

Problemas y Soluciones

Coordinador: Leandro R. Cagliero

Invitamos a los lectores a proponer nuevos problemas para compartir y a enviar soluciones. Los problemas propuestos deben ser acompañados de una solución y de cualquier comentario que crean apropiado.

Los problemas y soluciones pueden ser enviados por correo a la dirección de la REM o preferentemente por correo electrónico a revm@mate.uncor.edu en un archivo de algún procesador de textos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

División de un círculo por la mitad

Problema 1. Norberto tiene un campo circular de 100m de radio con alambrado en el perímetro. Él quiere dedicar exactamente la mitad de la superficie de su campo al pastoreo de una cabrita y para ello piensa atar la cabrita con una sogá a uno de los postes del alambrado perimetral. ¿De qué longitud debe ser la sogá?

Producto de matrices

Problema 2. Sean A y B dos matrices cuadradas de $n \times n$ tales que $ABAB = 0$. ¿Es cierto que si $n = 2$ entonces $BABA = 0$? ¿Es cierto que si $n = 3$ entonces $BABA = 0$?

SOLUCIONES ENVIADAS

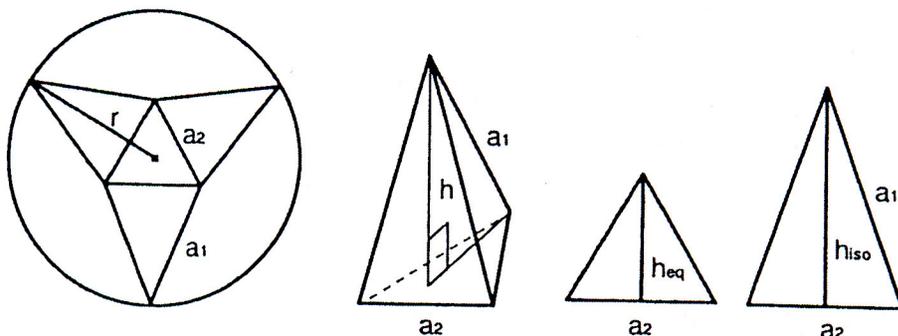
Sobre el máximo de un volumen

Problema 1, Vol.19 N° 3. Se tiene una pirámide regular, cuya base es un triángulo equilátero, y las caras laterales, triángulos isósceles, todos iguales. Rebatidas éstas sobre la base, haciéndolas girar sobre el lado común con ella, se forma una estrella de tres puntas.

Se inscribe la estrella en un círculo de radio r y se pide determinar la longitud de las aristas en función de r , cumpliendo la condición de que el volumen de la pirámide sea máximo.

Solución por la Lic. María Isabel Viggiani Rocha, isabelviggiani@yahoo.com.ar.
Sabemos que el volumen de la pirámide es

$$\text{Vol}_{\text{Pir}} = \frac{\text{Sup.Base} \times h}{3}.$$



Si a_2 es el lado del triángulo equilátero y a_1 el otro lado del triángulo isósceles tenemos que la altura del triángulo equilátero es

$$h_{\text{eq}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_2$$

y por lo tanto la altura de la pirámide es

$$h_{\text{Pir}} = \sqrt{a_1^2 - \left(\frac{2}{3}h_{\text{eq}}\right)^2} = \sqrt{a_1^2 - \frac{a_2^2}{3}}.$$

Dado que $\text{Sup.Base} = \frac{a_2 \times h_{\text{eq}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a_2^2$, obtenemos

$$\text{Vol}_{\text{Pir}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a_2^2 \times \sqrt{a_1^2 - \frac{a_2^2}{3}}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} a_2^2 \sqrt{a_1^2 - \frac{a_2^2}{3}}.$$

Por otro lado el radio de la circunferencia es $r = \frac{1}{3}h_{\text{eq}} + h_{\text{iso}}$ donde la altura del triángulo isósceles es $h_{\text{iso}} = \sqrt{a_1^2 - \frac{a_2^2}{4}}$. Por lo tanto

$$r = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 + \sqrt{a_1^2 - \frac{a_2^2}{4}}.$$

Despejamos a_1^2 y queda

$$a_1^2 = \left(r - \frac{\sqrt{3}}{6} a_2\right)^2 + \frac{a_2^2}{4} = r^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} r a_2 + \frac{a_2^2}{3}$$

y por lo tanto

$$\text{Vol}_{\text{Pir}} = \frac{\sqrt{3}}{12} a_2^2 \sqrt{r^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} r a_2 + \frac{a_2^2}{3} - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12} a_2^2 \sqrt{r \left(r - \frac{\sqrt{3}}{3} a_2 \right)}.$$

Consideraremos ahora a $\text{Vol}_{\text{Pir}} = \text{Vol}_{\text{Pir}}(a_2)$ como función de a_2 , con dominio el intervalo $(0, \sqrt{3}r)$ y aplicaremos la teoría de extremos relativos.

$$\text{Vol}'_{\text{Pir}}(a_2) = \frac{\sqrt{3}}{24} a_2 \frac{4r^2 - \frac{5\sqrt{3}}{3} r a_2}{\sqrt{r^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} r a_2}}$$

con número crítico $a_2 = \frac{12}{5\sqrt{3}} r < \sqrt{3}r$.

En el intervalo $\left(0, \frac{12}{5\sqrt{3}} r\right)$ tenemos $\text{Vol}'_{\text{Pir}} > 0$, y la función Vol_{Pir} es creciente; en el intervalo $\left(\frac{12}{5\sqrt{3}} r, \sqrt{3}r\right)$ tenemos $\text{Vol}'_{\text{Pir}} < 0$, y la función Vol_{Pir} es decreciente. Por lo tanto

$$\text{Vol}_{\text{Pir}}\left(\frac{12}{5\sqrt{3}} r\right) = \frac{4}{25} \sqrt{\frac{3}{5}} r$$

es un máximo relativo. Como es un único extremo relativo, entonces este extremo es absoluto. Los valores de los lados la pirámide con las características pedidas son

$$a_1 = \frac{\sqrt{21}}{5} r \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{12}{5\sqrt{3}} r.$$

Un número de cinco cifras con una propiedad particular

Problema 4, Vol.19 N° 3. Encontrar un número de cinco cifras diferentes que sea igual a la suma de todos los de tres guarismos que se puedan formar con dichas cinco cifras, coordinándolas sin repetición de todas las maneras posibles.

Solución por la Lic. María Isabel Viggiani Rocha, isabelviggiani@yahoo.com.ar. Sea $N = a10^4 + b10^3 + c10^2 + d10 + e$ el número buscado. Por hipótesis a, b, c, d, e son diferentes entre sí. Con estos 5 dígitos se pueden formar 60 números de 3 cifras y de estos 60 números, hay 12 que empiezan con a , 12 con b , 12 con c , 12 con d y 12 con e . Los 12 con a son:

$$abc, abd, abe, acb, acd, ace, adb, adc, ade, aeb, aec, aed,$$

y si se los suma se obtiene

$$12a \times 100 + (3b + 3c + 3d + 3e) \times 10 + 3b + 3c + 3d + 3e = 1200a + 33(b + c + d + e).$$

Análogamente, la suma de los 12 que empiezan con b es $1200b + 33(a + c + d + e)$, la suma de los 12 que empiezan con c es $1200c + 33(a + b + d + e)$, etc., y por lo tanto la suma total S es

$$S = (1200 + 132)(a + b + c + d + e) = 1332(a + b + c + d + e).$$

El problema pide $S = N$, es decir

$$1332(a + b + c + d + e) = (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e).$$

Por lo tanto $1331(a + b + c + d + e) = 9(1111a + 111b + 11c + d)$ y como 1331 y 9 son coprimos obtenemos que $a + b + c + d + e$ es múltiplo de 9 y $1111a + 111b + 11c + d$ es múltiplo de 1331.

La menor suma de 5 cifras distintas es $10 = 1 + 2 + 3 + 4 + 0$ y la mayor es $35 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5$. Por lo tanto hay sólo dos posibilidades

$$a + b + c + d + e = 18 \text{ y } 1111a + 111b + 11c + d = 2 \times 1331 = 2662, \text{ ó}$$

$$a + b + c + d + e = 27 \text{ y } 1111a + 111b + 11c + d = 3 \times 1331 = 3993.$$

Las igualdades de la derecha implican que a sólo puede valer 2 ó 3.

Comenzamos a estudiar $a = 3$, es decir $a + b + c + d + e = 27$. Las posibilidades para b, c, d, e son

$$0, 7, 8, 9; \quad 1, 6, 8, 9; \quad 2, 5, 8, 9; \quad 2, 6, 7, 9; \quad 4, 5, 7, 8 \quad \text{y} \quad 4, 5, 6, 9;$$

con sus posibles permutaciones. Trato de ir formando los números y veo que $a = 3, b = 5, c = 9, d = 6$ y $e = 4$ funciona, es decir que $N = 35964$. Ya encontrado un número con las características requeridas, no continúo analizando las restantes posibilidades.

Nota de los Editores. La autora obtiene la única solución del problema pues en el caso en que $1111a + 111b + 11c + d = 3993$ esta igualdad implica que a debe ser 3 y queda $111b + 11c + d = 660$, lo que implica que $b = 5$ y queda $11c + d = 105$ y por lo tanto $c = 9$ y $d = 6$. Finalmente, dado que $a + b + c + d + e = 27$, obtenemos $e = 4$. En el caso en que $1111a + 111b + 11c + d = 2662$, esta igualdad implica que $a = 2$ y $111b + 11c + d = 440$; luego $b = 3$ y $11c + d = 107$ y finalmente $c = 9$ y $d = 8$ lo cual contradice que $a + b + c + d + e = 18$.

Determinación de un número natural de seis cifras.

Problema 5, Vol.19 N° 3. Encontrar un número:

$$N = abcdef$$

que en nuestro sistema de numeración decimal tiene seis cifras (f. unidades; e, decenas; d, centenas, etc.) y que multiplicado por 2,3,4,5 y 6 produce, en algún orden, los cinco números:

$$bcdefa, \quad cdefab, \quad defabc, \quad efabcd \text{ y } fabcde.$$

Solución por la Lic. María Isabel Viggiani Rocha, isabelviggiani@yahoo.com.ar. El resultado de este ejercicio no debe sorprendernos pues es un famoso número cíclico, sobre el cual existen numerosos artículos entre ellos: Cap. 10 de *Circo matemático*, Martín Gardner, Edit Alianza, y *El hombre que calculaba*, Malba Tahan, pág. 132.

Sea $N = a10^5 + b10^4 + c10^3 + d10^2 + e10 + f$ con $a, b, c, d, e, f \neq 0$. La suma de los 6 números $abcdef, bcdefa, cdefab, defabc, efabcd, fabcde$ es

$$(a+b+c+d+e+f)(10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 111111(a+b+c+d+e+f)$$

que de acuerdo al enunciado del problema es igual a

$$N + 2N + 3N + 4N + 5N + 6N = 21N$$

y por lo tanto $N = 5291(a + b + c + d + e + f)$. Dado que $111111 \leq N$ y $6N \leq 999999$ obtenemos $21 \leq a + b + c + d + e + f \leq 31$.

Si $a + b + c + d + e + f = 21$ entonces $N = 111111$ pero $2N$ tiene otros dígitos y no puede ser. Si $a + b + c + d + e + f = 22$, entonces $N = 116402$ tiene el 0 y tampoco sirve. Si $a + b + c + d + e + f = 23$, entonces $N = 121693$ y $2N = 243386$ no respeta lo estipulado. Analizando todos los casos obtenemos que $a + b + c + d + e + f = 27$ da $N = 142857$ que es el número buscado, pues $2N = 285714$, $3N = 428571$, $4N = 571428$, $5N = 714285$ y $6N = 857142$.