Cálculo de las alturas del relieve lunar

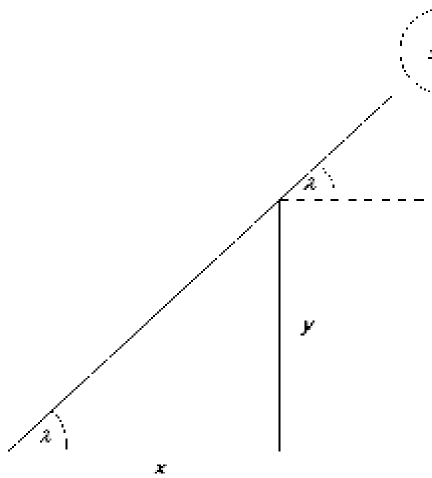
Pablo Benítez Llambay - Alejandro Benítez Llambay.

1. Introducción.

Con el presente trabajo se pretende dar un método sencillo y exacto para calcular la altura de algún accidente lunar.

Como nos ha sido imposible encontrar un trabajo que resuma en una ecuación las variables más importantes a tener en cuenta en este proceso, creímos necesario desarrollar un método lo suficientemente sencillo que permita a cualquier persona calcular la altura de los accidentes lunares a partir de simples mediciones ópticas, aún careciendo del instrumental adecuado. Es importante destacar el hecho de que contando con una ecuación que exprese la altura de cualquier relieve en función de otras variables (que pueden ser medidas) es posible hacer uso de la computación para el desarrollo de un software que facilite dicho cálculo.

El trabajo toma como punto de partida conocimientos de trigonometría muy sencillos. Sabemos que a partir de una relación trigonométrica es posible calcular la altura de un objeto conociendo la longitud de su sombra y el ángulo que los rayos del sol forman con la horizontal en ese momento, de acuerdo al siguiente gráfico:

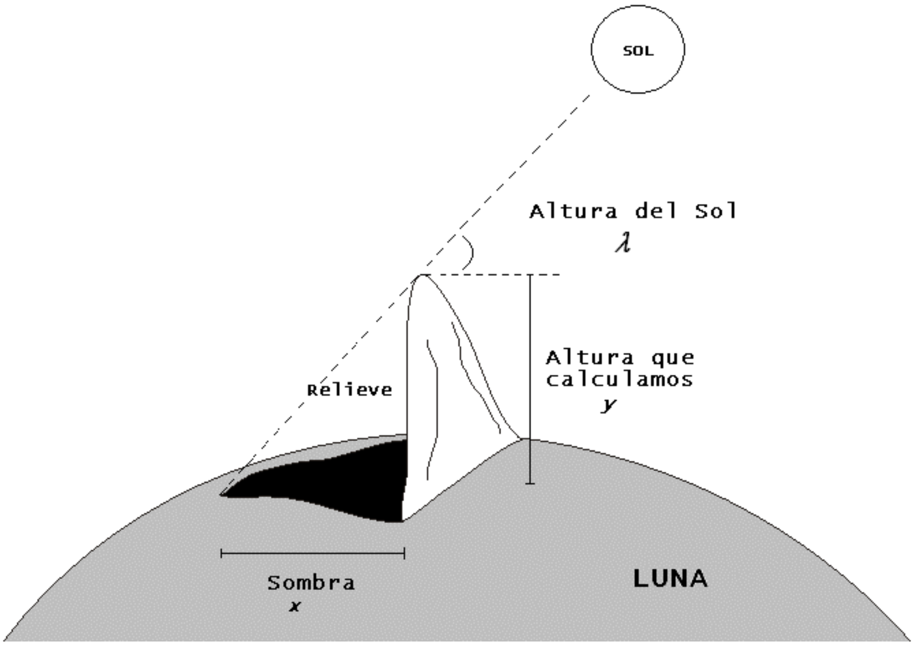


$$tg\, l = \frac{y}{x}$$

$$\mathrm{x}.tg\, l = y$$

Donde *y* es la altura que deseamos calcular, *x* es la longitud de la sombra proyectada por el cuerpo y *l* el ángulo que los rayos del Sol forman con la horizontal, es decir la altura del Sol medida desde el horizonte expresada en grados, que debe entendérsela como el ángulo que forma nuestra vista con la horizontal (el suelo) cuando apuntamos directamente al centro del Sol. En otras palabras, éste es el ángulo de vértice el observador, determinado por el Sol.

Esta relación se puede trasladar sin ningún problema a la superficie lunar si conocemos el ángulo λ que forma el sol con la horizontal y la longitud de la sombra x.



Entonces, razonamos de la siguiente manera:

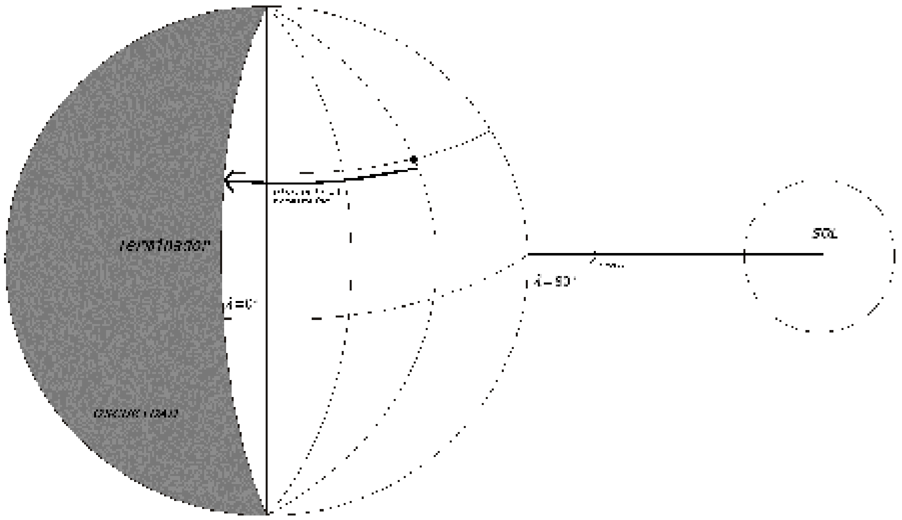
$$\textbf{(1)} \quad y = x.tg\, l$$

Por lo tanto es necesario calcular tanto la longitud de la sombra como la altura a la que se encuentra el Sol.

2. Desarrollo

2.1.Cálculo de la altura del sol:

Si imaginamos una esfera con una mitad iluminada y la otra en oscuridad, podemos afirmar que en el comienzo de la oscuridad, el Sol se encuentra exactamente a 0º de altitud sobre el horizonte, razón por la cual los rayos de éste no alcanzan a iluminar esta zona (en la Tierra no es posible ver este efecto debido a la atmósfera, pues la noche comienza mucho después de que el Sol se ocultó completamente). Supongamos ahora que estamos situados justo sobre el medio día de la esfera, es decir, donde ningún cuerpo sobre esa zona proyecta sombra (en el gráfico coincide con el borde derecho) y miramos hacia el cenit (punto en la esfera celeste que resulta de la intersección con la dirección de la plomada); en este punto veremos al Sol formando con la horizontal un ángulo de 90º.



A partir de estos dos ejemplos, podemos suponer que nos encontramos en un punto cualquiera sobre la esfera y que en ese punto el Sol forma un ángulo que oscila entre los 0º y 90º de altura, pero desconocemos cual es, ya que nos resulta imposible situarnos en dicha esfera y medirlo desde ella.

Queremos averiguar a que altura se encuentra el Sol en ese lugar; para ello nos valdremos de una proporción directa.

Sabemos que cualquier paralelo de una esfera, que supondremos de ahora en más la Luna, tiene 360º de longitud. A partir de este conocimiento y de una medición auxiliar que debemos realizar calcularemos la altura a la que se encuentra el Sol. La medición auxiliar es la distancia que separa al cuerpo de donde el Sol se encuentra a 0º de altitud, que llamaremos d_t.

Si conocemos cuanto vale el perímetro ***P*** de un paralelo para una latitud determinada, y conocemos d_t (en la misma unidad que el perímetro), es posible conocer la altura del sol l. Entonces:

$$\frac{P[unidad]}{d_t[unidad]} = \frac{360º}{l}$$

$$\textbf{(2)} \quad l = \frac{d_t[unidad].360º}{P[unidad]}$$

2.2. Sobre el perímetro *P* y la distancia al terminador d_t.

El perímetro de un paralelo en la Luna (y en cualquier esfera) no es constante y depende de la latitud (esta afirmación vale sí lo que consideramos es el perímetro expresado en unidades que no sean angulares). Es muy importante el cálculo de este valor ya que a medida que nos acercamos al polo, el perímetro de los paralelos disminuye demasiado, es decir, entre dos puntos situados a la misma latitud pero cada vez mas cerca del polo, la distancia que los separa, por ejemplo en km, es cada vez menor.

De la geometría sabemos que el perímetro de una circunferencia se calcula mediante la expresión:

$$\textbf{(3)}\ p = p.d$$

En nuestro caso, el diámetro ***d*** que debemos considerar es el diámetro ecuatorial lunar[1] d_l [km], (más adelante veremos como hacerlo). Sin embargo, aquí no termina el asunto. Se podría acabar si midiéramos el diámetro aparente lunar[2] correspondiente al paralelo en donde se encuentra el cráter, pero es claro que mientras más mediciones se hacen existe más posibilidad de agregar errores al resultado.

Para calcular el perímetro como función de la latitud nos vamos a valer de un coeficiente que multiplicaremos a la expresión anterior. Para encontrar dicho coeficiente razonamos de la siguiente manera:

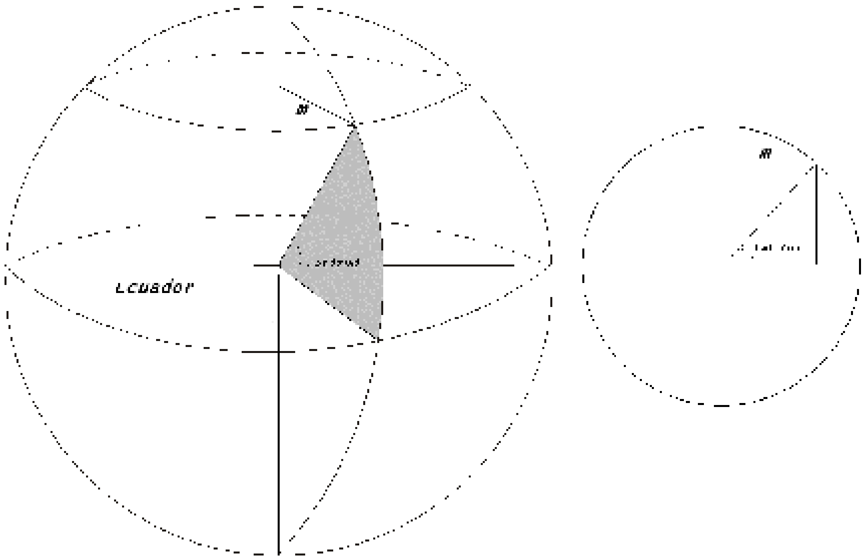
En la circunferencia unitaria, la medida del segmento *m* paralelo al *eje x* que une al *eje y* con la intersección de la circunferencia y el radio vector está dada por el coseno del ángulo comprendido entre la abscisa y el radio vector.

---

[1] El diámetro ecuatorial lunar es el considerado para el paralelo de 0º ya que la latitud se mide desde el ecuador (0º) como positiva hacia el hemisferio norte y como negativa hacia el hemisferio sur tomando como máximo valor absoluto 90º.

[2] El diámetro aparente lunar es la porción de cielo que abarca el diámetro del cuerpo. Se mide en minutos de arco y su valor medio aceptado es de 31’ 5’’.

Gráficamente:



El segmento m es el radio de la circunferencia de la que estamos tratando de averiguar su perímetro, y su valor viene dado por:

$$\textbf{(4)}\ m = \cos(latitud)$$

El valor del coseno nos está indicando en que proporción es menor *m* que el radio de la circunferencia unitaria. A partir de esto es posible relacionar el valor obtenido para poder calcular el perímetro de un paralelo para una determinada latitud:

$$\textbf{(5)}\ P[km] = p.2radio[km].\cos(latitud) = p.d_l[km].\cos(latitud)$$

2.2.1. Cálculo del diámetro lunar (d_l).

Si bien el diámetro lunar se encuentra tabulado, incluimos el desarrollo de su cálculo para no limitarnos solo a tablas y ser capaces de calcularlo fácilmente conociendo la distancia a la luna y su diámetro aparente. El cálculo de este valor incrementa el potencial del trabajo aumentando su alcance a cualquier esfera (ya sea un planeta, asteroide, etc). No obstante, debemos ser concientes del aumento en las posibilidades de error.

Realizar este cálculo puede resultar de mucha utilidad para verificar que tan precisos son los datos de los que disponemos al momento de realizar las mediciones; un diámetro acertado implica efemérides o mediciones lunares correctas. El valor aceptado es de 3476 km.

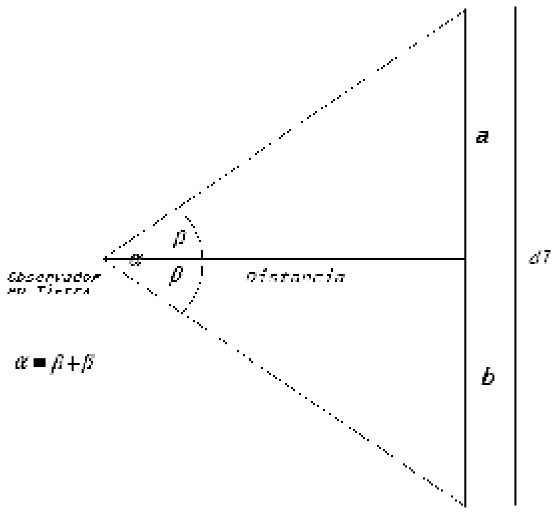
Para calcular el diámetro lunar, es necesario que conozcamos la distancia a la que se encuentra la Luna con respecto a la Tierra al momento de realizar las mediciones. Esta es posible obtenerla mediante el paralaje[3], algún software astronómico o efemérides astronómicas.

Hay que aclarar que debemos tener cuidado con el dato de la distancia que tenemos, ya que puede ser geocéntrica o topocéntrica[4] (trabajaremos con la topocéntrica). En caso de ser geocéntrica, debemos restar el radio terrestre en el momento que la Luna pasa por el cenit del lugar de observación (sin embargo esto no es cierto si la latitud del lugar de observación es distinta de 0º, pues la Tierra no es una esfera perfecta), no obstante, es posible obviar este paso, ya que el error que produce es pequeño en comparación con las magnitudes que estamos trabajando.

$$\textbf{(6)}\quad \text{dist topocéntrica} = \text{dist geocéntrica} - \text{radio ecuatorial terrestre}$$

Es necesario que midamos cuanto vale el diámetro aparente ecuatorial de la Luna.

Una vez que tenemos estos datos, podemos volver a hacer uso de la trigonometría y razonar así:



---

[3] Paralaje: Según Fainstein, ángulo bajo el cual se ve desde la luna el radio terrestre. Si bien el paralaje no se aplica solo a la Luna, solo damos una definición que oriente al lector. Según el astro del cual queremos averiguar la distancia se utilizan distintos métodos de paralaje.

[4] Distancia lunar geocéntrica: Distancia a la Luna medida desde el centro de la Tierra.
Distancia lunar topocéntrica: Distancia a la Luna medida desde la superficie de la Tierra.

Donde α es el diámetro aparente lunar, a = b y a = *diámetrolunar / 2* y *distancia* es la distancia a la Luna (topocéntrica).

$$b = \frac{1}{2}a$$

$$\textbf{(7)}\ \mathrm{a} = dist[unidad].tg\left(\frac{1}{2}a\right)$$

$$\textbf{(8)}\ d_l = 2\left(dist[unidad].tg\left(\frac{1}{2}a\right)\right)$$

2.2.2. Sobre la distancia al terminador d_t y la longitud de la sombra *x*.

Calculamos ahora en km la longitud de la sombra x proyectada por el cuerpo y la distancia que lo separa del terminador d_t , que de ahora en más será para nosotros la zona en la que el Sol se encuentra a 0º de altitud sobre el horizonte lunar.

Por comenzar, es necesario que midamos la distancia angular aparente tanto de la sombra e como la distancia angular del cuerpo al terminador j. (Ambas medidas deben estar en minutos de arco). Y así, partiendo de una proporción directa, podemos calcular la longitud de ambas en km.

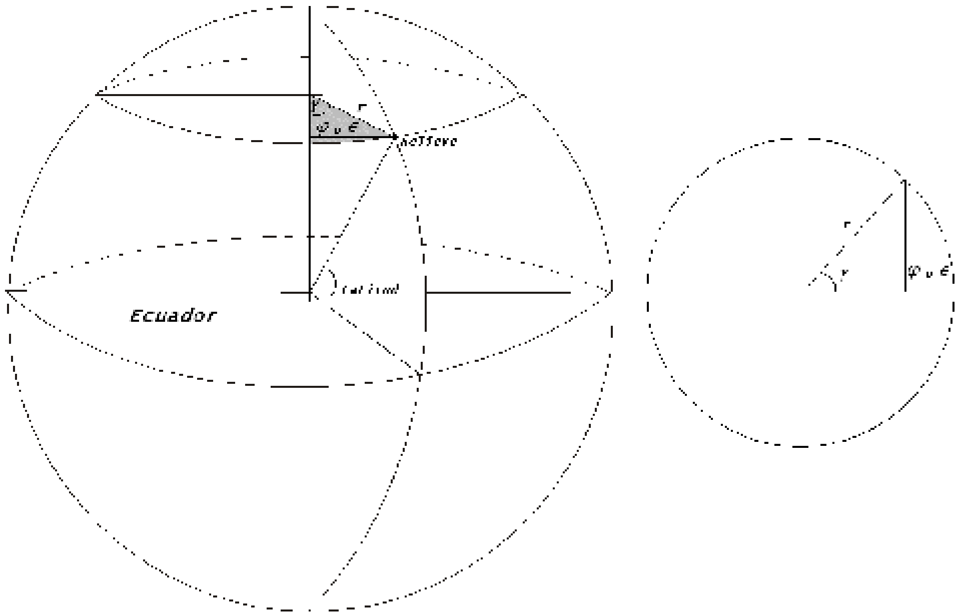
$$\textbf{(9)}\quad d_t[unidad] = \frac{j^{\circ}.d_l[unidad]}{a^{\circ}}$$

$$\textbf{(10)}\ x[unidad] = \frac{e^{\circ}.d_l[unidad]}{a^{\circ}}$$

Todavía hace falta una corrección. La Luna es una esfera, y nuestras mediciones son planas[5], por lo tanto es necesario añadir un cálculo que corrija de alguna manera la deformación de las distancias debido a la curvatura lunar. Para realizar esta corrección, vamos a utilizar la circunferencia unidad, donde la medida de los ángulos expresados en radianes nos brinda la medida del arco, que es lo que buscamos: medir la longitud real del arco de la sombra en km o de la distancia del cuerpo al terminador.

---

[5] Si bien las mediciones se realizan sobre la esfera celeste, como la magnitud de las mismas es muy pequeña, el arco es muy semejante a una recta.



$$\textbf{(11)}\ seng = \frac{e[unidad]}{r[unidad]}$$

Donde r es el radio de la luna calculado a partir de la siguiente expresión, obtenida sabiendo que el radio es la mitad del diámetro. Pero recordemos que el diámetro de un paralelo lunar depende de la latitud, que puede corregirse utilizando un coeficiente de corrección:

[6] $$\textbf{(12)}\quad r = \frac{d_l[unidad].\cos(latitud)}{2}$$

O también puede calcularse en minutos de arco:

$$\textbf{(13)}\quad r = \frac{a}{2}.\cos(latitud)$$

No hay restricciones en cuanto a que radio utilizar, solo hay que tener en cuenta que al momento de realizar el cociente entre la distancia de la sombra o del cuerpo al terminador y el radio ((9) ó (10)), ambos deben tener la misma unidad.

[6] Siempre que se hace mención a la latitud, debe considerarse la latitud del cráter o accidente lunar sin distinguir norte o sur, es decir, siempre con signo positivo.

Ahora despejamos γ en (11) y obtenemos que:

$$\textbf{(14)}\ g = sen^{-1}\left(\frac{e}{r}\right)$$

Al valor obtenido lo debemos expresar en km (por lo que el resultado debe estar en radianes) y multiplicar todo por el radio lunar de la zona en donde se encuentra el relieve cuya altura se desea conocer. La corrección queda de esta manera:

$$\textbf{(15)} g = \frac{p}{180}.r.sen^{-1}\left(\frac{e}{r}\right)$$

Para evitar confusiones aconsejamos utilizar ambos radios en km, para lo cual hay que añadir una corrección para transformar la medida angular de ε en km. Esta corrección esta basada en que conocemos de (10) la medida de ε en km, por lo tanto, la ecuación final queda así:

$$\textbf{(16)}\ g[km] = \frac{p}{180}.r[km].sen^{-1}\left(\frac{x[km]}{r[km]}\right) = \frac{p}{180}.r[km].sen^{-1}\left(\frac{e^{o}.d_l[km]}{a^{o}.r[km]}\right)$$

2.3. Obteniendo una expresión para la altura.

Finalmente, tras haber obtenido todas las expresiones que nos permiten calcular la *altura* de un determinado relieve lunar, reemplazaremos en (1) y obtendremos la expresión general:

$$y = x.tg(l)$$

Reemplazando (1) por (10) y por (2), queda que:

$$y = \left(\frac{e^{o}.d_l[unidad]}{a^{o}}\right).tg\left(\frac{d_t[unidad].360^{o}}{P[unidad]}\right)$$

Reemplazando P , d_l, y d_t por (5), (8) y (9) respectivamente tenemos:

$$\boxed{y = \left(\frac{e^{o}.d_l[unidad]}{a^{o}}\right)tg\left(\frac{j^{o}.360^{o}}{p.a^{o}.\cos(latitud^{o})}\right)}$$

Hay que aclarar que ésta ecuación toma a ε y j como medidas planas, sin considerar el efecto de la deformación por la curvatura de la luna. Es una ecuación muy útil, con cálculos muy sencillos, pero carece de precisión. Para corregir esto, en caso de necesitarse mayor precisión solo basta reemplazar los valores de x y l por los de (16) y (2)

$$y = \left(\frac{p}{180^{o}}.r\left[unidad\right].sen^{-1}\left(\frac{e^{o}.d_{l}\left[unidad\right]}{a^{o}.r\left[unidad\right]} \right) \right) tg\left(\frac{d_{t}\left[unidad\right].360^{o}}{P\left[unidad\right]} \right)$$

Reemplazando d_t por (16) y P por (5) queda que:

$$y = \left(\frac{p}{180^{o}}.r\left[unidad\right].sen^{-1}\left(\frac{e^{o}.d_{l}\left[unidad\right]}{a^{o}.r\left[unidad\right]} \right) \right) tg\left(\frac{\frac{p}{180}.r\left[unidad\right].sen^{-1}\left(\frac{f^{o}.d_{l}\left[unidad\right]}{a^{o}.r\left[unidad\right]} \right).360^{o}}{p.d_{l}\left[unidad\right].\cos(latitud)} \right)$$

Simplificando la expresión:

$$y = \left(\frac{p}{180^{o}}.r\left[unidad\right].sen^{-1}\left(\frac{e^{o}.d_{l}\left[unidad\right]}{a^{o}.r\left[unidad\right]} \right) \right) tg\left(\frac{2.r\left[unidad\right].sen^{-1}\left(\frac{f^{o}.d_{l}\left[unidad\right]}{a^{o}.r\left[unidad\right]} \right)}{d_{l}\left[unidad\right].\cos(latitud)} \right)$$

Dado que $2r = d_{l}.\cos(latitud)$ y que esta expresión aparece en la ecuación (en sus dos expresiones), es posible simplificarla.

$$y = \left(\frac{p}{180}.r.sen^{-1}\left(\frac{e.d_{l}}{a.r} \right) \right) tg\left(sen^{-1}\left(\frac{j.d_{l}}{a.r} \right) \right)$$

Simplificando el diámetro lunar con el radio, la expresión final queda:

$$\boxed{y\left[unidad\right] = \left(\frac{p}{180}.r\left[unidad\right].sen^{-1}\left(\frac{2e}{a.\cos(latitud)} \right) \right) tg\left(sen^{-1}\left(\frac{2j}{a.\cos(latitud)} \right) \right)}$$

Donde “r” esta dado por (12): $r = \frac{d_l\left[unidad\right].\cos(latitud)}{2}$

Co-longitud: un método alternativo para calcular la distancia del cráter al terminador.

Otra corrección que se le puede hacer a la ecuación es añadir el concepto de co-longitud.

A la co-longitud se la puede entender como la distancia en grados que separa al terminador occidental del meridiano central (0º).

Este dato nos ayudará a obtener un valor suficientemente preciso de la distancia del cráter al terminador conociendo su longitud y la co-longitud lunar en el momento de tomar la fotografía, ambos datos catalogados en tablas.

Cuando la co-longitud es mayor a 90º significa que la luna comenzó a cubrirse nuevamente (cuarto menguante), y la posición del terminador *Lt* (en grados de longitud lunar) está dada por la ecuación:

$$Lt[grados] = colong + 180^{\circ}$$

Cabe aclarar que el terminador que comenzamos a ver en este caso es el oriental.

Son cuatro los casos posibles que podemos encontrar a la hora de calcular la distancia en grados desde algún cráter al terminador:

- Cuando la co-longitud es mayor a 90º y consideramos longitudes oeste de cráteres, la distancia al terminador viene dada por:

$$Lt[grados] = long[grados] + 360^{\circ} - (colong[grados] + 180^{\circ})$$

- Cuando la co-longitud es mayor a 90º y consideramos longitudes este de cráteres, la distancia al terminador viene dada por:

$$Lt[grados] = 360^{\circ} - long[grados] - (colong[grados] + 180^{\circ})$$

- Cuando la co-longitud es menor a 90º y consideramos longitudes oeste de cráteres, la distancia al terminador viene dada por:

$$Lt[grados] = (colong[grados]) - long[grados]$$

- Cuando la co-longitud es menor a 90º y consideramos longitudes este de cráteres, la distancia al terminador viene dada por:

$$Lt[grados] = (colong[grados]) + long[grados]$$

En estas cuatro ecuaciones, el término long hace referencia a la longitud del cráter (análoga a la de las coordenadas geográficas y medida en grados) tabulada en los atlas lunares.

De esta manera podemos calcular j en el momento de las mediciones sin necesidad de realizar mediciones. Para calcularlo en minutos de arco, utilizamos la siguiente ecuación, que proviene de un despeje trigonométrico, similar al utilizado en (12):

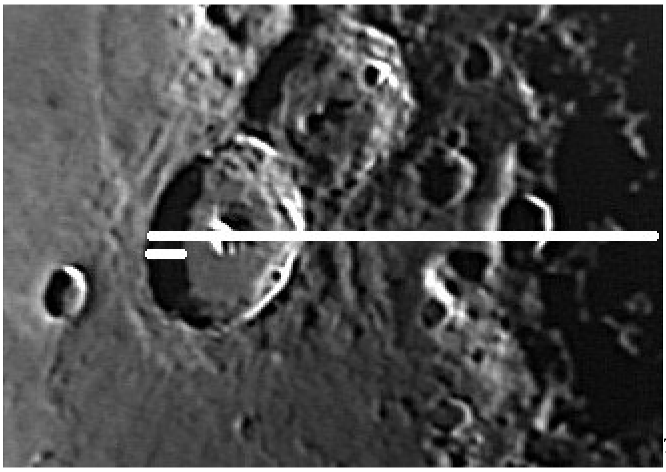
$$j = \frac{a}{2}.\cos(latitud).sen(Lt)$$

Aquí no termina en realidad el asunto, podría tomarse como válida esta ecuación si el diámetro del cráter fuese muy pequeño y si nuestros cálculos carecieran de precisión, sin embargo, haría falta añadir a esta ecuación un término más, la suma del radio del cráter, expresado en minutos de arco.

$$j = \frac{a}{2}.\cos(latitud).sen(Lt) + r_{crater}$$

Ejemplo Práctico.

Para el ejemplo, se ha escogido el cráter Teophilus, que se encuentra a una latitud de 11,4º Sur y a una longitud de 26,4º Este. La Luna tenía un diámetro aparente de 29,77’ de arco y se encontraba a una distancia de 401335 Km. La co-longitud era 343,1º

[7]

La línea corta representa la longitud de la sombra (11,6’’), mientras que la línea larga representa la distancia de la pared del cráter (altura que queremos calcular) al terminador.
Para calcular la distancia al terminador tenemos en cuenta que la co-longitud es mayor a 90º y que la longitud del cráter es 26,4º Este. Aplicando las ecuaciones se obtiene:

$$j' = 0°2'24{,}5''$$

Como el radio del cráter es aproximadamente 20’’ de arco, los sumamos al valor anterior:

$$j = 2'24{,}5'' + 20'' = 2'44{,}5''$$

Ahora nos queda calcular el radio lunar para esa latitud, pero antes veamos cuanto vale el ***dl*** que está dado por la siguiente ecuación:

$$d_l = 2\left(401335.tg\left(\frac{1}{2}.0°29{,}77'\right)\right) = 3475{,}479264...$$

y

$$r = \frac{3475{,}479264.\cos(11{,}4°)}{2} = 1703{,}45607...$$

[7] *Alejandro y Pablo Benítez Llambay.* Cráter Theophilus con telescopio H130900EQ2, Cámara QuickCam Pro 3000 a foco directo, Barlow x2. Procesada con Registax 3. Ciudad de Córdoba. 29/08/06 21:57 UT.

Lo que nos queda ahora es reemplazar los valores obtenidos en la ecuación final de la siguiente manera (utilizaremos la que tiene corrección de esfericidad):

$$y = \left(\frac{p}{180} .r.sen^{-1}\left(\frac{2e}{a\,.\cos(latitud)} \right) \right) tg\left(sen^{-1}\left(\frac{2j}{a\,.\cos(latitud)} \right) \right)$$

$$= \left(\frac{p}{180} .1703{,}45607.sen^{-1}\left(\frac{2.11{,}6''}{29{,}77'.\cos(11{,}4)} \right) \right) tg\left(sen^{-1}\left(\frac{2.2'24.5''}{29{,}77'.\cos(11{,}4)} \right) \right)$$

$$= 22{,}57123456 \times 0{,}191304251$$

Luego obtenemos un valor:

$$Altura = 4{,}318Km = 4318m$$

Comentarios finales.

Gracias a conocimientos básicos de trigonometría fue posible resolver un problema en principio complicado. Si bien son innumerables las correcciones que se pueden seguir haciendo a las ecuaciones, los resultados que se obtienen mediante las aproximaciones hechas son realmente buenas.

Paralelamente al trabajo se desarrolló un software que facilita todos los cálculos. El mismo está disponible en:
http://personales.ciudad.com.ar/astrojujuy/descargas.html

Es una propuesta interesante para mostrar que tan útil puede ser la trigonometría cuando se la utiliza con algún fin concreto. Los conceptos utilizados no son complicados y pueden servir como estímulo para estudiantes secundarios y universitarios de los primeros años de carreras afines a la astronomía.

Bibliografía:

COLIN, A. Roman. *Secretos del cosmos.* Madrid: Ed. Salvat. Biblioteca básica Salvat nº 2. 1970.

ESPASANDIN OTERO, J. *Un paseo por el cielo*. Bs. As: Ed. Atlántida. Oro de cultura general. 1954.

FEINSTEIN, Alejandro. *Astronomía elemental.* Bs. As.:Ed. Kapelusz S.A.. 1969. ISBN 950-13-2020-0.

Universidad Nacional de Córdoba.
E-mail: astrojujuy@gmail.com