

CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES DE EGB3 Y FUTUROS PROFESORES DE NIVEL INICIAL

Fernanda Renzulli y Sara Scaglia

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

1. Introducción

Este trabajo forma parte de una investigación (C.A.I.+D. 2006) desarrollada en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina) en la que se indaga sobre las dificultades que poseen los alumnos en el aprendizaje de conceptos geométricos.

A lo largo de la investigación hemos tenido la ocasión de identificar en los alumnos algunos fenómenos que han sido estudiados por distintos investigadores (Hershkowitz, 1989; Matos, 1992; Schwarz y Hershkowitz, 1999; Moriena y Scaglia, 2003), como la formación de esquemas mentales (prototipos) de las figuras geométricas que están fuertemente marcados por características irrelevantes desde el punto de vista conceptual (la posición de la figura en la hoja, por ejemplo). Estos prototipos se forman, entre otras razones, por el uso casi exclusivo de representaciones gráficas estereotipadas durante la enseñanza de los conceptos geométricos. Hemos comprobado que algunos alumnos, si bien son capaces de reconocer las características definitorias de algunos conceptos geométricos sencillos como el de rombo, cuadrado y rectángulo, incluyen en sus descripciones estas características irrelevantes.

La dificultad para elaborar definiciones de conceptos geométricos sencillos la hemos constatado en estudiantes del Profesorado de Matemática que, a pesar de mostrar un desempeño satisfactorio en Geometría Euclídea Plana y Geometría Euclídea Espacial (asignaturas que forman parte del plan de formación), se ven en serias dificultades a la hora de expresar por escrito una definición del concepto de polígono, por ejemplo. No obstante, estos mismos alumnos son capaces de evaluar posteriormente sus definiciones de un modo satisfactorio, encontrando errores, presentando contraejemplos y realizando una clasificación de las mismas a partir de diversos criterios.

Vinner (1983) concibe un modelo para el estudio de los procesos cognitivos de los alumnos usando las nociones de imagen conceptual y definición conceptual. Este modelo resulta útil porque reconoce las dificultades que pueden plantearse a la hora de establecer una definición de un concepto, y el autor afirma que en el pensamiento, durante la resolución de problemas y actividades en las que entra el juego el concepto, normalmente la imagen conceptual será evocada, mientras que la definición puede permanecer inactiva e incluso puede ser olvidada.

Con la finalidad de comparar las producciones de dos grupos de estudiantes diferentes en torno a la clasificación de cuadriláteros, hemos implementado una actividad en un curso de 8° año de EGB y en 1° año del Profesorado de Nivel Inicial de la ciudad de Santa Fe. En el presente trabajo presentamos algunos elementos considerados en el marco teórico, la descripción de la actividad y de los sujetos que participaron en la experiencia, los resultados obtenidos y algunas conclusiones.

2. Encuadre teórico

Con el objeto de presentar justificaciones teóricas que intentan explicar las dificultades de los alumnos durante el estudio de conceptos geométricos, describimos algunas consideraciones desarrolladas por diversos autores.

Vinner (1983) desarrolla las nociones de imagen conceptual y definición conceptual. La primera incluye el conjunto de propiedades asociadas a un concepto junto con el dibujo mental, “la palabra ‘dibujo’ aquí es usada en el sentido amplio de la palabra e incluye cualquier representación visual del concepto (incluso símbolos). Por lo tanto un gráfico de una función específica y los símbolos ‘ $y = f(x)$ ’ podrían ser incluidos

(junto con muchas otras cosas) en el dibujo mental de alguien del concepto de función” (Vinner, 1983; p. 293). Por definición conceptual considera “una definición verbal que explica precisamente el concepto de un modo no circular” (Vinner, 1983; p. 293).

Vinner afirma que para manejar los conceptos se necesita una imagen conceptual y no una definición conceptual. Además, indica que las definiciones conceptuales (donde el concepto fue introducido por medio de una definición) permanecerán inactivas o incluso serán olvidadas. “En el pensamiento, casi siempre la imagen conceptual será evocada”. La imagen conceptual y la definición conceptual no pueden ser determinadas por la observación aislada de una conducta específica (por ejemplo, durante el estudio de las producciones de los alumnos durante una actividad o problema concreto).

En la actividad propuesta en nuestro trabajo, se solicita que los estudiantes agrupen un conjunto de cuadriláteros, definiendo las características consideradas en cada caso. De Villiers (1994) describe dos clasificaciones diferentes para los conceptos matemáticos. Por la expresión *clasificación jerárquica* hace referencia a la clasificación de un conjunto de conceptos de tal manera que los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales. En una *clasificación por partición*, en cambio, los subconjuntos de conceptos son considerados disjuntos unos de otros. Este autor menciona como ejemplos de clasificación jerárquica la clasificación de cuadriláteros que considera a los rectángulos y rombos como subconjunto de los paralelogramos, y a los cuadrados como la intersección entre rectángulos y rombos. En cambio, en una clasificación por partición los cuadrados no son rectángulos ni rombos, y los rectángulos y rombos no son paralelogramos.

Algunas de las funciones más importantes de la clasificación jerárquica mencionadas por De Villiers (1994, p. 15) son:

- “Conduce a definiciones de conceptos y formulaciones de teoremas más económicas.
- Simplifica la sistematización y derivación deductiva de propiedades de conceptos más especiales.
- A menudo proporciona un esquema conceptual más útil durante la resolución de problemas.
- Algunas veces sugiere definiciones alternativas y nuevas proposiciones.
- Proporciona una perspectiva global útil”.

Berté (1999) describe algunas dificultades en la construcción del saber matemático y menciona los obstáculos para la clasificación por inclusión (expresión utilizada por la autora para referirse a la clasificación jerárquica), originados por el hecho de que en la vida corriente se clasifica habitualmente por partición. La clasificación con particiones interfiere con las convenciones implícitas del lenguaje, dado que:

- a) “El verbo *ser* puede indicar la identidad o la inclusión: por ejemplo en las frases: “un cuadrado en un rectángulo” o “un cuadrado es un rombo con un ángulo recto”. [...]
- b) El artículo “*un*” es cuantificador existencial o un número cardinal.

Por ejemplo “en la frase ‘el cuadrado es un rombo con un ángulo recto’, los dos *un* no tienen el mismo valor. El primero es un artículo indeterminado, el segundo debe entenderse como un cuantificador ‘al menos un ángulo recto’.[...]

En la frase: “un triángulo es isósceles si tiene dos lados de la misma longitud”, es difícil comprender si se considera a “dos” como el cardinal dos. Si es así, entonces $2 \neq 3$ (en el sentido de los cardinales).[...]

En la frase citada, hay que entender “al menos dos lados. [...]

- c) *Principio del máximo de información*

En la vida corriente la información truncada es asimilada a la mentira, este principio no es seguido en matemática.” (Berté, 1999; p. 115)

En relación con la diferencia en el uso de vocabulario entre la vida cotidiana y la geometría, Berthelot y Salin (1993-1994) afirman que en la vida corriente no se califica como rectangular a un objeto de forma cuadrada, en tanto que en geometría calificar como rectángulo a un cuadrado supone un conocimiento que es objeto de enseñanza.

3. Sujetos de estudio

La actividad se administró en el año 2005 a dos grupos de alumnos correspondientes a diferentes niveles del sistema educativo: un grupo de 33 estudiantes de 8° de EGB de una escuela privada y un grupo de 44 estudiantes de primer año del Profesorado de Nivel Inicial de un instituto de la ciudad de Santa Fe. Todas las estudiantes son de sexo femenino.

En el grupo de EGB, la actividad forma parte de una secuencia didáctica diseñada por el equipo de investigación, que fue implementada por una de las integrantes que no es docente del curso. La actividad en el Profesorado de Nivel Inicial fue implementada por la docente del curso, que a su vez es integrante del equipo de investigación, también durante el desarrollo de una secuencia de actividades durante la cual se estudiaron los cuadriláteros.

Las estudiantes de EGB habían trabajado el año anterior la clasificación de cuadriláteros jerárquica, utilizando como criterio el paralelismo de lados opuestos. No poseemos información respecto de los conocimientos previos de cuadriláteros de las estudiantes de Profesorado de Nivel Inicial. Se trata alumnas que provienen de distintas instituciones educativas con realidades totalmente diferentes.

En los dos casos, la actividad se propone para explorar los conocimientos previos y obtener información sobre la imagen conceptual de cuadriláteros de cada grupo. Las estudiantes trabajaron en equipos. Cada equipo escribió sus conclusiones en papel afiche. Posteriormente, se realizó una puesta en común en la que las estudiantes tuvieron la oportunidad de conocer y discutir las producciones de todo el grupo.

4. Actividad

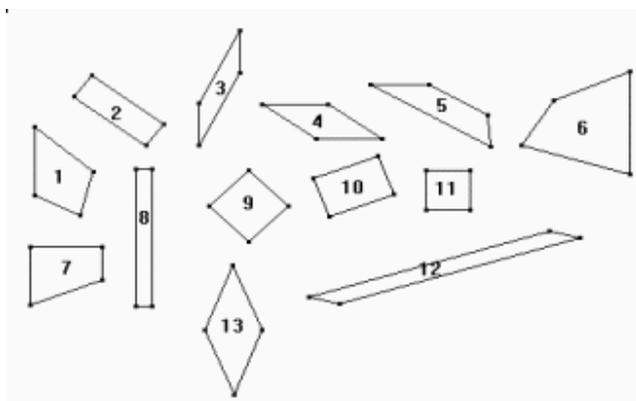
De acuerdo a Vinner, no podemos afirmar que con una actividad aislada podremos describir la imagen conceptual de los alumnos en torno al concepto de cuadrilátero. Por esta razón hablamos de describir elementos que forman parte de la imagen conceptual. Además, Vinner ha estudiado las imágenes conceptuales trabajando con alumnos de modo individual, no grupal. Sin embargo, en este trabajo estamos interesados en conocer las producciones grupales, porque se trata de alumnos con formaciones matemáticas diferentes y conjeturamos que el intercambio de ideas individuales puede enriquecer las producciones. Además, la actividad se presta mucho para el debate e intercambio de puntos de vista.

Atendiendo a algunas consideraciones realizadas en la Introducción, hemos incluido en el enunciado de la actividad representaciones gráficas diversas, que respondan o no a los prototipos habitualmente elaborados por los alumnos. Por ejemplo, las figuras 4 y 13 son representaciones gráficas de rombos, una presenta la posición comúnmente reconocida por los alumnos y la otra no.

Enunciado

Agrupar los siguientes cuadriláteros según alguna característica, de modo que ninguna figura quede sin formar parte de algún grupo.

Escriban la característica que tuvieron en cuenta para armar cada grupo.



5. Descripción y análisis de

resultados

A continuación presentamos las producciones de los distintos grupos de alumnos de cada institución.

Para cada clasificación se analizan los criterios¹ (propiedades o características de los cuadriláteros) considerados por los equipos para agruparlos, el hecho de si es posible considerar que la clasificación realizada es jerárquica o por partición, y si se trata o no de clasificaciones exhaustivas.

Una clasificación es exhaustiva cuando se cubren todos los casos posibles según el criterio adoptado en los cuadriláteros de la figura 1. Por ejemplo, si se trata del criterio *congruencia de lados*, una clasificación exhaustiva de los cuadriláteros de la figura 1 es la siguiente:

Equipo 3 (Alumnos de EGB)

Todos los lados desiguales: 1, 5, 6, 7.

Dos pares de lados iguales: 2, 3, 8, 10, 12.

Todos los lados iguales: (son rombos y cuadrados) 4, 9, 11, 13

A continuación incluimos un ejemplo de clasificación no exhaustiva según dos criterios: *congruencia de lados* y *paralelismo de lados opuestos*.

Equipo 2 (Alumnos de EGB)

a) Cuatro lados iguales (4, 9, 11 y 13)

b) Dos pares de lados paralelos (2, 3, 8, 10 y 12) (9, 4, 11 y 13)

c) Un par de lados paralelos (5 y 7)

d) Todos sus lados desiguales (1 y 6)

La clasificación anterior no menciona la posibilidad de dos pares de lados iguales respecto del criterio *congruencia de lados* (propiedad que satisfacen todos los cuadriláteros de la figura 1 excepto 5, 6 y 7). Tampoco menciona el caso de cuadriláteros con ningún par de lados opuestos paralelos, respecto del criterio *paralelismo de lados opuestos* (que incluiría los cuadriláteros 1 y 6).

Cabe mencionar que la no mención de una propiedad respecto a un criterio suele compensarse con la mención de una propiedad (en otro criterio) que cumplen los polígonos que quedan excluidos según el primer criterio. En el ejemplo anterior, no se menciona la posibilidad de “dos pares de lados iguales” y los cuadriláteros que cumplen esta propiedad pueden incluirse en el grupo (sí mencionado) de “dos pares de lados paralelos”. Notar, no obstante, que estas dos propiedades no son equivalentes. El romboide cumple una de ellas, pero no la otra.

Dado que las expresiones utilizadas por algunos equipos son confusas, hemos optado por explicar la interpretación efectuada para estudiarlas.

ESTUDIANTES DE 8° DE EGB

Equipo 1

Polígonos con un par de lados paralelos: 5 y 7

Polígonos con dos pares de lados paralelos: 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Polígonos con un par de lados secantes: 5 y 7.

Polígonos con dos pares de lados secantes: 1 y 6.

La expresión “polígonos con un par de lados secantes” no es correcta. Interpretamos que las alumnas quieren expresar “polígonos con un par de lados opuestos contenidos en rectas secantes”. De modo similar, interpretamos que la expresión imprecisa “polígonos con dos pares de lados secantes” está expresando “polígonos con dos pares de lados opuestos incluidos en rectas secantes”. Estas interpretaciones se pusieron de manifiesto durante la puesta en común.

¹ Criterio: juicio para discernir, clasificar o relacionar una cosa.

Notar que dos grupos están definidos por propiedades equivalentes (cuestión que se puso de manifiesto en la puesta en común): polígonos con un par de lados paralelos y polígonos con un par de lados secantes (siempre que se interprete **un par** como **un solo par**).

- Criterio utilizado en la clasificación: paralelismo de lados opuestos.

- Si interpretamos el criterio usado como “al menos un par de lados paralelos” la clasificación no es jerárquica, dado que los cuadriláteros con dos pares de lados paralelos no están incluidos en el grupo correspondiente a ‘un par de lados paralelos’. En estudiantes de EGB es muy difícil que se presente esta interpretación, nos inclinamos por pensar que las estudiantes interpretan “un **solo** par de lados paralelos” apoyándonos en las observaciones de Berté (1999). En este caso, al tratarse de clases disjuntas, sólo cabe una clasificación por partición.

- Es exhaustiva.

Equipo 2

a) Cuatro lados iguales (4, 9, 11 y 13)

b) Dos pares de lados paralelos (2, 3, 8, 10 y 12) (9, 4, 11 y 13)

c) Un par de lados paralelos (5 y 7)

d) Todos sus lados desiguales (1 y 6)

- Criterios utilizados en la clasificación: congruencia de lados y paralelismo de lados opuestos.

- Si analizamos en conjunto los dos criterios, las estudiantes han incluido los cuadriláteros con “cuatro lados iguales” en el grupo que posee “dos pares de lados opuestos paralelos”. Sin embargo, no han percibido que los cuadriláteros del grupo c) cumplen la condición mencionada en d). Reconocieron una inclusión pero no la otra.

Respecto del criterio paralelismo de lados opuestos vale la misma observación realizada en el equipo anterior. Respecto del criterio congruencia de lados, al tratarse de dos clases disjuntas, sólo cabe una clasificación por partición.

- No es exhaustiva respecto de ninguno de los criterios considerados.

Equipo 3

Todos los lados desiguales: 1, 5, 6, 7.

Dos pares de lados iguales: 2, 3, 8, 10, 12.

Todos los lados iguales: (son rombos y cuadrados²) 4, 9, 11, 13

- Criterio utilizado en la clasificación: congruencia de lados.

- Se trata de una clasificación por partición dado que los cuadriláteros con “todos los lados iguales” deberían incluirse en el grupo de cuadriláteros con “dos pares de lados iguales”. Es muy difícil que las estudiantes admitan que la existencia de cuatro lados iguales sea condición suficiente para la existencia de dos pares de lados iguales.

- Es exhaustiva.

Equipo 4

1, 5, 6, 7: no tienen lados congruentes.

2, 8, 9, 10, 11: tienen todos sus ángulos congruentes, rectos.

3, 4, 12, 13, 2, 8, 9, 10, 11: tienen dos pares de lados paralelos.

² Para describir los criterios utilizados en la clasificación no tendremos en cuenta la denominación dada al grupo, sino las propiedades que deben cumplir los cuadriláteros incluidos en él.

- Criterios utilizados en la clasificación: congruencia de lados, congruencia de ángulos y paralelismo de lados opuestos.
- Las alumnas presentan una clasificación jerárquica dado que incluyen los cuadriláteros con ángulos rectos en el grupo de cuadriláteros con dos pares de lados paralelos.
- No es exhaustiva respecto de ningún criterio.

Equipo 5

Los agrupamos en:

- Ángulos rectos: 2, 7, 8, 9, 10, 11.
- Ángulos agudos: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13.

La expresión “ángulos rectos” es interpretada como “presencia de al menos un ángulo recto”. Vale una aclaración similar para la expresión “ángulos agudos”.

- Criterio utilizado en la clasificación: amplitud de ángulos interiores.
- Se trata de una clasificación jerárquica, dado que el subconjunto particular de los trapecios rectángulos es incluido en los dos grupos definidos por los estudiantes.
- Es exhaustiva.

Equipo 6

* 1 par de lados // 5, 7

* 2 pares de lados // $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ pares de lados} = 2, 3, 8, 10, 12 \\ 4 \text{ lados} = 9, 11, 13, 4 \end{array} \right.$

* ningún p. lados // 1, 6

- Criterios utilizados en la clasificación: paralelismo de lados opuestos y congruencia de lados.
- Vale una observación similar a la realizada en el equipo 1 respecto de los criterios paralelismo de lados y congruencia de lados: se trata de una clasificación por partición, suponemos que los alumnos interpretan **un par** como **un solo par**.
- Es exhaustiva según el paralelismo de lados opuestos. No lo es para congruencia de lados.

Equipo 7

Cuadrilátero con sus ángulos rectos: 2, 8, 9, 10, 11.

Cuadriláteros con un par de lados paralelos: 3, 4, 5, 12, 13, 7.

Cuadriláteros con un par de lados iguales: 1 y 6.

- Criterios utilizados en la clasificación: amplitud de los ángulos interiores, paralelismo de lados opuestos y congruencia de lados.
- Se trata de una clasificación por partición, porque los cuadriláteros con ángulos rectos no están incluidos en ninguno de los dos grupos restantes. La expresión ‘un par’ es posiblemente interpretada como ‘un solo par’, por lo que no cabría (según esta interpretación) otra clasificación.
- No es exhaustiva para ningún criterio.

ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE NIVEL INICIAL³

Equipo 1

³ Un estudio en detalle de las respuestas de los alumnos del Instituto terciario se presenta en Mántica, Moriena y Scaglia (2005).

- 1) Por tener sus lados iguales: 13, 9, 11, 4.
- 2) Por tener un par de lados iguales y los otros dos desiguales a éstos: 2, 8, 12, 3 y 10
- 3) Por tener todos sus lados desiguales: 1, 7, 6 y 5.

Se interpreta que las estudiantes incluyen en el grupo 2) a los cuadriláteros que tienen dos pares de lados de diferente longitud.

- Criterio utilizado en la clasificación: congruencia de lados.
- Se trata de una clasificación por partición. En este caso, se explicita que el grupo 2) excluye el caso de que los dos pares considerados sean iguales entre sí.
- Es exhaustiva.

Equipo 2

- 1) 2, 3, 10, 12, 8. Todas esas figuras tienen sus bases iguales y sus lados iguales.
- 2) 4, 11, 13, 9. Todos sus lados son iguales.
- 3) 5, 6, 1, 7. Todos sus lados son desiguales.

- Criterio utilizado en la clasificación: congruencia de lados.
- Se trata de una clasificación por partición. Para que sea jerárquica, el grupo 2) debiera haberse incluido en el grupo 1).
- Es exhaustiva.

Equipo 3

- 1) Paralelogramos: porque tienen dos pares de lados opuestos paralelos. 13, 9, 3, 10, 4, 12, 2, 8 y 11.
- 2) Trapecios: porque tienen sólo un par de lados opuestos paralelos. 1, 7, 5, 6."

- Criterio utilizado en la clasificación: paralelismo de lados opuestos.
- Se trata de una clasificación por partición. Si se interpreta 'un par' de lados paralelos como 'al menos un par', el grupo 2) debería incluirse en el grupo 1).
- No es exhaustiva dado que falta la posibilidad: ningún par de lados opuestos paralelos.

Equipo 4

- 1) 3, 4, 12 y 13. Paralelogramos: los lados opuestos son paralelos y congruentes. Los ángulos opuestos son congruentes.
- 2) 1, 7, 6 y 5. Trapecios escalenos: sus lados son de distinta longitud.
- 3) 9, 11. Cuadrado: tienen los cuatro lados congruentes y los cuatro ángulos rectos. Las diagonales son congruentes y perpendiculares.
- 4) 2, 8, 10. Rectángulos: cuatro ángulos rectos, diagonales congruentes, lados opuestos iguales".

- Criterios utilizados en la clasificación: congruencia de lados, paralelismo de lados opuestos, amplitud y congruencia de ángulos, congruencia y perpendicularidad de diagonales.
- Se trata de una clasificación por partición, porque no está incluido el grupo 4) en el grupo 1) y el 3) no está incluido en 4 ni en 1).
- Respecto de la congruencia de lados, la clasificación es exhaustiva. Respecto de los criterios restantes, no lo es.

Equipo 5

- 1) Cuadriláteros de lados iguales. 13, 11, 9 y 4.
- 2) Rectángulos (dos pares de lados iguales): 2, 3, 8, 10, 12.
- 3) Trapecios (un par de lados paralelos). 7 y 5.

4) Trapezoides (ningún par de lados paralelos). 6 y 1.

- Criterios utilizados en la clasificación: congruencia de lados y paralelismo de lados opuestos. (Para la asignación de criterios atendemos sólo a las propiedades enunciadas en cada grupo y no a las denominaciones de los grupos, que no son correctas).
- Se trata de una clasificación por partición, dado que el grupo 1) (los cuadriláteros de lados iguales) no está incluido en el grupo 2).
- No es exhaustiva respecto de ningún criterio.

Equipo 6

- 1) Las figuras 3, 4, 12 y 13 tienen dos pares de lados paralelos e iguales, formando dos ángulos obtusos y dos ángulos agudos.
 - 2) Las figuras 2, 8, 9, 10 y 11 tienen dos pares de lados paralelos y cual forma cuatro ángulos de 90° .
 - 3) Las figuras 1, 5, 6 y 7 tienen sus lados desiguales.
- Criterios utilizados en la clasificación: congruencia de lados, paralelismo de lados opuestos, amplitud de ángulos.
 - Se trata de una clasificación por partición. No es posible organizar jerárquicamente las clases porque son disjuntas.
 - No es exhaustiva para ninguno de los criterios considerados.

Equipo 7

- 1) 1, 5, 6, 7. Son parecidos y sus lados son desiguales.
 - 2) 2, 8, 10. Son rectángulos⁴.
 - 3) 3, 12. Porque tienen sus lados paralelos.
 - 4) 4, 13. Porque son rombos.
 - 5) 9, 11. Porque son cuadrados (todos sus lados iguales)"
- Criterios utilizados en la clasificación: congruencia de lados, paralelismo de lados opuestos e identificación de cuadriláteros especiales.
 - Se trata de una clasificación por partición.
 - No es exhaustiva para ningún criterio.

Equipo 8

- 1) Las figuras 2, 8, 9, 10 y 11, tienen 2 pares de lados paralelos e iguales y forman 4 ángulos de 90° .
 - 2) Las figuras 3, 4, 12 y 13, tienen dos pares de lados paralelos e iguales entre sí, y forman dos ángulos obtusos y dos ángulos agudos.
 - 3) Las figuras 1, 7, 5 y 6 tienen todos sus lados desiguales.
- Criterios utilizados en la clasificación: congruencia de lados, paralelismo de lados opuestos y amplitud de ángulos.
 - Se trata de una clasificación por partición. Al tratarse de clases disjuntas no es posible clasificarlas jerárquicamente.
 - No es exhaustiva respecto de ningún criterio.

6. Discusión de los resultados

⁴ En este caso se tiene en cuenta la denominación dada, porque es la única característica que define al grupo.

Resumimos los criterios utilizados por los alumnos para agrupar cuadriláteros en la tabla 1.

| Criterios | EQUIPOS | |
|--|-----------------------|----------------------------------|
| | Estudiantes 8° EGB | Futuros Profesores N. Inicial |
| Congruencia de lados | 2, 3, 4, 6, 7 | 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 |
| Paralelismo de lados opuestos | 1, 2, 4, 6, 7 | 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| Amplitud de ángulos interiores | 4, 7 | 4, 6, 8 |
| Congruencia de ángulos interiores | 4, 5 | 4 |
| Características de las diagonales | | 4 |
| Identificación de cuadriláteros especiales | | 7 |

Tabla 1

Un primer análisis efectuado a partir de la tabla 1 es el número de criterios que utiliza cada equipo para clasificar los cuadriláteros convexos. Observamos que los futuros profesores, en general, utilizan un mayor número de criterios, y cada criterio no es desarrollado exhaustivamente, como veremos más adelante. En la siguiente tabla se resume esta información.

| ESTUDIANTES 8° EGB | | FUTUROS PROFESORES N.I. | |
|--------------------|-----------------|-------------------------|-----------------|
| Equipos | N° de criterios | Equipos | N° de criterios |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 |
| 4 | 4 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 5 | 2 |
| 6 | 2 | 6 | 3 |
| 7 | 3 | 7 | 3 |
| | | 8 | 3 |

Tabla 2

El promedio de criterios utilizados por equipo es algo superior en los futuros profesores. En general, se ha observado en estos últimos un exceso de descripciones en la conformación de los grupos de cuadriláteros.

Esta última afirmación podemos corroborarla mostrando el grado de exhaustividad de las clasificaciones en cada caso. En la tabla 3 resumimos la información respecto de la exhaustividad de las clasificaciones realizadas en cada caso. La tabla incluye, además, una organización de las clasificaciones en dos tipos:

- Sin error
- Error: inclusión errónea de una figura en un grupo. El ejemplo más frecuente es la inclusión del romboide 1 en el grupo de cuadriláteros con todos los lados desiguales.

| ALUMNOS DE 8° EGB | | | | |
|--------------------------------|------------|-------|-----------|-------|
| CRITERIOS | EXHAUSTIVA | | | |
| | Sin error | Error | Sin error | Error |
| Congruencia de lados | 6, 7 | 2, 4 | | 3 |
| Paralelismo de lados opuestos | 2, 4, 7 | | 1, 6 | |
| Amplitud de ángulos interiores | 4, 7 | | 5 | |

| | | | | |
|--|-------------------|---------|-----------|---------|
| Congruencia de ángulos interiores | 4, 5 | | | |
| Identificación de cuadriláteros especiales | | | | |
| FUTUROS PROFESORES NIVEL INICIAL | | | | |
| CRITERIOS | EXHAUSTIVA | | | |
| | Sin error | Error | Sin error | Error |
| Congruencia de lados | 5, 7 | 6, 7, 8 | | 1, 2, 4 |
| Paralelismo de lados opuestos | 4,6, 8, 5, 7 | 3 | | |
| Amplitud de ángulos interiores | 6, 8,4 | | | |
| Congruencia de ángulos interiores | 4 | | | |
| Características de las diagonales | 4 | | | |
| Identificación de cuadriláteros especiales | 7 | | | |

Tabla 3

Se observa en la tabla 3 que ningún equipo de Profesorado de Nivel Inicial presenta una clasificación exhaustiva sin errores. Además, tres equipos de EGB presentan clasificaciones con error, en tanto que las clasificaciones con errores en las estudiantes de Nivel Inicial se observan en siete equipos.

Con respecto a la distinción de las clasificaciones en jerárquicas o por partición, en la tabla 4 se resumen los resultados.

| Clasificación | ESTUDIANTES DE 8° EGB | FUTUROS PROFESORES |
|----------------------|------------------------------|---------------------------|
| Partición | 1, 2, 3, 6, 7 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| Jerárquica | 2, 4, 5 | |

Tabla 4

Atendiendo al hecho de que en estudiantes de Nivel Inicial no hay clasificaciones exhaustivas y que en general se usan más criterios en cada equipo, en este grupo se presenta la particularidad de que las estudiantes no incluyeron cada cuadrilátero en más de un grupo, hecho que era posible. Es decir, cada equipo define distintas clases de cuadriláteros, y algunos cuadriláteros de la figura 1 podrían incluirse en más de una clase, cuestión que no fue percibida por las alumnas, o en todo caso, si fueron conscientes de ello, no quedó de manifiesto en sus producciones. En cambio, tres equipos de EGB observaron el hecho e incluyeron algunos cuadriláteros de la figura 1 en más de un grupo. Mostramos un ejemplo a continuación:

Equipo 4 (EGB)

1, 5, 6, 7: no tienen lados congruentes.

2, 8, 9, 10, 11: tienen todos sus ángulos congruentes, rectos.

3, 4, 12, 13, 2, 8, 9, 10, 11: tienen dos pares de lados paralelos.

Para completar el análisis de las producciones, encontramos evidencias que los elementos que constituyen la imagen conceptual de cuadriláteros están organizados más coherentemente en los estudiantes de 8° de EGB que en los futuros profesores de Nivel Inicial. El abuso en la utilización de propiedades o características geométricas en la clasificación realizada por esos últimos, y la ausencia de conexiones pone de manifiesto que la imagen conceptual está formada por una serie de hechos aislados, que guardan poca relación entre sí.

Reflexiones finales

En general las producciones de las estudiantes de EGB 3 guardan mayor coherencia y tienen menos errores que las correspondientes a estudiantes de Nivel Inicial.

De Villiers (1994) afirma que se han reportado casos de estudiantes que siendo conscientes de la posibilidad de realizar clasificaciones jerárquicas, prefieren no utilizarlas. En nuestro caso algunos equipos de EGB 3 han presentado clasificaciones jerárquicas, y no todas estas clasificaciones corresponden a la que habían estudiado el año anterior. En cambio, en estudiantes de mayor edad (entre 18 y 20 años) no se presentó ninguna clasificación jerárquica. Reconociendo las bondades de esta última clasificación, parece que habría una mayor predisposición en alumnas de 13 años que en alumnas mayores a desarrollarlas en el estudio de los cuadriláteros.

Una explicación posible de estos resultados radica en que las futuras profesoras de Nivel Inicial, para la realización de la actividad, han recurrido a los aprendizajes de conceptos geométricos adquiridos en la escuela elemental, donde la clasificación que se trabaja es por partición.

Los resultados obtenidos en nuestro estudio alertan respecto de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la geometría relacionadas con las convenciones implícitas del lenguaje en matemática. El docente debe ser consciente de estas dificultades, y tenerlas en cuenta durante la planificación y el desarrollo de sus actividades.

Referencias bibliográficas

- BERTÉ, A. (1999). *Matemática Dinámica*. Buenos Aires: a-Z editora.
- BERTEHELOT R. Y SALIN (1993-1994), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.
- DE VILLIERS, M. (1994), The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14, 1, 11- 18.
- HERSHKOWITZ, R. (1989), Visualization in Geometry. Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 11 (1), 61-76.
- MÁNTICA A.M., MORIENA, S. Y SCAGLIA S. (2005). La imagen conceptual de cuadrilátero en un grupo de futuros docentes de Nivel Inicial. Comunicación presentada en C.A.R.E.M. 2005. Buenos Aires.
- MATOS, J.M. (1992), Cognitive Models in Geometry Learning. In Ponte JP., Matos, JF., Fernández, D. (eds.) *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*. New York: Springer Verlag, (pp. 93-112).
- MORIENA S. Y SCAGLIA S. (2003), Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría. *Educación Matemática*, 15 (1), 5-19.
- SCHWARZ, B. Y HERSHKOWITZ, R. (1999), Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. *Journal for Research Mathematics Education*, 30(4), 362-389.
- VINNER, S. (1983), Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics, Education, Science and Technology*, 14 (3), 293- 305.