"GEOMETRÍA y ESTADISTICA: UNA PROPUESTA CONCILIADORA"

NIVEL EGB 3 Y POLIMODAL (ESCUELA SECUNDARIA)

RUIZ, Ana María- MALLEA, Adriana

aruiz@ffha.unsj.edu.ar lamallea@ffha.unsj.edu.ar

Universidad Nacional de San Juan

INTRODUCCION

Los diversos agentes del sistema educativo compartimos una preocupación por la casi ausencia de la geometría en la escuela secundaria, acompañada en los últimos tiempos de la estadística y/o probabilidad. Sin duda estas ausencias responden a diferentes razones que justifican o no tal situación, de manera que reflexionar sobre ello constituye un verdadero reto para quienes tenemos la responsabilidad de su enseñanza.

Es reconocido por quienes tienen un vínculo con la enseñanza de la matemática, el hecho de que el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en las escuelas como en la formación docente. Son tantos los contenidos reconocidos de matemática respecto a aritmética, álgebra, funciones, que si algo "se cae" del programa por falta de tiempo es la geometría, acompañada últimamente de la estadística y la probabilidad.

Pero, ¿qué tienen en común estas ausencias? Cuando uno reflexiona al respecto encuentra no pocas coincidencias. Ambas ramas del conocimiento trabajan con datos de mediciones, aproximaciones, estimaciones, cuestiones probables,…¡y ahí está el punto en común! Existe un tipo de razonamiento para este trabajo que hace que no sea casual que contenidos relacionados con estas cuestiones (medir, aproximar, estimar) sólo estén presentes en programas. Somos testigos de una realidad educativa donde sigue primando en la enseñanza de la matemática un enfoque algorítmico con fuerte acento puesto en los resultados exactos. Pareciera que la matemática clásica presente en las aulas sólo se ocupara de dar soluciones exactas a sus problemas, cuando en la vida práctica muchas veces son suficientes soluciones aproximadas. Los riesgos de este trabajo, tan fuertemente instalado, es que se está produciendo una desconexión tal con la realidad que pareciera que la matemática de la escuela "sirve sólo para la escuela". Basta escuchar y analizar los comentarios de los alumnos cuando se encuentran con actividades donde la experimentación no coincide con los cálculos y sienten que la matemática no sirve en esos casos. Seguramente esta apreciación surge como resultado de un trabajo áulico con contenidos del tipo algorítmico, donde con un simple aprendizaje de técnicas los resultados "esperados" aparecen con éxito.

Alternar este trabajo con otro, donde el valor de la aproximación, estimación o probabilidad de ocurrencia de un resultado sea tan válido como el exacto, constituirá el eje de trabajo de esta propuesta.

Entendemos la alfabetización estadística como el conocimiento que todos los ciudadanos deben poder manipular para comprender la información (datos en un contexto específico). Con el objeto de desarrollar esta alfabetización, se propondrán actividades en el marco geométrico para la obtención de datos. Este marco es propicio ya que las estrategias de estimación y aproximación de cantidades y medidas, suponen del dominio de destrezas previas (mediciones y cálculos), que en la educación formal, y desde los primeros niveles, tienden a desarrollarse. Entendemos que comprender la medida implica comprender el proceso de medir, la inexactitud y variabilidad de los resultados, el concepto de error de medición y a qué puede ser atribuible, y la importancia en la selección de la unidad y el instrumento adecuado para lograr la precisión requerida para la situación planteada.

FUNDAMENTACION Y MARCO TEORICO

Nos ubicamos en una posición según la cual entendemos:

- la **situación didáctica**. como el conjunto de interacciones que se gestan entre los alumnos y el docente a propósito de un conocimiento, reconociendo en ella momentos en que los alumnos resuelven situaciones, momentos en los que se discute colectivamente sobre lo que se ha producido, momentos de elaboración personal, momentos en los que el docente aporta

la información necesaria para identificar dentro del conjunto de relaciones movilizadas aquellas que es necesario retener y que serán utilizadas en otras situaciones.
Se piensa la **institucionalización** de los saberes como un proceso, más que como un momento, y se entiende ésta como…"l*a toma en cuenta oficial por parte del alumno del objeto de conocimiento y por el maestro del aprendizaje del alumno siendo éste un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico",* (Brousseau, 1994).El proceso de institucionalización es simultáneo con un proceso de descontextualización, al cabo del cual será posible reconocer un saber de manera independiente de las situaciones en la que fue utilizado como medio de solución.

- Un concepto no aparece mágicamente como producto de la resolución de un problema. Creemos que en el momento del aprendizaje distintos problemas permiten "hacer funcionar" un concepto de diferentes maneras, cada una de las cuales hace posible establecer algunas propiedades y "modos de entender"específicos que forman parte del sentido del concepto. Con relación a un mismo concepto matemático, el status del conocimiento cambia para un sujeto cuando se ve confrontado con la exigencia de explicitar las relaciones utilizadas para resolver una situación. En otras palabras, el pasaje de lo implícito a lo explícito supone para el alumno una transformación de sus propios conocimientos.
  Las exigencias de **explicitación, de argumentación, de revisión y de validación** brindan oportunidades para transformar el conocimiento y hacerlo más reconocible; son por otra parte elementos esenciales para la constitución del sentido de los conocimientos.

- Interesa que el alumno comprenda que la estadística y la geometría son partes de la matemática que ofrecen herramientas para resolver ciertos problemas de la realidad, sin que por el excesivo carácter utilitario de las mismas se haga perder de vista a la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento y como modo de argumentación.
  Acordamos con Bkouche (1991) que:..*"Hay un motivo tanto o más fundamental que la utilidad: el desafío que plantea al alumno un problema en tanto tal. Lo que es importante para el alumno no es conocer la solución, es ser capaz de encontrarla el mismo y de construir así, a través de su actividad matemática, una imagen de sí positiva, valorizante frente a la matemática. La recompensa del problema resuelto no es la solución del problema, es el éxito de aquel que lo ha resuelto por sus propios medios, es la imagen que tiene de si mismo como alguien capaz de resolver problemas, de hacer matemática, de aprender".*

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

A continuación se presentan situaciones problemáticas haciendo uso de la geometría y la estadística y/o probabilidad con algunos comentarios sobre su implementación.
La situación problemática 1 y las actividades complementarias tienen como objetivo introducir, integrar y revisar, en el marco geométrico, las etapas del proceso estadístico y las nociones de parámetros estadísticos, con el análisis de sus ventajas y desventajas, a partir de la elección del mejor representante de un conjunto de datos obtenidos. Desde la geometría, el contenido que sustenta la situación es el concepto de medida y en el desarrollo se tendrá en cuenta:
- la importancia de estimar el valor de las cantidades, sin medir, ya sea de longitudes, superficies, capacidades, etc.
- la necesidad de adecuar la unidad con la cantidad a medir y con el instrumento disponible
- el análisis del error que se comete en toda medición

- **Situación problemática 1:** ***"Decidir en juegos televisivos"***

Suponga que usted participa de un juego de entretenimientos televisivos y puede ganarse un auto 0km. Le toca jugar con el juego de las pelotitas para el cual usted debe elegir una de las dos propuestas para participar.

Propuesta 1º: Se le muestra una caja cilíndrica y por simple observación deberá contestar: ¿Cuántas pelotitas contiene la caja?
Usted será el ganador del auto sólo si su respuesta difiere de la correcta en más, menos, una pelotita
Propuesta 2º: Se le proporcionaran algunos datos de la caja, por ejemplo: diámetro de la base y volumen de cada pelotita. Haciendo uso de esta información deberá contestar: ¿Cuántas pelotitas contiene la caja?
Usted será el ganador del auto sólo si su respuesta difiere de la correcta en más, menos, una pelotita

¿Qué opción elige y porqué?

Comentarios: La situación planteada puede simularse en clase mediante la presentación de un envase cilíndrico con pelotitas de tergopol de diferentes colores que se coloca sobre el escritorio, mesa o lugar visible, en una posición fija. Se les propone a los alumnos participar del juego bajo las dos propuestas en forma individual, y anotar las estimaciones obtenidas.

La realización de las actividades anteriores tiene por objetivo determinar la base de datos con la cual se trabajarán los contenidos estadísticos. Los procedimientos utilizados por los alumnos, en ambas propuestas, tienen características diferentes. Mientras que en la primera se manifiestan habilidades de visualizar objetos en el espacio y captar sus relaciones para estimar una cantidad discreta de objetos, en el segundo se ponen en juego conocimientos previos sobre geometría y medida. El concepto de capacidad y volumen de cuerpos, y las fórmulas para el cálculo de volumen de los mismos, son necesarios recordar y aplicar. Entre los datos que se proporcionan en la segunda propuesta para poder estimar la cantidad de pelotitas no se da la altura de la caja, variable cuantitativa de tipo continua que se deberá estimar. Se obtienen tres conjuntos de datos con los cuales se pueden revisar o introducir las etapas del proceso estadístico: ordenación, tabulación y graficación de datos. Con el objeto de elegir un valor que represente al grupo como única estimación para participar del juego se les plantea la siguiente actividad:

Actividad:
Con todos los datos del curso y para cada una de las estimaciones, determine un valor representativo por medio de cada uno de los siguientes criterios

Criterios:

a) Elija el valor correspondiente al valor máximo.
b) Elija el valor correspondiente al valor mínimo.
c) Elija el valor “intermedio” entre los dos anteriores.
d) Elija el valor más común (si lo hubiera).
e) Ordene de menor a mayor los valores y elija el valor que está en la mitad de la fila
f) Sume todos los valores y luego divida dicho número por el número de observaciones.

Comentarios
Con los criterios anteriores se están introduciendo las ideas de media (o promedio), mediana y moda, entre otras, como valores tentativos de transmitir información sobre una población finita. La comparación entre estos parámetros en el contexto de la situación planteada (elegir el mejor representante) es lo que permite el debate que lleva a la caracterización de cada uno de estos valores y al análisis de sus ventajas y desventajas. Por otra parte, la elección de uno u otro dependerá de la colección de valores en sí misma y el uso que se le quiera dar, pues acordamos con Russel y Mokros (1991) que la comprensión de la idea de "valor típico" implica tipos diferentes de capacidades, y entre las que destacan:

- Dado un conjunto de datos, comprender la necesidad de emplear un valor central, y elegir el más adecuado.
- Comprender el efecto que, sobre las medidas de posición (media, mediana o moda), tiene un cambio en todos los datos o parte de ellos.

Actividades complementarias

Actividad 1: *¿Cuánto espacio queda vacío?*
Si el volumen de una pelota de tenis es, aproximadamente, 113,09 cm^3; ¿qué porcentaje del volumen del envase queda vacío?; ¿será igual este resultado si en lugar de pelotas de tenis llenamos el envase con pelotas de ping pong?.
Realiza la experiencia, Investiga y saca conclusiones.

Actividad 2: "*Explorando relaciones en cajas cilíndricas*"
a)Investigar si la altura del envase de las pelotas de tenis es igual, menor o mayor que el contorno de la tapa.
Analiza estas relaciones en otras cajas cilíndricas de diferente tamaño y saca conclusiones
b)Realiza el mismo análisis relacionando el contorno de la tapa y el diámetro de la misma.
En cada caso, registra la medida de la longitud de la circunferencia y la del diámetro y calcula el cociente entre ambas. ¿Qué observas?
¿Qué recurso utilizarías para calcular la medida aproximada del diámetro?

Actividad 3: "*¿En qué caja caben más?*"
Para envasar bombones un fabricante quiere hacer cajas cilíndricas. El material para construir la cara curva viene en hojas rectangulares. Si se las cierra por el lado más largo toma la forma y las dimensiones de la caja de la situación problemática anterior.
Si se las cierra por el lado más largo;
¿Cabe la misma cantidad de bombones que si se las cierra por el lado más corto?.
Estimen la respuesta y verifiquen si estuvieron acertados

Actividad 4: *¿Cuánto mide esta varilla?*
Se muestra a los alumnos una varilla de 75cm de largo, en forma horizontal y sostenida por los extremos en una posición fija, y se les propone que estimen su longitud en centímetros (variable cuantitativa continua), escribiendo ese dato en un papel y en forma anónima para entregarlo al docente. Con base de datos estas estimaciones, se puede trabajar con datos agrupados en intervalos de clase, y con el fin de elegir la mejor estimación como representante del curso analizar los conceptos de parámetros de centralización, y su determinación, para estos casos, utilizando los criterios de la situación problemática planteada en el trabajo anterior.

Actividad 5: *¿Cuánto mide el mástil de la bandera de la escuela?*
Se plantea este interrogante a los alumnos cuando ya hubieran trabajado con el concepto de semejanza de triángulos y visto las aplicaciones del teorema de Thales. ¿Cómo usar estos conceptos para dar respuesta a este interrogante? Proponer realizar la experiencia de "estimar" la medida del mástil de la bandera repitiendo el proceso que realizó Thales de Mileto cuando fue retado a calcular la altura de la pirámide de Keops en su viaje a Egipto.
En días de sol y cerca del mediodía cuando la longitud de la sombra proyectada por el mástil es más corta y pueda ser medida, colocar una varilla de longitud conocida en una posición vertical de manera que su sombra termine donde termina la sombra del mástil. Esquemáticamente se determinan dos triángulos semejantes (pues recordar que los rayos de sol caen paralelamente a la tierra) de donde se puede obtener, aproximadamente, la altura del mástil.
Esta actividad proponer realizarla en grupo y en días y horas diferentes. Deberán discutir cuando se tengan las estimaciones de todos los grupos con qué criterio elegirán el valor buscado. Comparar finalmente esta estimación con el valor real, que en edificios públicos es de 10 metros.

Comentarios
Como hemos podido observar con las actividades anteriores, el trabajo con estimaciones, de cantidades y medidas, constituye un buen recurso para la obtención y el análisis descriptivo de datos. Son innumerables las actividades que, en el marco geométrico, se pueden diseñar a efectos de reforzar este enfoque experimental en la enseñanza de la estadística, y que a su vez sirven de motivación para integrar y revisar ciertas relaciones geométricas.

La situación problemática 2 y las actividades complementarias que le siguen tienen por objetivo, desde lo estadístico, introducir la noción de distribución de frecuencias de variables continuas y el análisis de su comportamiento, y desde lo geométrico reforzar el concepto de semejanza y proporcionalidad.

- **Situación problemática 2:** ***"Explorando relaciones en el cuerpo humano"***

Tomando como centro de nuestro cuerpo el ombligo, y después de medir la distancia entre éste y los pies (a) y la cabeza (b) trasladar y completar los datos en la siguiente tabla

a	b	a+b	a+b/a	a/b

a) Comparar los datos obtenidos entre todos los alumnos del curso
b) ¿Qué valor has obtenido al calcular la razón a/b?
c) Selecciona un grupo de alumnos pequeños y otro de adultos, mídelos y completa nuevamente la tabla con estos valores
d) ¿Qué ocurre con los niños pequeños?, ¿Y con los adultos?
e) ¿Existe siempre la misma relación?

Comentarios: Es claro que en la actividad anterior está presente el concepto de razón áurea, también llamada "la divina proporción". Este es un concepto tan elemental para los artistas como lo son las cuatro operaciones para el matemático.
Pero ¿qué es la divina proporción?, ¿cuándo un rectángulo se dice que está en la razón áurea o divina proporción? Estos interrogantes pueden resultar interesantes y motivo de investigación para trabajar este concepto.
Pero debemos aprovechar las bases de datos obtenidas y qué mejor que analizar el comportamiento de la distribución de las alturas, por ejemplo (de la tabla anterior la columna con la información a+b). Proponer realizar un gráfico adecuado para cada uno de los grupos y compararlos. De manera natural se introduce la noción de distribución de una variable continua y se analiza su comportamiento.

Actividades complementarias

Actividad 1: "*Rectángulos áureos y el cuerpo humano*"
a)Una de las medidas del cuerpo humano que interviene en la llamada "proporción áurea" es la distancia entre los extremos de los brazos extendidos. Tome una muestra de alumnos de su escuela y mídalos apoyados contra el pizarrón con los brazos extendidos.
Verifique para cada alumno la relación áurea en el rectángulo determinado por su altura (a+b del cuadro de la situación problemática) y la medida de los extremos de sus brazos.

Actividad 2: "*En busca de rectángulos áureos*"
Los griegos conocieron la llamada "razón áurea" o de la "divina proporción" que suponía debería existir entre los lados de un rectángulo para que el mismo alcanzara el mayor nivel desde el punto de vista de la estética. Esta razón áurea se encuentra en muchas fachadas de edificios clásicos, lo mismo que en ciertos cuadros famosos y las tapas de muchos libros y cuadernos.

a) Busca ejemplos de rectángulos áureos y verifica que lo son
b) Analiza gráficamente la distribución de frecuencias de las medidas de sus lados
c) Analiza gráficamente la distribución de frecuencias de las medidas de sus perímetros y áreas

Comentarios
Sin duda el cuerpo humano constituye una inagotable fuente de información numérica y geométrica con datos que merecen un verdadero análisis. Existen muchas relaciones en el cuerpo humano que no son caprichosas, sino que hacen a la armonía de la belleza humana. Explorar estas relaciones debería constituir un desafío para el trabajo estadístico ya que muchas de estas relaciones no son del tipo matemáticas sino estadísticas. Al respecto podemos plantear

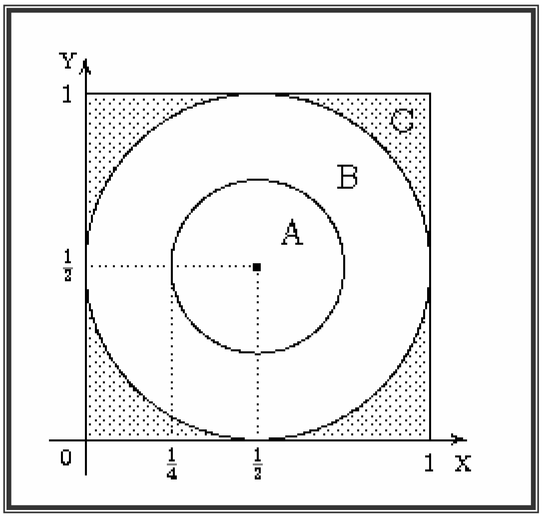
la siguiente situación para investigar que puede ser el punto de partida para el trabajo con regresión lineal.

Para investigar: *"Otras relaciones en el cuerpo humano"*
¿Qué relación existe entre la distancia rodilla-talón y talón-dedo gordo del pie?
¿Dependerá este resultado del sexo de la persona? ¿Dependerá de la edad?
¡Investígalo!

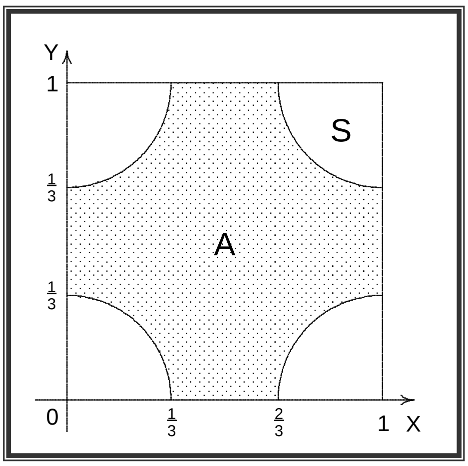
La situación problemática 3 tiene por objetivo introducir la noción de probabilidades geométricas en espacios muestrales no contables, S, de medida geométrica finita m(S), tales como la longitud o el área.

- **Situación problemática 3: *"Dar en el blanco"***

Suponga que usted participa de un juego de entretenimientos televisivos y puede ganarse un auto 0km. Le toca jugar con el juego de dar en el blanco para el cual usted debe elegir una de las dos propuestas para participar.
Propuesta 1º: Se lanza un dardo sobre la figura y usted gana si su dardo cae en la zona que usted elija para participar, A, B o C



Propuesta 2: Se lanza un dardo sobre la figura y usted gana si su dardo cae en la zona que usted elija para participar, la A o la S



¿En cuál de las dos propuestas y bajo qué elección tiene más probabilidad de ganarse el auto? Justifique su respuesta

Comentarios
La situación anterior puede resultar interesante para introducir la noción de probabilidad geométrica, esto es, probabilidades en espacios no discretos. El trabajo con probabilidades geométricas es una buena oportunidad para revisar el tema de áreas de figuras sombradas en un contexto de aleatoriedad.

Actividad complementaria
Diseñe dos propuestas para jugar a "dar en el blanco", de manera tal que las zonas bajo cada una de ellas lleve a igual probabilidad de ganar.

CONSIDERACIONES FINALES

Lo desarrollado anteriormente es tan sólo una muestra de los muchos ejemplos que existen para trabajar de manera integrada contenidos geométricos y estadísticos y que sirven de punto de partida para la tarea áulica.
Intentamos que docentes y alumnos se reencuentren con actividades que atrapen el interés sobre el quehacer geométrico y estadístico, y revaloricen la importancia de la enseñanza de estas ramas de la matemática como recurso para el desarrollo del pensamiento crítico y el razonamiento lógico.
Sabemos del desafío que supone trabajar con estas temáticas, si esta propuesta contribuye a un intento de hacerlo, seguramente ¡habrá cumplido su objetivo!

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Batanero, C. (2000c). *Significado y comprensión de las medidas de tendencia central.* Rev. UNO, 25,41-58

[2] Begg,A (1997) *Some emerging influences underpining assessment in statistics*. En I. Gal y J. Garfields (Eds), *The assessmenyt challenge in statistics education*. Amsterdam: IOS Press

[3] Berté, Annie (1998). *Matemática de EGB 3 al Polimodal. Ed. A-Z. Bs. As.*

[4] Brousseau, Guy, (1994) Fundamentos y métodos de la Teoría de situaciones Versión castellana publicada por FAMAF, Córdoba, 1994

[5] Cobo, B. Y Batanero, C.(2000*). La mediana en la secundaria. ¿Un concepto sencillo?.* Rev. UNO, 24

[6] Crespo Crespo, C. y otros. (1998). *¿La matemática en problemas?. Una propuesta para el abordaje de la geometría y el azar en el aula. La selección de los contenidos: probabilidad y estadística* (Cap.4). Fundación Prociencia . Bs. As.

[7] Fisher, R. A. (1958*). Statiscal methods for research workers* (13 edición). New York: Hafner

[8] Holmes,P (1980) *Teaching Statistics* 11-16. Sloug: Foulsham Educational.

[9] Mallea, Adriana, Herrera, Myriam, Ruiz, Ana Marñia (2003) *Estadística en el Nivel Polimodal. Propuesta Didáctica en las distintas modalidades.* Edita: Área de publicaciones de la FFHA.UNSJ

[10] Mnisterio de Cultura y Educación de la Nación (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*

[11] Mokros, J.R.y Russell, S.J.(1995). *Chidren´s concepts of average and representativeness. Journal for Research in Mathematics Educations, 26, 20-39*

[12] R. Bkoche y otros. (1991). *Faire des mathématiques: le plaisirs du sens,* Paría, Armand Colin.

[13] Russell, S.J. y Mokros, J.R. (1991). *What´s Typical?, Children´s Ideas about* Voorburg. The Nefherlands; International Statiscal Institute) 307-313.

[14] Santaló,L. Y otros. (1994) *De educación y Estadística* Ed. Kapeluz .Bs. As.