Determinación del Número de Particiones de un Conjunto

Luis E. Rybier

En el estudio de particiones establecidas en un conjunto A, que posee "n" elementos se suscita la cuestión del número total de tales particiones. Es evidente, y el cálculo así lo indica, que este número crece rápidamente al aumentar la cantidad de elementos del conjunto. Este artículo es el primero de una serie de los mismos sobre el tema.
Determinar una partición en el conjunto dado A, de "n" elementos, es encontrar una familia de subconjuntos P $=\{A_1, A_2, \ldots A_l\}$, tal que:

1. $A_i \cap A_j = \varnothing \quad, \forall_i . \forall_j$, i $\neq j$, Esto es, los subconjuntos son disjuntos dos a dos.
2. $A_i \neq \varnothing$, $\forall_i$, ningún subconjunto es vacío.
3. $\bigcup_{i=1}^{l} A_i = A$, la unión de los subconjuntos es el conjunto dado A.

El problema consiste en "contar" todas las particiones posibles en un conjunto dado. La dificultad radica en el criterio de conteo, que no debe reiterar ni obviar particiones.
Sea un conjunto A= $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, donde el cardinal de A es "n" denotemos por P_n el número de particiones de A.

I. Si fijamos el elemento a_1 y calculamos las particiones de los (n-1) restantes, tendremos así todas las particiones en donde ese elemento pertenece sólo a un conjunto unitario. Una partición cualquiera donde $\{a_1\}$ es un elemento será de la forma:
$\{\{a_1\}, \{a_2, a_3, \ldots\}, \ldots, \{a_i, \ldots, a_j\}, \ldots, \{a_k, \ldots, a_l\}\}$.

II. A continuación elegimos otro elemento distinto a_2, fijando a_1 y a_2, formamos con los restantes las particiones de los " n-2 " restantes. De ésta forma se tendrá el conjunto de todas las particiones en donde el subconjunto $\{a_1, a_2\}$ pertenece. En éste caso una partición cualquiera será de la forma: $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, \ldots\}, \{a_i, \ldots\}, \ldots, \{a_j, \ldots, a_n\}\}$.

Cambiando luego a_2 por a_3, por a_4, etc.(dejando fijo siempre a_1), a este segundo elemento es posible elegirlo entre (n-1), y en consecuencia, para esta situación el número de total de particiones que contienen $\{a_1, a_i\}$ para $i = 2,3,\ldots n$ es : $\binom{n-1}{1}(P_{n-2})$.

III. Prosiguiendo el razonamiento, en el paso siguiente dejamos fijos $\{a_1, a_2, a_3\}$, tendremos: $\binom{n-1}{2}(P_{n-3})$ particiones que contienen $\{a_1, a_i, a_j\}$, con $2 \leq i \; \mathbf{p} \; i \; \mathbf{p} \; j \leq n$.

Y así, en general, el número de particiones $\{A_1, A_2, ..., A_1\}$

Tal que $a_1 \in A_1$ y card $(A_1) = k$ es: $\binom{n-1}{k-1}(P_{n-k})$.

Reiterando esta secuencia hasta el paso "n-1 "en éste último paso tendremos:

$\binom{n-1}{n-2}(\mathrm{P}_{n-(n-1)})$. Por último tenemos la partición $\{A\}$. De todo esto se deduce que

$$P_n = \binom{n-1}{1}P_{n-2} + \binom{n-2}{2}P_{n-3} + ... + \binom{n-1}{k-1}P_{n-k} + ... \binom{n-1}{n-2}P_{x-(n-1)} + 1$$

1 es por la partición unitaria que es la que contiene solamente al conjunto dado A.

En definitiva el número total de particiones es entonces:

$$\mathrm{P}_n = \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}.P_{n-(i+1)} + 1,$$

sea por definición $\mathrm{P}_0 = 1$, podemos escribir entonces: $\mathrm{P}_0 = \binom{n-1}{n-1}.P_0 = 1$ y por la propiedad complementaria de los números combinatorios se obtiene: $\mathrm{P}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}.P_i$.

Que es la conocida fórmula de Bell.

Dado que ésta expresión recurrente es función de todas las particiones anteriores, $P_k, k = 1,2,...,n-1$. el propósito ahora es reducirla a otra que no dependa de éstas. Para éste fin formaremos un sistema Crameriano de "n" ecuaciones con las "n" incógnitas, a saber, los números P_1, ... P_n .

Este sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} -P_1 & =-1 \\ \binom{1}{1}P_1 - P_2 & =-1 \\ \binom{2}{1}P_1 + \binom{2}{2}P_2 - P_3 & =-1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & =-1 \\ \binom{n-1}{1}P_1 + \binom{n-1}{2}P_2 + \binom{n-1}{3}P_3 + \cdots\cdots\cdots - P_n & =-1 \end{cases} .$$

Como la matriz principal es una matriz triangular inferior su determinante es el producto de los elementos de la diagonal. De donde resulta que el determinante es +1 o –1. Si "n" es un número par el determinante es uno en caso de ser "n" impar, éste valor es -1. Por la regla de Cramer y denotando determinante de una matriz (a_{ij}) por $\left|(a_{ij})\right|$, el número de particiones es:

$$P_n = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -1 \\ \binom{1}{1} & -1 & 0 & \cdots\cdots & -1 \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & -1 & \cdots\cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots\cdots & -1 \end{vmatrix}}{(-1)^n}$$

operando y aplicando la multilinealidad de los determinantes sobre la expresión de P_n tendremos:

$$P_n = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots . & 1 \\ \binom{1}{1} & -1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & -1 & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots\cdots\cdots .. & 1 \end{vmatrix}}{(-1)^n}.(-1)$$

Ahora aplicamos el ciclo (12 ... n) a las columnas y se obtiene

$$P_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 1 & \binom{1}{1} & -1 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 1 & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & -1 \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots\cdots\cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{vmatrix}}{(-1)^n}.(-1).(-1)^{n-1}$$

Recordando $\binom{k}{0} = 1$, en definitiva obtenemos:

$$
P_n = \begin{vmatrix}
\binom{0}{0} & -1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & -1 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & -1 \\
\binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots\cdots\cdots & \binom{n-1}{n-1}
\end{vmatrix}
$$

Calculemos, a modo de ejemplo P_5, esto es el número de particiones para un conjunto de cinco elementos. $A = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5\}$

$$
P_5 = \begin{vmatrix}
\binom{0}{0} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & -1 & 0 & 0 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & -1 & 0 \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & -1 \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{vmatrix} = 52
$$

Una interesante conexión con el triángulo de Tartaglia

Sea $(a_{ij})_n$ la matriz asociada al cálculo de P_n, sus elementos quedarán definidos por:

$$(a_{ij})_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq j \geq i+2 \quad (1 \leq i \leq n-2) \\ -1 & \text{si } j=i+1 \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} & \text{Si } 1 \leq j \leq i \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Para toda matriz es posible su transformación en una matriz triangular equivalente operando en sus columnas por operaciones elementales.
Sea la siguiente transformación $T_{(k)}$

Transforma una matriz $C = (b_{ij})$ en una matriz $C^* = (b^*_{ij})$ de manera que

$$(Coli)^* = Coli \text{ para } i \neq k$$
$$(Colk)^* = (Colk).a_{k-1,k-1} + (Col(k-1))^*.$$

Donde: $(Colj)$ es la columna "*j*" de la matriz original.

$(Colj)^*$ Es la columna "*j*" de la nueva matriz.

Por propiedades de los determinantes se tiene:

$$\det C^* = a_{k-1,k-1} \det C$$

A continuación aplicamos esta transformación de manera sucesiva a partir de la segunda columna "n-1" veces. Esto es, calculamos

$$T(n-1)T(n-2)...T(3)T(2)(a_{ij})_n =: (a^*_{ij})_n$$

Por la estructura de la matriz (a_{ij}), la matriz (a^*_{ij}) resulta triangular inferior.

Como la columna primera queda invariante resulta $a_{k,1} = a^*_{k,1}, \forall k \, 1 \leq k \leq n$.

El lector diligente verificará por inducción por lo tanto para $P_n = \left|(a_{ij})_n\right|$

$P_n = \dfrac{1}{\prod_{1}^{n-1} a_{ii}} \left| (\overset{*}{a}_{ij})_n \right|$ y siendo la matriz $(\overset{*}{a}_{k,1})$ n triangular es: $\left| (\overset{*}{a}_{ij}) \right| = \prod_{1}^{n} \overset{*}{a}_{ii}$. De donde resulta

$P_n = \overset{*}{a}_{nn}$ y también: $\left| (\overset{*}{a}_{ij})_n \right| = \prod_{1}^{n} P_i$.

Si denotamos la matriz $T(n-2)T(n-3)...T(3)T(2)(a_{ij})_n =: (a^{\Delta}_{ij})_n$

De acuerdo a esto el elemento $\overset{*}{a}_{ij}$ es:

$\overset{*}{a}_{ij} = P_{j-1}\binom{i-1}{j-1} + a^{\Delta}_{i,j-1}$, Para i=j tendremos, $\overset{*}{a}_{ii} = P_i = P_{i-1}\binom{i-1}{i-1} + a^{\Delta}_{i,i-1}$

Apliquemos, como ejemplo, las transformaciones para hallar las particiones de un conjunto de 3 elementos:

A=$\{a_1, a_2, a_3\}$. Será $P_3 = \overset{*}{a}_{33}. = \overset{*}{a}_{22}.a_{33} + a^{\Delta}_{32}$ y como:

$a^{\Delta}_{22} = a_{11}.a_{22} + a^{\Delta}_{21} = 1.\binom{1}{1} + \binom{1}{0}$ $a_{33} = \binom{2}{2}, y$ $\overset{*}{a}_{32} = a_{32} + a_{31}$ tendremos:

$$\left[\binom{1}{1} + \binom{1}{0}\right]\binom{2}{2} + \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = P_3 \quad \text{ó} \quad P_3 = \binom{2}{0} + \binom{1}{0}\binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1}\binom{2}{2}$$

Para P_4 , la expresión será:

$$P_4 = \binom{3}{0} + \binom{1}{0}\binom{3}{2} + \binom{2}{0}\binom{3}{3} + \binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{3} + \binom{3}{1} + \binom{1}{1}\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\binom{3}{3} + \binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{3}$$

Para sintetizar éstas regularidades en un algoritmo único definimos lo siguiente:

Definición 1: El número producto de los "k" números combinatorios:

$\binom{b_1}{a_1}\binom{b_2}{a_2}...\binom{b_k}{a_k}$ lo denotamos por $ncc)^n_k$, para $1 \le k \le n$, escribimos

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & .... & b_k \\ a_1 & a_2 & .... & a_k \end{pmatrix}_n := \text{ncc})_k^n := \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} b_k \\ a_n \end{pmatrix}$$

Definición 2: "Número combinatorio compuesto suma" es la suma de todos los números combinatorios compuestos, donde "k" varía de "1" hasta "n", denotamos a ésta suma por:

$$\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & .... & b_k \\ a_1 & a_2 & .... & a_k \end{pmatrix}\right)_n = ((n)) := \sum_{k=1}^{n} ncc)_k^n$$

los números combinatorios que contribuyan a ésta suma deberán cumplir las siguientes condiciones:

C1: $a_1 = 0$, o $a_1 = 1$, $b_k = n$, $b_1 \geq 1$, a_i , y b_i son naturales para todo "i".

Todo número combinatorio compuesto que contribuye a la suma, es de la forma

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_i & \dots & b_j & \dots & b_k \\ a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_k \end{pmatrix}_n$$ donde $i \mathbf{p}\, j \Rightarrow b_i \leq a_j$, también en cada número combinatorio $\begin{pmatrix} b_i \\ a_i \end{pmatrix}$ y que contribuye a ncc$)_k^n$ satisface obviamente $a_i \leq b_i \leq n$.

Definimos

$$((n_0)) := \sum_a \left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & n \\ 0 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}\right),\ ((n_1)) := \left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & n \\ 1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\right)$$

de donde : $((n)) = ((n_0)) + ((n_1))$.

Veamos un ejemplo:

Sea $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (0,1) & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = ((4_0)) + ((4_1)) = ((4))$

Por ejemplo:

$$((4)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4\\1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&4\\1&2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3&4\\1&2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&4\\1&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=52$$

Usando la expresión $\overset{*}{a}_{n+1,n+1} = P_{n+1} = P_n\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix} + a^{\Delta}_{n+1,n}$

Se tiene el

Teorema:

$$(\overset{*}{a}_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \le i \,\mathbf{p}\, j \le n \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i-1 \\ (0,1) & 2 & 3 & \ldots & j-1 \end{pmatrix}\right) & \text{si } 1 \le j \le i \le n \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

<u>Otra expresión recurrente para Pn</u>

Si bien la expresión de Bell es recurrente, lo es en función de todas las particiones anteriores, es posible encontrar una relación en donde el número de particiones P_n dependa del número de particiones de P_{n-1} sumado a un número combinatorio compuesto.

Si operamos sobre la ecuación $P_n = P_{n-1}\begin{pmatrix}n-1\\n-1\end{pmatrix} + \overset{*}{a}_{n,n-1}$ obtendremos de acuerdo a

(i): $P_n = P_{n-1} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ (0,1) & 2 & 3 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}\right)$.

También es posible expresar a P_n como suma de números combinatorios compuestos, si en la fórmula:

$\overset{*}{a}_{k,k-1} = P_k - P_{k-1}\begin{pmatrix}k-1\\k-1\end{pmatrix}$ efectuamos la suma sobre "k", para $2 \le k \le n$, obtenemos:

P_n-$P_1 = \sum_2^n a^*_{i,i-1}$, utilizando (i) , y siendo $P_1 = 1$, definiendo $a^*_{1,0} = 1$ resulta:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i-1 \\ (0,1) & 2 & 3 & \ldots & i-2 \end{pmatrix} \right) = ((n-1))$$

lerybier@hotmail.com
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Comodoro Rivadavia.