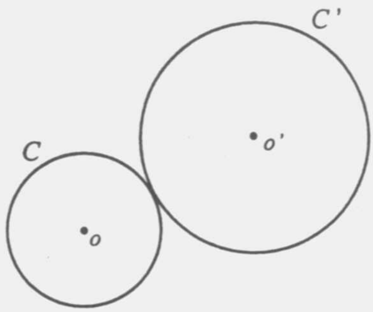


fig. 2

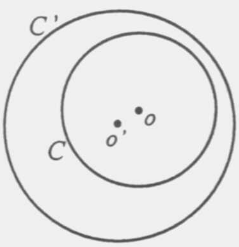


fig. 3

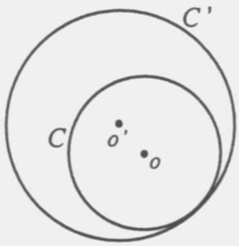


fig. 4

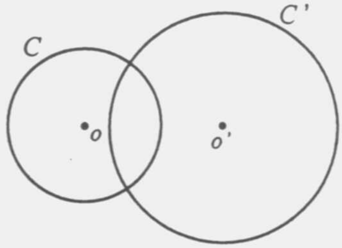


fig. 5

En el siguiente teorema probaremos que las posiciones graficadas son, esencialmente, las cinco situaciones posibles.

En vista de los gráficos, damos primero las siguientes definiciones.

**Definición.** *1) $C$ y $C'$ son mutuamente exteriores si cada punto de una es exterior a la otra (fig. 1).*

*2) $C$ y $C'$ son tangentes exteriores si tienen un punto en común y los demás puntos de una son exteriores a la otra (fig. 2).*

*3) $C$ es interior a $C'$ si todo punto de $C$ es interior a $C'$ (fig. 3).*

*4) $C$ es tangente interior a $C'$ si tienen un punto en común y los otros puntos de $C$ son interiores a $C'$ (fig. 4).*

*5) $C$ y $C'$ son secantes si cada una tiene puntos interiores y puntos exteriores a la otra (fig. 5).*

**Teorema 1.** *Con la hipótesis general que hicimos, sea $d = d(o, o')$ la distancia entre los centros de $C$ y $C'$. Entonces:*

*i) Si $d > r + r'$, $C$ y $C'$ son mutuamente exteriores.*

*ii) Si $d = r + r'$, $C$ y $C'$ son tangentes exteriores.*

*iii) Si $d < r + r'$ tenemos tres casos:*

*a) $r' - r > d$, entonces $C$ es interior a $C'$.*

*b) $r' - r = d$, entonces $C$ es tangente interior a $C'$.*

*c) $r' - r < d$, entonces $C$ y $C'$ son secantes.*

**Demostración.** i) Sea $p \in C$, usando la desigualdad triangular tenemos

$$d = d(o, o') \leq d(o, p) + d(p, o') = r + d(p, o')$$

Por hipótesis $r + r' < d$, entonces $r' < d(p, o')$, o sea, $p$ es exterior a $C'$.

Análogamente se prueba que, si $q \in C'$ entonces $q$ es exterior a $C$.

ii) Como $r + r' = d$, el extremo $b$ del diámetro de $C$ pertenece a $\overline{oo'}$ y

$$r + r' = d = d(o, b) + d(b, o') = r + d(b, o')$$

luego $d(b,o') = r'$ y $b \in C \bigcap C'$.

Sea ahora $q \in C$ tal que $q \neq b$. Si $q = a$, como $o \in \overline{ao'}$,

$$d(a,o') = d(a,o) + d(o,o') = r + d > r'$$

es decir, $q$ es exterior a $C'$. Si $q \notin \overleftrightarrow{oo}'$, los puntos $o, o'$ y $q$ determinan un triángulo, por lo tanto

$$d = d(o,o') < d(o,q) + d(q,o') = r + d(q,o')$$

Usando la hipótesis resulta $r' < d(q,o')$ lo que prueba que $q$ es exterior a $C'$.

Razonando en forma similar, se deduce que todo punto de $C'$ distinto de $b$ es exterior a $C$.

iii) a) Sea $p \in C$, por la desigualdad triangular y por ser $r \leq r'$, tenemos

$$d(p,o') \leq d(p,o) + d(o,o') = r + d < r'$$

por lo tanto $p$ es interior a $C'$.

iii) b) Si tomamos el extremo $a$ del diámetro $\overline{ab}$, como vimos en ii) $d(a,o') = r + d$ y por hipótesis $r' = r + d$, entonces $a \in C \bigcap C'$.

En cambio, el extremo $b$ está en $\overline{oo'}$ o bien $o' \in \overline{ob}$. En el primer caso, se probó en ii) que $d = r + d(b,o')$, pero $d < r + r'$, entonces $d(b,o') < r'$. En el segundo,

$$r = d(o,o') + d(o',b) = d + d(o',b)$$

luego, como por la hipótesis general que hicimos $r \leq r'$, sigue que $d(o',b) < r'$. Así, en ambos casos, $b$ es interior a $C'$.

Ahora si $q \in C$ y $q \notin \overleftrightarrow{oo}'$, los puntos $o, o'$ y $q$ son los vértices de un triángulo, entonces

$$d(q,o') < d(q,o) + d(o,o') = r + d = r'$$

lo que muestra que $q$ es interior a $C'$.

iii) c) Como dijimos en el inciso anterior, $d(a, o') = r + d$ y ahora $r' < r + d$, entonces $a \in C$ y es exterior a $C'$.

La misma prueba dada en iii) b) muestra que $b$ es interior a $C'$.

Análogamente se prueba que, si $\overline{ce}$ es el diámetro de $C'$ contenido en $\overleftrightarrow{oo'}$ y tal que $c \in \overrightarrow{o'o}$, entonces $c$ es interior a $C$ y $e$ es exterior a $C$. □

Notemos que en el Teorema 1 se contemplan, en forma exhaustiva, las relaciones posibles entre la suma y diferencia de los radios y la distancia entre los centros. Por lo tanto, las posiciones relativas descriptas abarcan todas las que se pueden dar entre dos circunferencias, que corresponden a las figuras 1 a 5.

Puntualicemos también que si $r = r'$, los casos iii.a) y iii.b) no son posibles ya que $d > 0$, o sea $C$ no puede ser interior ni tangente interior a $C'$.

**Observación.** Si consideramos el caso en que los centros de $C$ y $C'$ coinciden ($o = o'$), es claro que, si $r < r'$ $C$ es interior a $C'$ y, obviamente, si $r = r'$ $C = C'$. Estas son las dos únicas situaciones posibles entre circunferencias concéntricas.

Nos proponemos ahora probar el resultado que anunciamos sobre las circunferencias secantes. Para ello tendremos que demostrar algunos lemas.

Recordemos que, dada una recta $A$, la proyección ortogonal sobre $A$ de un punto $p$ es el punto de corte entre $A$ y la perpendicular a ésta que pasa por $p$.

**Lema 1.** *Para cada $c$ en la semicircunferencia $S$, sea $P(c)$ la proyección ortogonal de $c$ sobre $\overleftrightarrow{oo'}$. Entonces*

$$P : S \to \overline{ab}$$

*es una función biyectiva.*

**Demostación.** Sean $c \in S$, $c_o = P(c)$ y veamos que $c_o \in \overline{ab}$.

Si $c_o = o$ es obvio. Si $c_o \neq o$, el triángulo $\Delta c\, c_o o$ es rectángulo de hipotenusa $\overline{oc}$, luego $d(c_o, o) < d(c, o) = r$, lo que implica que $c_o \in \overline{ab}$.

Ahora, si $R$ es una recta perpendicular a $\overline{ab}$, corta a $S$ en un único punto. En efecto, si $R$ pasa por $a$ (respectivamente por $b$), es tangente a $C$ y el punto de corte es $a$ (respectivamente $b$). Por otro lado, si $R$ corta a $\overline{ab}$ en un punto $q$ distinto de los extremos, como $q$ es punto interior a $C$, $R$ corta a $C$ en dos puntos que están situados en semiplanos opuestos respecto de $\overleftrightarrow{oo'}$, esto prueba la afirmación.

Así, dado $c' \in \overline{ab}$, si $c \in S$ es el punto de corte de $S$ con la perpendicular a $\overline{ab}$ que pasa por $c'$, $P(c) = c'$ y por lo tanto $P$ es suryectiva.

Si $p, q \in S$ y $P(p) = P(q) = c_o$ entonces $p = q$, de lo contrario las rectas $\overleftrightarrow{c_o p}$ y $\overleftrightarrow{c_o q}$ serían dos perpendiculares a $\overline{ab}$ que pasan por $c_o$. Luego $P$ es inyectiva, lo que concluye la prueba del Lema.□

**Lema 2.** *Sean $p, q \in S$, $p_o = P(p)$ y $q_o = P(q)$. Entonces $d(p, o') < d(q, o')$ si y sólo si $q_o < p_o$.*

**Demostración.** Sean $p, q \in S$, si $p = b$ ó $q = a$, la equivalencia es claramente válida pues, $\forall c \in S$, $c \neq a$ y $c \neq b$,

$$d(b, o') < d(c, o') < d(a, o') \text{ y } a < P(c) < b$$

Supongamos ahora que $p$ y $q$ no son ninguno de los extremos de $\overline{ab}$.

Observemos primero los siguientes hechos.

a) Los triángulos $\Delta poo'$ y $\Delta qoo'$, tienen el lado $\overline{oo'}$ en común y $\overline{op} \equiv \overline{oq}$ pues $d(p, o) = d(q, o) = r$. Luego, por un resultado conocido sobre triángulos, $d(p, o') < d(q, o')$ si y sólo si $\widehat{poo'} < \widehat{qoo'}$.

b) Los triángulos rectángulos $\Delta op_o p$ y $\Delta oq_o q$, tienen las hipotenusas congruentes ($\overline{op} \equiv \overline{oq}$), por lo que es fácil ver que $\widehat{pop_o} < \widehat{qoq_o}$ si y sólo si $|\overline{oq_o}| < |\overline{op_o}|$ (ver fig. 6.).

Por lo establecido en a), probar el Lema es equivalente a demostrar que

$$\widehat{poo'} < \widehat{qoo'} \text{ si y sólo si } q_o < p_o$$

Veamos las distintas situaciones posibles.

i) Si $o < p_o$ y $o < q_o$, entonces $\widehat{poo'} = \widehat{pop_o}$ y $\widehat{qoo'} = \widehat{qoq_o}$.

Luego por b), $\widehat{pop_o} < \widehat{qoq_o} \Leftrightarrow |\overline{oq_o}| < |\overline{op_o}| \Leftrightarrow q_o < p_o$

ii) Si $p_o < o$ y $q_o < o$, entonces $\widehat{pop_o}$ y $\widehat{qoq_o}$ son suplementarios de $\widehat{poo'}$ y $\widehat{qoo'}$ respectivamente.

Por lo tanto $\widehat{poo'} < \widehat{qoo'} \Leftrightarrow \widehat{qoq_o} < \widehat{pop_o} \Leftrightarrow |\overline{op_o}| < |\overline{oq_o}| \Leftrightarrow q_o < p_o$.

iii) Si $p_o = o$, es decir $\widehat{poo'}$ es recto, $\widehat{poo'} < \widehat{qoo'} \Leftrightarrow \widehat{qoo'}$ es obtuso $\Leftrightarrow q_o < o = p_o$.

iv) Si $q_o = o$, o sea $\widehat{qoo'}$ es recto, $\widehat{poo'} < \widehat{qoo'} \Leftrightarrow \widehat{poo'}$ es agudo $\Leftrightarrow q_o = o < p_o$.

v) Si $q_o < o < p_o$ es obvio, mientras que el caso $p_o < o < q_o$ no se puede dar. □

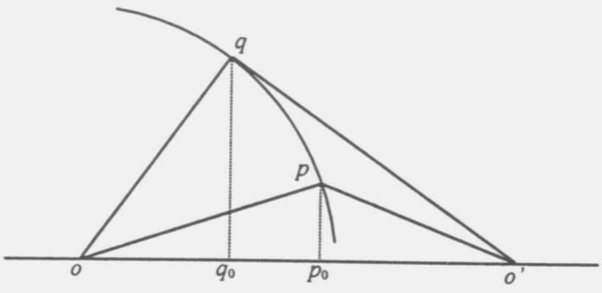


fig. 6

Como consecuencia directa del Lema, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario.** *Con la notación del Lema 2, se verifica:*

*a) Si $p$ interior a $C'$ y $p_o < q_o$ entonces $q$ es interior a $C'$.*

*b) Si $q$ es exterior a $C'$ y $p_o < q_o$, entonces $p$ es exterior a $C'$.*

**Lema 3.** *Supongamos que $C$ y $C'$ son secantes.*

*i) Si $p \in S$ es interior a $C'$, entonces existe $p' \in S$ interior a $C'$ tal que $d(p, o') < d(p', o')$.*

*ii) Si $q \in S$ es exterior a $C'$, entonces existe $q' \in S$ exterior a $C'$ y tal que $d(q', o') < d(q, o')$.*

**Demostración.** i) Sea $p \in S$ interior a $C'$, entonces $\varepsilon = r' - d(p, o') > 0$. Llamemos $R$ a la recta tangente a $C$ en $p$, sabemos que $R$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{op}$.

Sea $p'' \in R$ tal que $d(p, p'') = \varepsilon$ y

a) si $p = b$, $p''$ esté en el semiplano de borde $\overleftrightarrow{oo'}$ que contiene a $S$,

b) si $p \notin \overleftrightarrow{oo'}$, $p''$ esté en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{op}$ al cual no pertenece $o'$ (ver fig. 7).

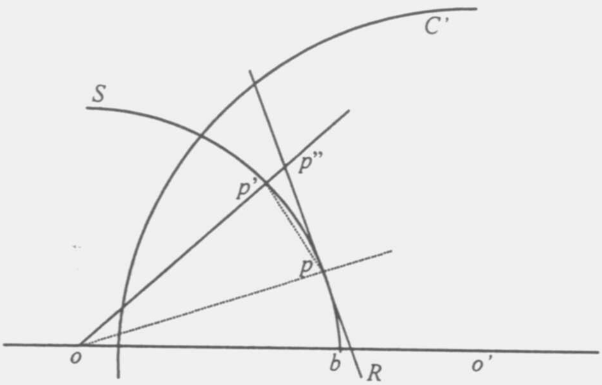


fig. 7

El triángulo $\Delta opp''$ es rectángulo y su hipotenusa es $\overline{op}''$, por lo tanto $d(o, p'') > d(o, p) = r$. Esto nos permite tomar $p' \in \overline{op}'' \bigcap S$. Verifiquemos que este punto $p'$ es el que buscamos.

El triángulo $\Delta opp'$ es isósceles, por lo que su ángulo de vértice $p'$ es agudo. Luego en el $\Delta pp'p''$ el ángulo $\widehat{pp'p''}$ es obtuso, por ser suplementario del anterior, entonces $|\overline{pp}'| < |\overline{pp}''|$. Por lo tanto

$$d(p', o') \leq d(p', p) + d(p, o') < d(p'', p) + d(p, o') = \varepsilon + d(p, o') = r'$$

es decir $p' \in S$ y es interior a $C'$.

Para ver que $d(p,o') < d(p',o')$, supongamos primero que $p \in \overleftrightarrow{oo}'$, es decir $p = b$. Si $b = o'$ es obvio, si no tomemos $r'' = d(b,o')$ y $C'' = C(o',r'')$. Entonces, según $b \in \overline{oo'}$ o bien $o' \in \overline{ob}$, $C$ y $C''$ son tangentes exteriores o $C''$ es tangente interior a $C$ respectivamente. En efecto, en el primer caso $r + r'' = d$ y estamos en las hipótesis del inciso ii) del Teorema 1, mientras que en el segundo caso $r - r'' = d$ y se cumple iii b) de dicho Teorema. Por lo tanto, como $p$ es el punto de intersección de $C$ con $C''$y todo otro punto de $C$ es exterior a $C''$, en particular $p'$, se sigue que

$$d(p,o') = r'' < d(p',o')$$

Ahora, si $p \notin \overleftrightarrow{oo}'$, debido a la elección de $p''$ (en el semiplano respecto de $\overleftrightarrow{op}$ opuesto al que contiene a $o'$), la semirrecta $\overrightarrow{op}$ es interior al ángulo $\widehat{p'oo'}$. Luego, $\widehat{poo'} < \widehat{p'oo'}$ y esto implica que $d(p,o') < d(p',o')$ por lo observado en a) de la demostración del Lema 2.

Para probar ii) se procede en forma análoga a i), reemplazando $p$ por $q$ y, en el caso que $q$ no esté sobre la recta $\overleftrightarrow{oo}'$ $(q \neq a)$, se toma $q''$ en el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{oq}$ al cual pertenece $o'$ y tal que $d(q,q'') = \varepsilon$. $\square$

Estamos ahora en condiciones de encarar el teorema sobre circunferencias secantes.

**Teorema 2.** *$C$ y $C'$ son secantes si y sólo si se intersecan exactamente en dos puntos.*

**Demostración**: Sea $\rho$ el sistema de abscisas sobre la recta $\overleftrightarrow{oo}'$ asociado al vector $(o,o')$. Entonces, por el Lema 1 y las propiedades de $\rho$, $\rho \circ P$ es una biyección de la semicircunferencia $S$ sobre el intervalo real $[\rho(a), \rho(b)]$.

Sea

$$E = \{\rho(P(q))/q \in S \text{ y } q \text{ es exterior a } C'\}$$

Por lo que vimos, $\rho(a) \in E$, entonces $E$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente por $\rho(b)$, luego tiene supremo $s$ con $s \in [\rho(a), \rho(b)]$

Como $\rho \circ P$ es biyectiva, existe $c \in S$ tal que $\rho(P(c)) = s$. Veamos que $c$ no puede ser interior ni exterior a $C'$, es decir $c \in S \bigcap C'$.

Supongamos que $c$ es exterior a $C'$. Por Lema 3 inc ii), existe $c' \in S$ exterior a $C'$ tal que $d(c', o') < d(c, o')$ entonces,por Lema 2, $P(c) < P(c')$. Como $\rho$ preserva el orden, $s = \rho(P(c)) < \rho(P(c'))$, que es absurdo pues $\rho(P(c')) \in E$ y $s$ es el supremo de $E$.

Por otro lado, si $c$ es interior a $C'$, nuevamente por el Lema 3, existe $c' \in S$ interior a $C'$ con la propiedad que $d(c, o') < d(c', o')$. El lema 2 nos dice entonces que $\rho(P(c')) < \rho(P(c)) = s$ y, por definición de supremo, esto implica que existe $q \in S$ exterior a $C'$ y tal que

$$\rho(P(c')) < \rho(P(q)) < s$$

Como $\rho$ preserva el orden $P(c') < P(q)$, por el Corolario del Lema 2 inciso b), $c'$ es exterior a $C'$, que es absurdo ya que $c'$ es interior a $C'$.

Por lo tanto, efectivamente $c \in S \bigcap C' \subseteq C \bigcap C'$ y además $c \notin \overleftrightarrow{oo'}$.

Puesto que la simetría axial respecto de la recta $\overleftrightarrow{oo'}$ deja invariantes tanto a $C$ como a $C'$, el simétrico de $c$ respecto de dicha recta es otro punto de corte de las circunferencias.

También podemos probar la existencia de un segundo punto de corte reemplazando, en el desarrollo anterior, la semicircunferencia $S$ por su opuesta.

Finalmente, no puede haber más de dos puntos en la intersección, pues tres puntos de una circunferencia la determinan y por lo tanto $C$ sería igual a $C'$.

Recíprocamente, si dos circunferencias se cortan en dos puntos, a partir de la clasificación dada en el Teorema 1, éstas no pueden ser más que secantes. $\square$

**Aplicación.** El Teorema 2 nos permite dar una justificación teórica a construcciones clásicas con regla y compás, como ejemplificamos a continuación.

1) Dado un segmento $\overline{ab}$, queremos construir su mediatriz. Sea $r > \frac{1}{2}|\overline{ab}|$ y tracemos dos circunferencias $C$ y $C'$ de radio $r$ y centro en $a$ y $b$ respectivamente.

Por iii c) del Teorema 1, estas circunferencias son secantes pues,

$$0 = r - r < d = |\overline{ab}| < r + r$$

Por el Teorema 2, $C$ y $C'$ se cortan en dos puntos $p$ y $q$ que, obviamente, equidistan de $a$ y $b$. Por otra parte, sabemos que los puntos de la mediatriz de un segmento son los que equidistan de sus extremos. Luego, $a$ y $b$ pertenecen a la mediatriz $M$ de $\overline{ab}$ y $M = \overleftrightarrow{pq}$ (fig. 8).

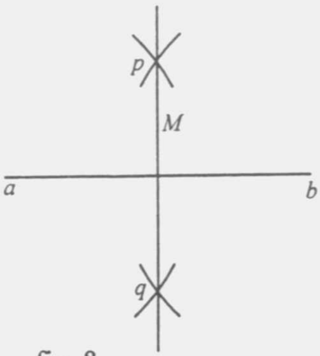

fig. 8

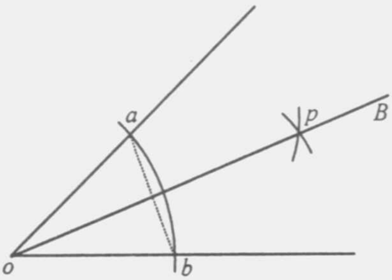

fig. 9

El procedimiento anterior se puede utilizar para construir la bisectriz de un ángulo. Esta semirrecta está contenida en la mediatriz de un segmento $\overline{ab}$, donde $a$ pertenece a un lado del ángulo, $b$ al otro y ambos están a igual distancia del vértice. Si trazamos una circunferencia con centro en el vértice, los cortes con los lados nos dan los puntos $a$ y $b$ que necesitamos (fig. 9).

2) En un triángulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

Ahora, si tomamos números reales positivos $x, y$ y $z$, tales que

$$x < y + z, \qquad y < x + z \qquad \text{y} \qquad z < x + y$$

¿podremos construir un triángulo cuyos lados midan $x, y$ y $z$ respectivamente?

La respuesta es afirmativa. Tomemos un segmento $\overline{ab}$ de longitud $x$ y dibujemos las circunferencias $C = C(a, y)$ y $C' = C(b, z)$.

Por el Teorema 1 inciso iii c), $C$ y $C'$ son secantes. En efecto, la distancia entre los centros es $x$ y, si suponemos que $y \leq z$, por la hipótesis se verifica

$$z - y < x < y + z$$

Sea $c$ un punto de corte de $C$ con $C'$ (vimos que no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{ab}$), entonces el triángulo $\Delta abc$ satisface que $|\overline{ab}| = x$, $|\overline{ac}| = y$ y $|\overline{bc}| = z$ (fig. 10).

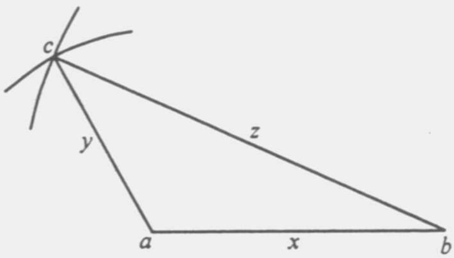


fig. 10

3) Dada una circunferencia $C = C(o, r)$ y un punto $p$ exterior a $C$, nos preguntamos si existirán rectas tangentes a $C$ que pasen por $p$ y cuántas.

Si existe una recta tangente a $C$ que pasa por $p$, el punto de tangencia $q$ no está en $\overleftrightarrow{op}$ y el ángulo $\widehat{oqp}$ es recto. Sean $o'$ el punto medio de $\overline{op}$ y $C' = C(o', r')$ con $r' = |\overline{oo'}|$. Entonces, en el triángulo rectángulo $\Delta oqp$, $d(q, o') = d(o, o') = r'$, es decir $q \in C \bigcap C'$.

Recíprocamente, si $q \in C \bigcap C'$ y $q \notin \overleftrightarrow{op} = \overleftrightarrow{oo'}$, por ser $\overline{op}$ un diámetro de $C'$, el ángulo $\widehat{oqp}$ es recto y por lo tanto $\overleftrightarrow{pq}$ es tangente a $C$ en $q$.

Resumiendo, hemos probado que existen rectas tangentes a $C$ que pasan por $p$ si y sólo si $C$ y $C'$ son secantes y que los puntos de tangencia son los puntos de corte de las circunferencias

Verifiquemos ahora que $C$ y $C'$ son efectivamente secantes, usando el Teorema 1. En este caso, $d = r'$ y $2r' > r$, entonces $d < r + r'$ y

a) si $r \leq r'$, entonces $r' - r < r' = d$,

b) si $r' \leq r$, entonces $r - r' < \frac{r}{2} < r' = d$.

Por lo tanto existen $q$ y $q'$ en $C \bigcap C'$ tales que las rectas $\overleftrightarrow{pq}$ y $\overleftrightarrow{pq}'$ son las únicas tangentes a $C$ que pasan por $p$ (fig. 11).

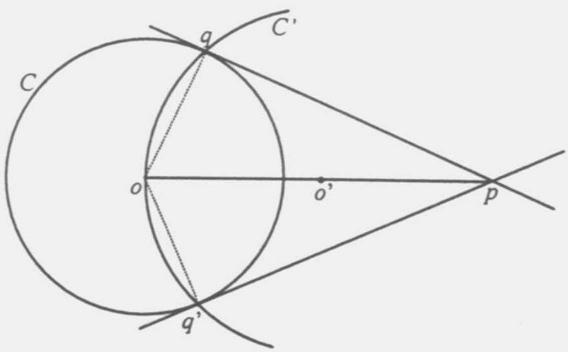


fig. 11

## Bibliografía


PUIG ADAM, PEDRO. *Curso de Geometría Métrica.* Editorial Euler, Madrid 1986.

TIRAO, JUAN A. *El Plano.* Editorial Docencia. Bs. As. 1979.



FaMAF. Universidad Nacional de Córdoba. Ciudad Universitaria.
(5000) Córdoba. E-mail: dallago@mate.uncor.edu