Desarrollo del Pensamiento geométrico en el futuro Profesor de Matemática

Norma R. Cerizola – Ruth L. Martínez – María A. Miní

Resumen

Hasta hace no más de tres décadas las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, soslayaban la naturaleza de la misma. Actualmente se han realizado abundantes y profundos estudios sobre distintos fenómenos que emergen en los procesos involucrados en su aprendizaje y que están relacionados con características propias de esta ciencia.
Por ello, la comprensión de su naturaleza, su creación y funcionamiento, se constituyen hoy en conocimientos imposibles de ser ignorados por aquellos que en un mañana próximo deberán enseñarla.
Consideramos que un futuro profesor de Matemática, básicamente debe alcanzar una formación matemática sólida. Pero ésta no debe limitarse sólo a la comprensión de teorías matemáticas ya formalizadas, sino que debe complementarse con la de otros aspectos que lleven a una visión más amplia y rica de esta ciencia, tales como las razones del surgimiento de las teorías, su construcción histórica y los problemas que éstas resuelven.

Nuestra labor como formadoras de futuros profesores de Matemática en la Universidad Nacional de San Luis, nos ha llevado a realizar algunas experiencias sobre la enseñanza de la Geometría Sintética, articulando los aspectos señalados anteriormente.

Considerando el Problema de Apolonio como "hilo conductor histórico" y, centrándonos en su solución por medio de la transformación geométrica llamada "Inversión", este trabajo tiene como objetivo proponer una modalidad de abordaje para la enseñanza de la Geometría.

También proponemos varios problemas que se solucionan elegantemente mediante esta transformación.

Introducción

La formación de futuros Profesores de Matemática se constituye en la actualidad en un desafío, especialmente si tenemos en cuenta los requerimientos sobre cómo deberá formar matemáticamente a sus alumnos. De acuerdo a recomendaciones de matemáticos como Miguel de Guzmán, "*la educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por* *ósmosis, en la forma peculiar de ver las cosas características de la escuela en que se entronca”* [1]

Pero, para que pueda lograr en sus alumnos esta “inculturación” matemática, el futuro profesor debe ser formado de este modo, pues, como expresara Luis A. Santaló, los profesores tienden a reproducir las prácticas docentes que mamaron durante su carrera.

Esas formas de “inmersión” en el pensamiento matemático no se consiguen solamente a través de la comprensión de teorías matemáticas formales, sino tejiendo una trama donde se entrecruza este aspecto con otros relacionados con la creación matemática como: la resolución de problemas, el estado de los conocimientos matemáticos en distintas épocas, la influencia de las corrientes filosóficas de la Matemática en el surgimiento de sus teorías, las razones de su surgimiento, sus posibilidades y sus límites en cuanto a los problemas que resuelven.

Teniendo en cuenta estas premisas, consideramos que una forma de organización del tratamiento de los temas de una determinada asignatura (o de un grupo de ellas) es a través de la utilización de “hilos conductores”, temas especialmente elegidos que se constituyan en “contextos adecuados” para un concepto o problema, que permita no sólo resolverlo, sino que, *“lleven a buscar un método que haga que esa solución parezca inevitable, que muestre qué es lo que realmente está pasando”* [11]

Todas las ramas de la Matemática ofrecen la posibilidad de elección de “hilos conductores”, sin embargo, en particular, una de ellas constituye una fuente inagotable de hermosos problemas, cuyas soluciones han resultado ser un desafío para la imaginación creadora de matemáticos de todos los tiempos: *La Geometría sintética.*

En concordancia con lo expresado, proponemos un modelo de organización de la enseñanza de la Geometría, basada en “hilos conductores” eligiendo en este caso el llamado *“Problema de Apolonio”* y su historia.

El tratamiento del mismo tiene como punto inicial, una incursión en el estado del conocimiento de la Geometría griega en distintas épocas, hasta llegar a la civilización helénica, ubicando temporal y espacialmente las contribuciones de Apolonio.

Con el planteo del *“Problema de Apolonio”*, procedemos a incursionar en la historia a fin de mostrar que el hecho de hallar una solución a este problema fue un reto para matemáticos de distintas épocas, hasta llegar a su solución utilizando la transformación geométrica llamada “Inversión”.

Luego abordamos y proponemos algunos temas con el objetivo de mostrar el poderoso instrumento que resulta la transformación de Inversión, tanto para resolver problemas- cuyas soluciones con otras herramientas matemáticas son muy engorrosas - como el logro de la solución de problemas no resueltos.

Miremos el tema de esta manera...

El punto de partida

Todos los pueblos han desarrollado en el transcurso de su historia, alguna forma de pensamiento matemático. Los fines han sido muy diversos, entre ellos podemos mencionar algunos como: satisfacer necesidades de la vida cotidiana, elaborar vaticinios, acercarse a la divinidad, guiar el pensamiento filosófico, comprender los fenómenos naturales...

Pero, cualquiera haya sido su punto de partida, la Matemática ha llegado hasta nuestros días a través de dos corrientes principales: el número y la forma. Su unión, a partir del siglo XVII permitió nutrir el caudal inagotable de la creación matemática, alcanzando hoy día logros asombrosos en ámbitos hasta hace poco insospechados.

La Matemática como ciencia, aparece en Grecia entre los siglos V y IV a.C. a partir de los conocimientos de dos civilizaciones milenarias: la babilónica y la egipcia. El contacto entre el Oriente y los griegos, comienza en los tiempos del imperio persa y termina poco después de las expediciones de Alejandro el Grande. A la matemática de la civilización egipcia, los griegos accedieron a través de sus cada vez más frecuentes viajes por el Mediterráneo, donde extendieron su comercio.

La Matemática fue sometida entonces a las discusiones de los filósofos griegos. Estos pensadores - entre los que encontramos a Pitágoras y a Platón- pronto comprendieron las grandes dificultades relativas a los conceptos de continuidad, movimiento e infinitud, así como el problema de medir magnitudes arbitrarias con unidades prefijadas (magnitudes inconmensurables). Fue probablemente este último, el que llevó a los griegos a ignorar el *"número"* priorizando la *"forma"*.

Es así como se abrieron camino a través de la geometría sintética. Sin embargo, la influencia de las concepciones de Platón, respecto a la imposición de considerar válidas aquellas construcciones geométricas utilizando solamente la *"regla no graduada"* y el *"compás fijo"* se erigió en un obstáculo para el desarrollo de la Geometría. El motor fue puesto nuevamente en marcha casi cuatro siglos después, en el período alejandrino, gracias a la audacia y la imaginación creadora de mentes brillantes, como veremos a continuación.

El "Hilo conductor, un "Hilo histórico..."

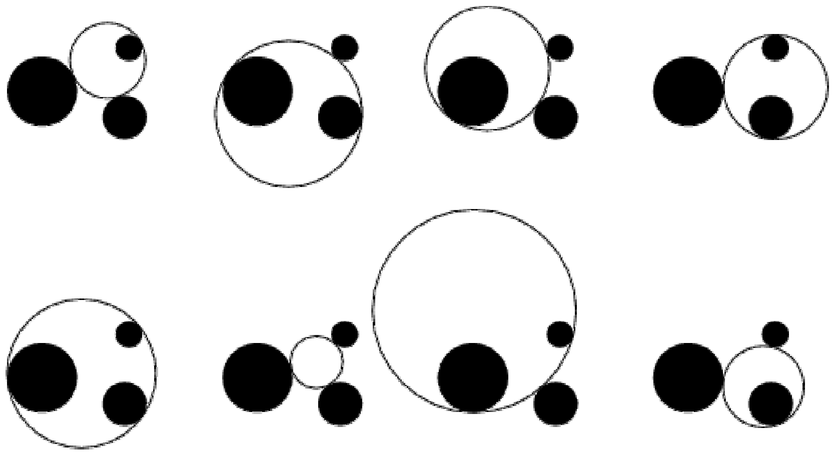
El Problema de Apolonio

El conocido actualmente como "Problema de Apolonio" consiste en lo siguiente:

“dados tres objetos matemáticos, como tres puntos, tres rectas o tres circunferencias, trazar una circunferencia que sea simultáneamente tangente a los tres elementos”.

Este problema tiene diez soluciones. Las dos más sencillas, donde los objetos son tres puntos o tres rectas, se encuentran utilizando conceptos de geometría elemental.

El problema de las tres circunferencias (exteriores entre sí), tiene en total ocho soluciones, como puede observarse en la figura:



En el año 332 a.C, Alejandro Magno fundó en Egipto la ciudad de Alejandría, este gran conquistador murió en el año 323 a.C sin haber podido terminar su construcción. La inestabilidad política que siguió a su muerte llevó a la división del Imperio alejandrino entre los generales de su ejército. Una de las partes fue Egipto, gobernada por Ptolomeo el que, siguiendo las ideas de Alejandro, convirtió a esta ciudad en el foco intelectual del Mediterráneo y en el máximo exponente de la cultura Helénica.

Su museo y su famosa biblioteca se constituyeron en el lugar de trabajo de más de cien sabios, entre los que se encontraban grandes Matemáticos como Euclides, Arquímedes, Apolonio, Eratóstenes, Ptolomeo, Pappus y Diofanto.

Allí escribió Euclides su monumental obra “*Elementos*” en la cual sistematizó la geometría siguiendo la más pura tradición platónica. Debido a ello, en esta obra, Euclides no trata sobre las mediciones de las longitudes de los segmentos, de las áreas y volúmenes, sino de sus relaciones. Adoptó también el método de razonamiento sintético, conocido hoy como axiomático-deductivo. Para la demostración de cualquier teorema, Euclides parte de una “afirmación válida a ciencia cierta”, la cual se apoya en última instancia en un sistema de condiciones iniciales. A partir de esta última, se desarrollan sucesivamente consecuencias que conducen a la afirmación buscada.

Arquímedes (¿287?, 212 a.C.) y Apolonio (¿260?, 200 a.C.), desobedecieron las recomendaciones de Platón relativas a la Geometría. Así Arquímedes utilizó recursos experimentales y conocimientos de la Física, creando el "método de las palancas" para obtener resultados matemáticos, los que luego demostró a través del método analítico, mientras que Apolonio, "el gran geómetra" desarrolló la teoría de las secciones cónicas, estudiando curvas como la elipse y la hipérbola las cuales no se pueden trazar con la regla y el compás griegos. En su tratado sobre las cónicas, hizo uso magistral del método sintético y del álgebra geométrica.

En esta época Apolonio plantea el problema que hoy lleva su nombre. El mismo, se incluye en su obra "*Tangencias*", cuyo original se perdiera y que conocemos hoy -aunque parcialmente- gracias a la obra de los comentaristas. Se desconoce si Apolonio resolvió el caso más general: trazar una circunferencia tangente a otras tres que no tienen entre sí puntos comunes.

También en los "*Elementos*" de Euclides, se plantea el Problema de Apolonio. Se resuelven los casos de tres puntos y tres rectas, pero no el más general.

Conocimientos perdidos y vueltos a recuperar

Con las sucesivas destrucciones de la biblioteca de Alejandría se perdieron muchos de los conocimientos del mundo antiguo, sin embargo los árabes -causantes de una de esas destrucciones - a la vez salvaron muchas obras que tradujeron del griego a su lengua.

Pocos siglos antes de estos sucesos, más precisamente en el año 415 de nuestra era, Europa comenzó a sumirse en la oscura noche de la Edad Media, época de un estancamiento casi total del desarrollo de nuevos conocimientos, en particular matemáticos. Sin embargo, en los monasterios la actividad no se apagó. Los copistas se dedicaron a reproducir varias obras griegas que llegaron a sus manos.

Con el Renacimiento, Europa despierta de un largo sueño y comienza a gestarse un hombre nuevo, ávido de conocimientos y con una cosmovisión distinta, al ensancharse las fronteras del mundo conocido con el descubrimiento de nuevas tierras.

Los hombres se reencuentran con los conocimientos del mundo antiguo gracias al legado de los musulmanes y de los copistas. Obras como los "*Elementos*" de Euclides y las "*Cónicas*" de Apolonio, son traducidas al latín.

Mentes brillantes comienzan a entender ese lenguaje matemático griego casi esotérico, recuperando de este modo esos saberes. Pero los conocimientos que necesitaban los hombres del renacimiento, no eran tan complejos y sutiles como los de los geómetras griegos, incluyendo las teorías de Apolonio, es así como se abandona su estudio y por lo tanto su desarrollo, apareciendo ramas matemáticas nuevas como el Álgebra, la Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal.

Nuevos instrumentos matemáticos para resolver viejos problemas.

Sin embargo el *"Problema de Apolonio"* estuvo vigente entre grandes matemáticos de distintas épocas, que hicieron uso de nuevas teorías para hallar su solución.

El álgebra sincopada, resultó ser un instrumento eficaz en manos de Viète (1540-1603) para resolverlo. Más aún lo fue la Geometría analítica de Descartes (1596-1650). Las ocho soluciones de este problema para el caso de tres circunferencias, se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones cuadráticas. Gergonne (1771-1859), en la primera mitad del siglo XIX, obtiene una de las soluciones más elegantes utilizando centros de homotecia, polos y centros radicales.

Es así como tres teorías distintas permitieron resolver totalmente el problema, pero con métodos diferentes a los de la Geometría Sintética.

La inversión, una transformación del plano con mucha imaginación.

La primera mitad del siglo XIX fue una época de controversias sobre los métodos de las distintas Geometrías. Aparecieron grandes geómetras que apostaron por el método de la Geometría sintética alegando que, el pensamiento de la Geometría analítica era básicamente un pensamiento algebraico.

Entre los defensores de la Geometría sintética encontramos a Jakob Steiner (1796-1863), conocido como "el más grande geómetra (puro) desde Apolonio" [12].

A él se le atribuye la invención de la transformación llamada "Inversión", que permite dar solución a un gran número de problemas de un modo elegante, entre los cuales está el Problema de Apolonio.

Por transformación, entendemos una ley que asigna a cada punto *P* del plano, otro punto *P´* del mismo, llamado imagen de *P* por la transformación.Por ejemplo, simetrías del plano respecto a una recta, rotaciones del plano alrededor de un punto fijo, etc.

La transformación ideada por Steiner, generaliza, en cierto modo, la simetría respecto a una recta, pues se trata de *inversión* de puntos respecto a una circunferencia; representa con cierta aproximación la relación entre el objeto y la imagen, en una reflexión sobre un espejo circular.

Así: *En un plano dado, sea w una circunferencia de centro O y radio k. Definimos como imagen de un punto P distinto de O, al punto P´ situado sobre la semirrecta OP, si verifica que* $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k^2$. *Al punto O se lo llama "centro de inversión", a k se lo denomina "potencia de la inversión" y a P´ el "inverso" de P.*

La inversión *intercambia el interior*[1] *(excepto O), con el exterior de la circunferencia* w *de centro O y radio k* (y viceversa). Tiene la particularidad de que, en el Plano Euclídeo el punto *O* no tiene imagen, por ello no es una transformación del plano en sí mismo. Notemos que los puntos de la circunferencia w son los puntos fijos de la transformación.

Si al plano euclídeo le agregamos el punto en el infinito: P_{∞}, el centro *O* tiene imagen, por lo tanto, la inversión es una transformación definida sobre la esfera $R^2 \cup P_{\infty}$.

Es fácil ver que toda recta que pasa por *O* se transforma en la misma recta; que una circunferencia concéntrica a w de radio *R*, se transforma en una circunferencia concéntrica de radio k^2/R. Sin embargo no es tan sencillo, pero tampoco complicado, demostrar que toda recta que no pasa por *O* se invierte en una circunferencia que pasa por *O*.

En cambio, demostraremos:

Teorema 1: *Cualquier circunferencia que no pasa por* O *se invierte en una circunferencia que no pasa por* O.

Demostración:

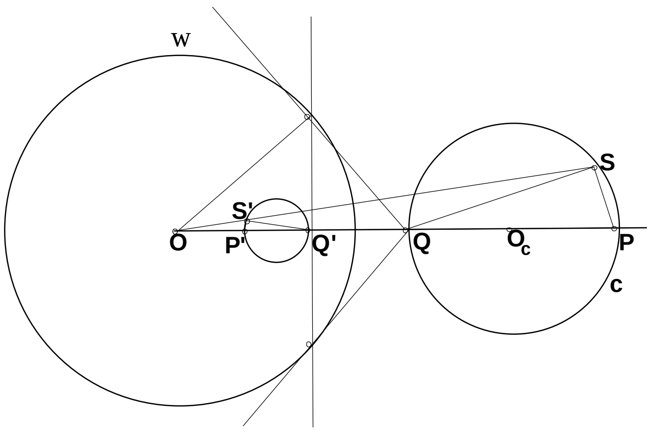


Fig. 1

Sea ω la circunferencia de inversión y *O* su centro, c una circunferencia que no pasa por *O* (ver Fig.1). Consideremos el diámetro *PQ*, tal que *O*,*P* y *Q*, están alineados, por lo tanto también están alineados *O*, *P*, *P´*, *Q*, *Q´*. Para cualquier punto *S* perteneciente a c, tenemos que el triángulo *QSP* es rectángulo y los triángulos *OSP* y *OS´P´* son

[1] Llamamos interior de una circunferencia de centro *O* y radio *k* al conjunto de puntos cuya distancia al centro es menor que *k*.

semejantes, como también lo son los triángulos OSQ y $OS'Q'$. En consecuencia los pares de ángulos, $OS'Q'$, OPS y $OS'Q'$, OQS son iguales. Como la suma de los ángulos $OS'P'$ y $SS'Q'$ es igual a un ángulo recto, se concluye que el ángulo $P'S'Q'$ es un ángulo recto y S' pertenece a la circunferencia que tiene como diámetro a $P'Q'$. Dado que S es un punto arbitrario de c, hemos demostrado que la inversa de la circunferencia de centro c y radio PQ es la circunferencia de radio $P'Q'$, que no pasa por O.

♦

Observación 1: En el plano proyectivo, una recta puede considerarse como una circunferencia de radio infinito, por ello podemos decir que la inversa de cualquier circunferencia es una circunferencia.

Observación 2: Un resultado sorprendente fue el obtenido por Mascheroni (1750-1800) en 1797:

"Todas las construcciones geométricas posibles mediante la regla y el compás pueden hacerse sólo con el compás".

Mediante la inversión se logra una demostración elegante de esta afirmación.

Daremos una idea de la demostración: toda recta se transforma en una circunferencia (eligiendo el centro de inversión no perteneciente a la recta), lo que falta es construir el *inverso de un punto P solamente usando el compás*, como mostramos en la Fig. 2.

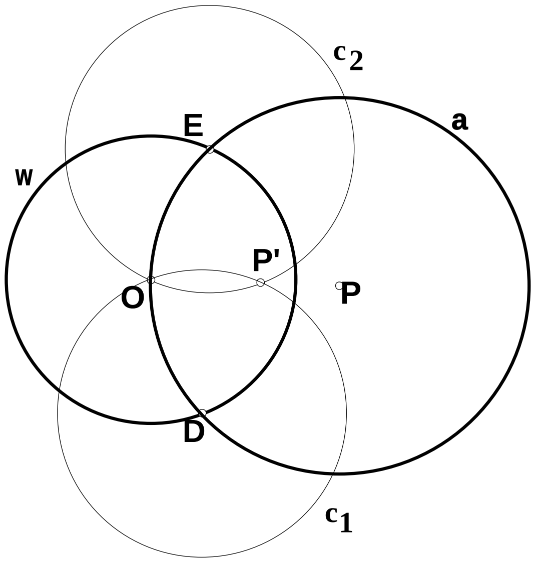


Fig. 2

La construcción se realiza en los siguientes pasos:

1. Construimos la circunferencia a con centro *P* y radio *OP*. *D* y *E* son los puntos de intersección de a con ω.
2. Construimos las circunferencias c_1 (con centro *D* y radio *OD*) y c_2 (con centro E y radio *OE*). La intersección de ambas circunferencias es el punto *P'*, el inverso de *P*.

Nota 1: La demostración completa está en el libro *¿Qué es la matemática?*, incluido en la bibliografía de este trabajo.[2]

Propiedades de las figuras que se conservan bajo la transformación de inversión.

En otras transformaciones, por ejemplo en la homotecia, hay propiedades de las figuras primitivas que se conservan, como *"la forma"*. *¿Qué propiedades conservan las imágenes de las figuras primitivas bajo la transformación de inversión?*

Evidentemente no es la forma, pues ya vimos que hay rectas que se transforman en circunferencias y viceversa, lo que se conserva es el ángulo entre dos rectas o entre dos curvas, como lo demostramos:

Teorema 2: *Dos curvas secantes se transforman por una inversión en otras dos curvas que se cortan bajo el mismo ángulo.*

Demostración:

Consideremos el caso de dos rectas m y n que se cortan en un punto *P* y no pasan por *O*, (ver Fig.3a), por medio de la inversión, éstas se transforman en dos circunferencias *m´* y *n´* que pasan por *O* y por *P´*. Las rectas tangentes a *m´* en *O* y en *P´* son paralelas a la recta *m* y las rectas tangentes a *n´* en O y en P' son paralelas a *n*. Por lo tanto, las circunferencias *m´* y *n´* forman el mismo ángulo que las curvas primitivas.

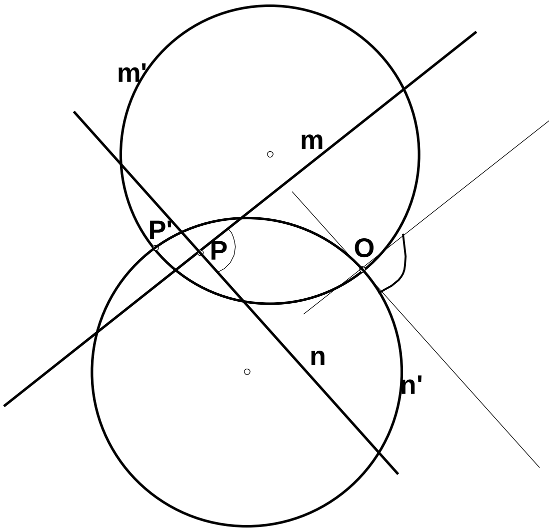


Fig. 3a

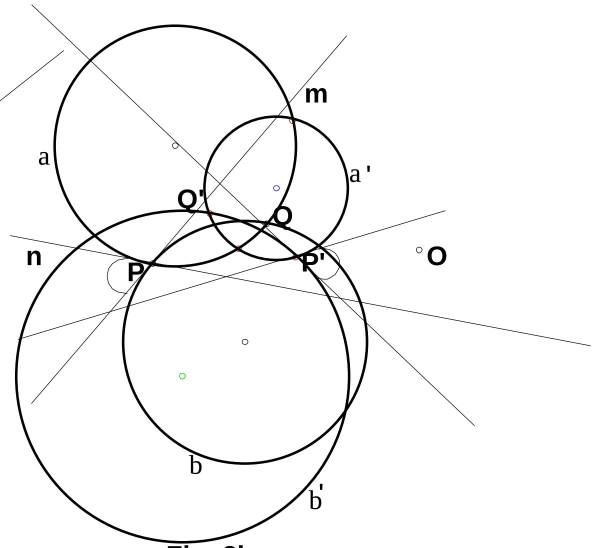


Fig. 3b

Sean ahora dos circunferencias *a* y *b* que se cortan en *P* y *Q*, (ver Fig. 3b), entonces sus inversas se cortan en *P´* y *Q¢*. Llamemos *m* y *n* a las rectas tangentes en *P* a *a* y *b*, respectivamente. El ángulo que forman estas dos rectas es el mismo que forman las circunferencias inversas *m*' y *n¢*. Las inversas *a*' y *m´* tienen la misma recta tangente por ser *m* tangente a *a* , en forma análoga *b*' y *n¢*. Por lo tanto *a*' y *b*' forman el mismo ángulo que *a* y *b*. ♦

Algunas cuestiones y problemas de construcción relacionados con la transformación de inversión

Una de estas cuestiones es:

¿Habrá una circunferencia α *que coincida con su inversa?*

Para responder, podríamos razonar así:

Si existe, debe ocurrir que *P* y su inverso *P´* pertenezcan a la misma circunferencia y a la semirrecta *OP*. En consecuencia afirmamos:

La circunferencia buscada tiene intersección no vacía con la circunferencia de inversión.

El centro de inversión O es exterior a la circunferencia a.

La respuesta a nuestra pregunta es afirmativa:

Solución:

Trazamos la tangente a a desde *O*. Llamamos *T* al punto de tangencia (ver Fig 4). Por potencia de un punto *O* respecto de una circunferencia tenemos que $\overline{OT}^2 = \overline{OP}.\overline{OP'}$ y por la definición de puntos inversos debe cumplirse $\overline{OP}.\overline{OP'} = k^2$, por lo tanto:

$$\overline{OT}^2 = k^2$$

En consecuencia, el punto *T* es un punto doble, es decir es un punto invariante, por lo que pertenece a la circunferencia de inversión, por lo tanto, la circunferencia de inversión y la circunferencia α se intersecan en el punto *T*. En este punto, el ángulo que

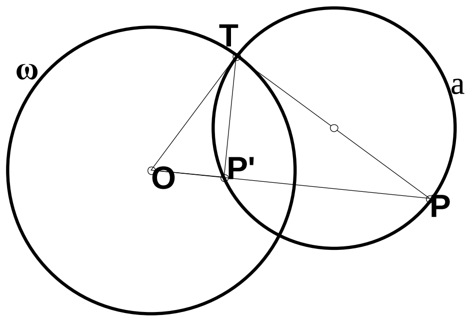


Fig. 4

forman las circunferencias es recto por lo que decimos que son ortogonales. La circunferencia a ortogonal a ω y es la que resuelve el problema.-

Otras cuestiones interesantes son:

1. *Las circunferencias ortogonales se invierten en circunferencias ortogonales.*

2. *Cualquier circunferencia c que pase por dos puntos distintos, inversos uno del otro en la circunferencia de inversión w, es su propia inversa y c es ortogonal a w.*

Problema 1: *Dada la circunferencia de inversión w y un punto P que no pertenezca a w , construir una circunferencia ortogonal a w que pase por P.*

Solución:

(a) Si P es exterior a *w*, una de las circunferencias que resuelve este problema es la que tiene como diámetro a *PT*, donde T es el punto de tangencia de la recta trazada desde *P*.

(b) Si *P* es interior a w, dados dos puntos cualesquiera de la circunferencia w, *A* y *B*, construimos una circunferencia ortogonal a w que pase por *A* y *P*, y otra, por *B* y *P*. Para ello construimos la mediatriz de *AP* y la recta tangente a w en A. La circunferencia que tiene como centro la intersección *Q* de ambas rectas y radio *QA* es una de las circunferencias solución. Análogamente para el punto *B*. La intersección de ambas circunferencias es el inverso de P .-

Por lo expuesto podemos concluir:

Dada una familia de circunferencias que pasan por O (centro de inversión) y un punto P del plano:

- *Se invierte el haz dado en un haz de rectas que pasan por P'.*
- *Una familia de circunferencias ortogonales a las dadas se invierte en circunferencias ortogonales al haz de rectas obtenidas en el ítem anterior. Estas circunferencias son concéntricas.*
- *Dadas dos circunferencias que no se cortan, se puede encontrar una inversión tal que sus transformadas sean circunferencias concéntricas.*
- *Una familia de circunferencias tangentes en un mismo punto P se puede invertir en un haz de rectas paralelas. Basta considerar como centro de inversión a P.*

Algunos problemas se resuelven fácilmente sin usar como instrumento a la inversión, pero sirven como actividad para adquirir las estrategias de esta transformación, por ejemplo el siguiente:

Problema 2: *Dada una circunferencia c y un punto P exterior a ella, construir:*

a) Una circunferencia tangente a c y que pase por P.

b) Una circunferencia ortogonal a c y que pase por P.

Los problemas 3 y 4 que planteamos a continuación, se resuelven fácilmente mediante inversión, lo importante es encontrar un centro adecuado, ya que el radio de la circunferencia de inversión afecta la ubicación de la figura:

Problema 3: *Dada una circunferencia w y dos puntos no inversos P y Q, construir la circunferencia que pasando por P y Q, es ortogonal a w.*

Problema 4: *Dado un punto P y dos circunferencias c_1 y c_2, que no pasan por P, trazar una circunferencia que pase por P y satisfaga la condición:*

a) Sea tangente a c_1 y c_2
b) Sea ortogonal a c_1 y c_2

El cuchillo del zapatero

Los griegos estudiaron propiedades de la figura limitada por los tres semicírculos *c*, c_1 y c_2 (ver Fig. 5 a) a la que llamaron *arbelos*, que significa *cuchillo del zapatero*. La denominaron así por que su forma se asemeja a la hoja de los cuchillos utilizados en la antigüedad por los trabajadores del cuero. Se cree que Arquímedes (287 al 212 A.C.) fue el primer matemático que estudió varias propiedades interesantes del *cuchillo del zapatero,* las que aparecen en su *Libro de los Lemas (Liber Assumptorum).*

Una propiedad notable del cuchillo del zapatero es:

El punto T pertenece al segmento PS y R pertenece al segmento QS. (ver Fig. 5b)

Solución:

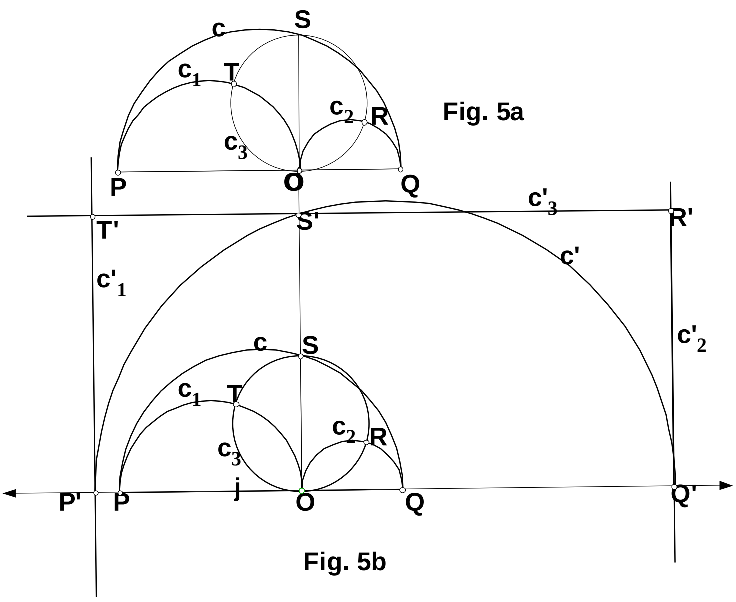


Fig. 5b

La Fig. 5b, nos muestra la inversa de la Fig. 5a. Elegimos *O* (punto de tangencia entre c_1 y c_2) como centro de inversión. Las circunferencias de diámetros *OP* y *OQ* se transforman en rectas perpendiculares a *P´Q´*, mientras que la circunferencia de diámetro *PQ* se transforma en la circunferencia con diámetro *P´Q´*.

Observamos que *P¢* y *Q¢* son puntos de tangencia, como lo son sus puntos correspondientes *P* y *Q*, así las rectas *P´Q´* y *Q¢R¢* son tangentes a la inversa de la circunferencia *c*.

La circunferencia c_3 se transforma en una recta paralela a *P¢Q′* que pasa por los puntos *T’* y *R’*, ya que c_3 corta a c_1 en *T* y a c_2 en *R*. Lo que resulta que *OP’T’S’* es un rectángulo, en consecuencia es inscriptible en una circunferencia *a*. Invertimos *a* y como pasa por *O*, su inversa es una recta que pasa por *P, T* y *S* , concluyendo entonces que estos tres puntos están alineados.

En forma análoga se demuestra la colinealidad de *Q*, *R* y *S*.-

Un problema de Pappus.

Pappus alrededor del año 320 escribió acerca de un problema particular: construir círculos tangentes a los dos semicírculos más grandes y sucesivamente uno de otro, como lo muestra la Fig.6, el que podemos enunciar así:

Dados tres círculos c, c_1 *y* c_2*, como muestra la* Fig. 6*, construir círculos que sean tangentes a los dos semicírculos de mayor radio y tangentes entre sí.*

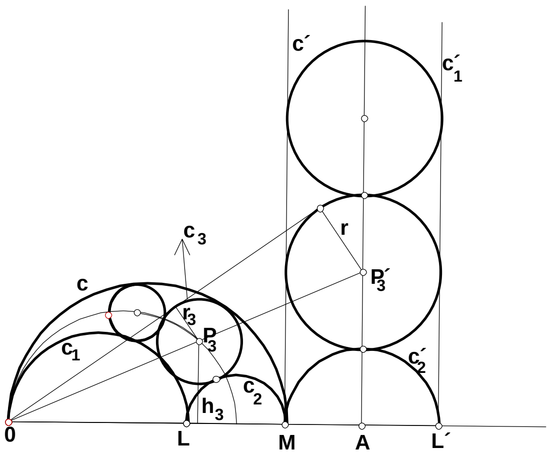


Fig. 6

Solución:

Queremos encontrar círculos tangentes a c_1 y a c, nos conviene transformarlos en dos rectas. Si elegimos como centro de inversión a O, dado que c y c_1 son tangentes en O, éstas se transforman en dos rectas paralelas c' y c_1' ; c_2 y c_3 en los círculos c'_2 y c'_3 tangentes a ambas rectas. Por lo tanto los círculos de radio r resuelven el problema luego de efectuar la transformación inversa.-

Debemos destacar que Pappus obtuvo el siguiente resultado sin usar inversión:

$$h_n = 2nr_n$$

donde n es número de círculos tangentes a c_1 y a c. Utilizando la Fig. 6, obtenemos que:

$$\frac{r_3}{r} = \frac{\overline{OP_3}}{\overline{OP_3'}} \qquad \text{y} \qquad \frac{h_3}{2r} = \frac{\overline{OP_3}}{\overline{OP_3'}}$$

Esto prueba el resultado para $n = 1$, el mismo método se aplica para cualquier valor de n.

La cadena de Steiner de circunferencias.

En la Fig. 7 intentamos llenar la región entre dos circunferencias c_1 y c_2 con una cadena de circunferencias tangentes entre sí.

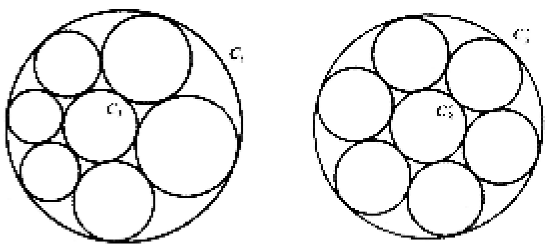


Fig. 7

Primero elegimos un centro de inversión apropiado de tal forma que c_1' y c_2' resulten concéntricas (El centro de inversión en uno de los puntos en los cuales se intersecan las circunferencias ortogonales a c_1 y c_2). Por lo tanto, el problema se reduce a construir una cadena de circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a c'_1 y c'_2. El radio de la primera circunferencia que construimos está fijado por las circunferencias dadas. Por lo que la sucesión de circunferencias puede ser cerrada o no, independientemente de la primera. Realizamos la transformación inversa y obtenemos la solución a nuestro problema.

El inversor de A. Peaucellier

Existen métodos mecánicos para construir el inverso de un punto. El inversor es un instrumento descubierto por L. Lipkin en 1781 y redescubierto por A. Peaucellier cerca de 90 años después, por ello se conoce como *"el inversor de Peaucillier"*

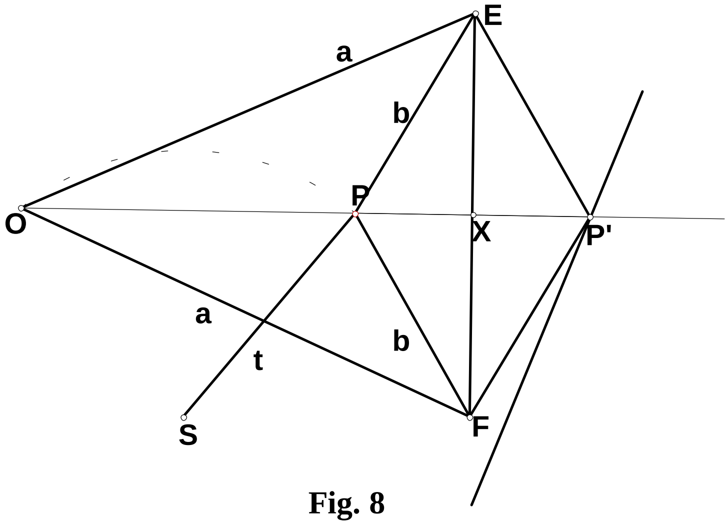


Fig. 8

Consta, ver Fig. 8, de siete varillas rígidas, dos de longitud *a*, cuatro de longitud *b*, y una de longitud arbitraria *t*. *O* y *S* son dos puntos fijos, situados de modo que $\overline{OS} = \overline{PS}$. El aparato entero puede moverse, puesto que las cuatro esquinas del rombo *PEP´F* tiene bisagras. Demostraremos que si P describe una circunferencia con centro S y radio $\overline{PS}$, *P´* describe un segmento de recta. Designemos por X el pie de la perpendicular desde *E* a $\overline{PP'}$, observamos que:

$$\begin{aligned}\overline{OP}.\overline{OP'} &= (\overline{OX}-\overline{PX}).(\overline{OX}+\overline{PX}) \qquad = \overline{OX}^2-\overline{PX}^2\\ &= (\overline{OX}^2+\overline{EX}^2)-(\overline{PX}^2+\overline{EX}^2)\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

La cantidad a^2-b^2 es una constante que llamaremos r^2, en consecuencia *P* y *P'* son puntos inversos respecto a la circunferencia de radio *r* y centro *O*. Cuando *P* describe una trayectoria circular que pasa por *O, P'* describe una recta.
Observamos que la conexión de Peaucellier convierte un movimiento circular en un movimiento rectilíneo, por ello, este instrumento resolvió el problema de Watts que consistía en unir el pistón de su máquina de vapor con un punto de un volante de forma tal que la rotación de éste, hiciese mover el pistón en línea recta.

Problema de Apolonio

Como ya expresáramos, el problema consiste en encontrar una circunferencia tangente a otras tres dadas c_1, c_2 y c_3. En la Fig.9 mostramos un ejemplo:

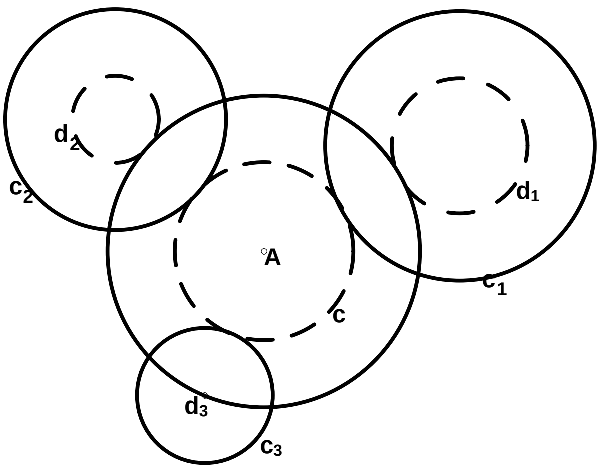


Fig. 9

Si las tres circunferencias dadas son concéntricas, no hay circunferencias reales que sean tangentes a ellas. Debemos enfatizar, quizás, que siempre son soluciones reales las que estamos buscando.

La condición para el contacto de dos circunferencias es que la distancia entre los centros debe ser igual a la suma o a la diferencia de los radios, según sea la clase de contacto, externo o interno, como lo muestra la Fig. 10:

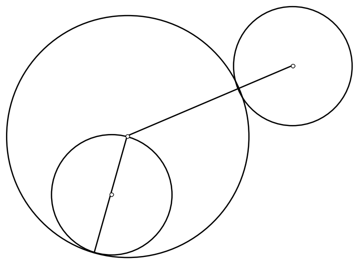


Fig. 10

Si consideramos las tres circunferencias c_1, c_2 y c_3, como las dadas en la Fig. 9, uno de los métodos consiste en agregar o sustraer del radio de las tres circunferencias el radio más pequeño. Así se reduce el problema a encontrar una circunferencia que pase por un punto d_3 y sea tangente a dos circunferencias d_1 y d_2. Esto es claro, ya que al invertir respecto de una circunferencia con centro en d_3, se tienen dos circunferencias d_1' y d_2'. Si trazamos una de las rectas tangentes a ambas, la inversa de ésta es tangente a d_1 y a d_2, además de pasar por d_3. Luego construimos con centro *A*, y radios elegidos convenientemente una de las soluciones al problema. Razonando en forma similar, se pueden obtener las demás soluciones.

Conclusiones

La transformación de inversión es, como expresara Miguel de Guzmán una "transformación loca y muy divertida" pues, si la comparamos con otras transformaciones del plano ésta no conserva "*las formas*". Justamente el no conservar las formas ayuda a la formación de un pensamiento geométrico distinto, que se basa fundamentalmente en un ejercicio de la imaginación.
El método básico consiste en elegir adecuadamente el centro de inversión para transformar un problema en otro más simple, resolver éste, y luego volver al problema original por la transformación inversa. Allí vemos con asombro como se han acomodado las piezas del "rompecabezas" mostrándonos el problema resuelto.

En cuanto a nosotras como docentes, el hecho de optar por un ordenamiento distinto de los temas a través de un "*hilo conductor*" nos ha permitido reordenar y jerarquizar de otro modo nuestros conocimientos. La incursión en la historia del Problema de Apolonio, nos permitió realizar varias bifurcaciones, encontrando muchos problemas que se resuelven por medio de la transformación de inversión, algunos de los cuales hemos incluido en este trabajo: el problema de los Arbelos, la cadena de Steiner de circunferencias y el Inversor de Peaucellier.

Con todo lo expuesto creemos que esta propuesta y su puesta en práctica nos ha permitido acercarnos a nuestro objetivo: desarrollar de una manera distinta el *Pensamiento Geométrico en el Futuro Profesor de Matemática*"

Bibliografía

[1] Guzmán, M. De (1992), *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*, OMA, Argentina.

[2] Courant, R y Robbins, H (1971), *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, España.

[3] Coxeter, F (1988), *Fundamentos de Geometría*, Limusa, México.

[4] Coxeter y Greitzer (1994), *Retorno a la Geometría*, Colección La Tortuga de Aquiles, Ribadeneyra, España.

[5] Santaló, L (1993), *La Geometría en la Formación de Profesores*, Red Olímpica, Argentina.

[6] Honsberger, R (1970), *Ingenuity in Mathematics*, The Mathematical Association of America, EEUU.

[7] Pedoe, D (1970), *Geometry*, Cambridge University Press, Gran Bretaña.

[8] Guzmán, M. de (1995), *Aventuras Matemáticas*, Pirámide, España.

[9] Stanley Ogilvi, C (1969), *Excursions in Geometry*, Dover Publications, Inc. New York.

[10] Cadwell, J H (1977), *Topics in Recreational Mathematics*, Cambridge University Press, Gran Bretaña.

[11]Stewart, I (1996), *De aquí al infinito*, Drakontos, España.

[12] Bell, E T (1995), *Historia de las Matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México.

Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales. Universidad Nacional de San Luis.

Direcciones electrónicas: nceri@unsl.edu.ar , mini@unsl.edu.ar, martinez@unsl.edu.ar