Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática

María Rey Genicio, Liliana Tapia, Héctor Tarifa, Clarisa Hernández
Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Jujuy- Argentina
tresm@imagine.com.ar

Consideraciones sobre la propuesta

Si bien el aprendizaje y la enseñanza se estudian a partir de disciplinas diferentes y debe evitarse el planteo de un hipotético único proceso indiferenciado de enseñanza-aprendizaje, en tanto deben enfocarse sus componentes desde la respectiva indagación científica de sus propios campos, es obvio que enseñanza y aprendizaje se intersecan en el aula y obligan a la integración diferenciada de ambos procesos.

Para el caso de la matemática escolar la situación es idéntica y obliga tanto a los profesores de la asignatura como a quienes investigan en dicho campo, a nutrirse de los aportes de la psicología educacional, las teorías de aprendizaje conjuntamente con los de la Didáctica, en especial de la Didáctica de la matemática, cuyo desarrollo es amplio y fecundo, al punto de haber dado ricas aportaciones a la disciplina general. Y todo ello, a la vez, con un fuerte conocimiento disciplinar. Ambos aspectos, formación disciplinar y formación pedagógica deben estar firmemente presentes para que exista una adecuada transposición didáctica.

Ahora bien, es obvio que tanto el aprendizaje como la enseñanza pueden enfocarse desde diferentes paradigmas, con resultados muy distantes a nivel de la práctica áulica. Este trabajo se sustenta en una concepción cognitiva en la cual el aprendizaje efectivo es mediado por los procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significados y requiere que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento. Sin embargo, como es muy frecuente que los conocimientos construidos por la comunidad científica acerca de cómo se aprende, como es el caso del cognitivismo, se hayan traspolado al aula aún cuando hayan sido fruto de investigaciones fuera de la escuela o no sean de aplicación didáctica, es necesario que los conocimientos teóricos se transformen en la práctica y en manos del docente en ***estrategias didácticas*** adecuadas. Cecilia Bixio utiliza este concepto para designar "al conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y explícita intencionalidad pedagógica" (Bixio. 1998- p.35), las que deben:

- apoyarse en las construcciones previas de los alumnos para garantizar la significatividad de los contenidos a aprender.
- ser factibles de desarrollarse en el transcurso del ciclo lectivo, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.
- orientar las construcciones de conocimientos lo más significativos posibles, para ello el material debe ser potencialmente significativo
- ser pertinentes con los objetivos
- adecuarse a las posibilidades reales del docente y a las condiciones materiales de la institución donde se realiza dicha práctica.

De todas las actividades y recursos que el docente utiliza como estrategias didácticas, se señala que algunos funcionan como *mediación instrumental* , y son los instrumentos psicológicos que permiten presentar, ordenar, exponer, etc. el contenido. Otros funcionan como *mediación social*, y son los intercambios personales, las interacciones que se producen en las actividades conjuntas o colectivas. Entonces el proceso de aprendizaje equivale a un proceso de interiorización que logra mejores resultados en la medida en que los procesos de mediación instrumental y social se articulan, teniendo en cuenta las condiciones objetivas del contenido a enseñar y las condiciones subjetivas de los docentes y alumnos.

Se toma en cuenta también como aspecto importante la Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo, aunque en ellos se hace necesaria una intervención del docente cuidadosa, optimizando las actividades, facilitando los intercambios cognitivos, supervisando, recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos.

Desde el campo de la Didáctica de la matemática, este trabajo se apoya en las aportaciones de Guy Brousseau y su *«Teoría de las Situaciones Didácticas».* Este autor introduce como objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática la *«Situación Didáctica»* a la que define como: "*Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema*

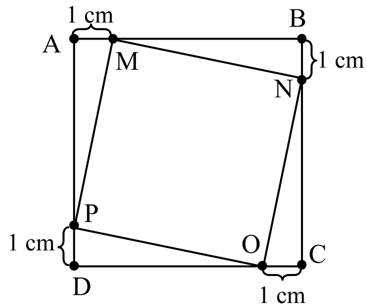
educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución". (1986)
Pegado a este concepto está el de *«Situación a–didáctica»* en la que el docente no muestra su intencionalidad ni interviene para indicar al alumno lo que debe hacer; lo que realiza es una «*devolución del problema*»; provoca que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje. Denomina *«Situación fundamental»* al conjunto de situaciones a-didácticas que permiten responder a un conjunto de problemas que constituyan una buena representación del conocimiento en cuestión. De este modo, el alumno habrá aprendido un conocimiento matemático si logró adaptarse a las situaciones a-didácticas que conforman la situación fundamental.
Otra cuestión relevante en la mirada de este autor es que, ante el hecho de que el matemático despersonaliza y descontextualiza el conocimiento que ha producido la ciencia matemática, el docente debe hacer el proceso inverso, realizando una *«recontextualización»* y buscando situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar. Podrá aprovechar el espacio sociocultural en el que está inmerso, valerse de situaciones de la vida diaria, de otras disciplinas o de la misma matemática y proponer un problema o conjunto de problemas que apunten al conocimiento que se quiere lograr. Una vez resueltos el docente procederá a la *«descontextualización»* de ese conocimiento reconociendo lo que tenga de general, haciendo de él un conocimiento disponible para ser reutilizado en otras situaciones, desprendido de las que le dieron origen.
También desde el campo de la Didáctica de la Matemática, la propuesta se apoya en la «Ingeniería Didáctica»**:** elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje. El docente debe buscar el conjunto de problemas diversos que apuntan al concepto que se propone enseñar, con niveles crecientes de complejidad; esto permite identificar aspectos distintos del concepto, aspectos que no se podrían elaborar a partir de la definición. Los problemas diseñados deben responder a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Douady: los enunciados deben tener sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos deben estar en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos registros de representación (geométrico, algebraico, funcional y gráfico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Entonces, se trata de enfrentar a los alumnos ante una situación donde el conocimiento a aprender sea el único medio eficaz para controlar dicha situación. Ese concepto no aparece aislado, se conecta con otros en un entramado de relaciones que el alumno debe alcanzar a conocer.
Como puede apreciarse, tanto la concepción de enseñanza en la posición de Brousseau, como los aportes de Douady, son compatibles con la concepción de aprendizaje desde el cognitivismo que se plantea como sustento de esta investigación, ya que otorgan un papel activo al sujeto que aprende, haciendo foco en la comprensión y la contextualización significativa del conocimiento matemático.

Propuesta didáctica
Esta propuesta está basada en el marco teórico ya expuesto. En ella se pretende que los alumnos, a través de la secuencia de actividades presentada, alcancen la construcción del concepto de función cuadrática y el descubrimiento de la fórmula de la misma.
Se puede apreciar en esta secuencia que, a la manera de Brousseau, el docente organiza la actividad otorgándoles a los alumnos la responsabilidad de la construcción de un conocimiento matemático constituído. Para ello, se comienza con una situación "a-didáctica" donde no se explicita la intencionalidad final, tampoco interviene diciendo qué deben hacer para resolver el problema, pero sí se presenta una cadena de problemas (Situación fundamental) que representan el conocimiento a aprender. A la vez, la secuencia permite la contextualización del saber matemático para luego llevar a la descontextualización que éste implica en la fórmula en cuestión.
También se advierte que la línea de Regine Douady está sustentando la propuesta en lo que hace al diseño de actividades en crecientes niveles de complejidad y la presencia del conocimiento en diferentes marcos. Esta misma línea sostiene la elaboración de los problemas sobre la base de las caracterísitcas del "buen problema"; así, se podrá ver que la Actividad 1 se resuelve con conocimientos previos de los alumnos, y la mayoría tiene alguna respuesta posible para dar. Las siguientes actividades, asimismo, apelan a los diferentes marcos (geométrico, numérico, algebraico, funcional, etc.), y evolucionan de modo que el saber matemático a aprender es el único que efectivamente servirá para resolver lo planteado.

Para introducir a los alumnos en el tema que nos proponemos enseñar, es conveniente que previamente se organice la clase en grupos de 3 o 4 alumnos cada uno. Luego se le propondrá a los grupos la siguiente actividad didáctica, de la cual se pretende la construcción por parte del alumno del concepto de función cuadrática. Es conveniente que el docente sea una guía sobre los pasos a seguir en esta actividad.

<u>*Actividad 1*</u>

a) Dado el cuadrado ABCD de 10 cm de lado y cuatro puntos M, N, O y P ubicados según los datos del gráfico; encontrar el área del cuadrado MNOP



b) Repetir la actividad anterior considerando que las medidas de las distancias de los puntos M, N, O y P a los respectivos vértices sean: 4; 6; 9; 2,4; 7,6.
c) Encontrar una fórmula que permita calcular el área del cuadrado MNOP cuando la distancia a los vértices es x cm.
d) Investigue cuál será la distancia de los puntos M, N, O y P a los respectivos vértices para que el área sea mínima.

En la puesta en marcha de esta actividad los alumnos presentaron 3 estrategias distintas de resolución. La mayoría usó el Teorema de Pitágoras para obtener el lado del cuadrado menor. Un solo grupo pensó en obtener el área de uno de los triángulos rectángulos, multiplicarla por 4 y restársela a la del cuadrado mayor. En otro grupo apareció un procedimiento, similar al anterior, pero que indica una variación en el modo de pensar: juntaron los cuatro triángulos formando un rectángulo (dibujados en un costado de la hoja de trabajo), sacaron su área y la restaron del cuadrado mayor.
Se realizó una puesta en común en la que los alumnos expusieron sus estrategias de resolución. Para economizar tiempo solo lo hicieron con el primer inciso, para los restantes se cotejaron los resultados ya que la intención del docente era principalmente la socialización de los distintos procedimientos. Por la intervención del profesor se usó una tabla de valores como una forma más cómoda y perceptible de presentar los resultados en su relación con la variación de los datos.
En esta puesta en común se pudo observar, y así también se comprobó en las hojas de trabajo, que los grupos que resolvieron los problemas usando el teorema de Pitágoras calcularon el valor de la hipotenusa sacando la raíz cuadrada a la que luego elevaban al cuadrado para obtener el área. Fue llamativo que no observaran lo innecesario de realizar estos dos cálculos inversos; ni siquiera en la reiteración del procedimiento para los distintos valores. Eso hace suponer que sus pensamientos se mantuvieron ligados al problema concreto a resolver, que no reflexionaron sobre los cálculos que estaban realizando sino que procedieron mecánicamente. Que esto sucediera, fue algo interesante, ya que los resultados no fueron exactamente iguales a los que obtuvieron quienes trabajaron la diferencia de áreas. Esta variación, provocada por la pérdida de cifras decimales al calcular las raíces, dio lugar a debatir sobre: la relación entre el cuadrado de un número como operación aritmética y como área de una figura cuadrangular; el carácter inverso de las operaciones de radicación y potenciación, la infinitud de las cifras decimales de los números irracionales y sus valores aproximados; como así también, conjeturar la validez de los distintos procedimientos.
Otro rasgo general que se observó fue que los alumnos rápidamente se dieron cuenta que para los pares de valores que eran complemento a 10 era innecesario realizar los dos cálculos. También encontraron fácilmente que el área mínima la iban a encontrar cuando el vértice se ubicara en el medio del lado del cuadrado mayor.
Cuando se les pidió la generalización de los cálculos en una fórmula, aparecieron, por cada procedimiento, tres fórmulas distintas:

área = $x^2 + (10 - x)^2$ (los que usaron el Teorema de Pitágoras)
área = $100 - 20x + 2x^2$ (los que restaron las áreas de los 4 triángulos)
área = $100 - [\,2x(10 - x)\,]$ (los que formaron un rectángulo con los 4 triángulos)

Pocos fueron los grupos que no llegaron a simbolizar correctamente, algunos se limitaron a escribir que el área era la hipotenusa elevada al cuadrado y otros no presentaron nada. Pero, como todos habían podido resolver el problema en el marco aritmético, en la puesta en común se encontraron suficientemente receptivos para interpretar la resolución en el marco algebraico.

Posteriormente se puso a los alumnos ante el conflicto de que decidieran cuál era la fórmula correcta, como inmediatamente decidieron que las tres eran válidas, se les propuso que reconocieran la equivalencia entre ellas, cuestión que resolvieron con sencillos pasos algebraicos.
Después de esto el docente se apoyó en las producciones presentadas para trabajar los conceptos de función cuadrática, variable independiente y variable dependiente y formalizar la expresión: Area $(x) = 100 - 20 x + 2 x^2$

Actividad 2

a) Con los resultados obtenidos en la actividad anterior armar una tabla de valores.
b) Volcar los datos en un sistema de coordenadas cartesianas.
c) Teniendo en cuenta lo trabajado hasta el momento:
   i) ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable independiente?
   ii) ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable dependiente?
   iii) ¿Se pueden unir los puntos del gráfico con una curva?

La discusión de esta actividad fue el momento propicio para denominar el tipo de gráfica, determinar el dominio y la imagen de la función analizada e introducir la clasificación de variable continua y variable discreta. Se presentó la forma general de la función cuadrática y se dieron los nombres de los coeficientes de los distintos términos. Para caracterizar la parábola la docente solicitó a los alumnos que redactaran un mensaje que permitiera construir una parábola sin que se la conozca. Después de algunos minutos, mientras la profesora escuchaba los mensajes realizaba las gráficas de otros tipos de curvas si las instrucciones eran insuficientes o inadecuadas. De este modo los mensajes se fueron ajustando y se llegó a obtener los elementos que caracterizan la parábola: vértice, eje de simetría y concavidad.

Actividad 3

a) *Realizar una tabla de valores y representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas la función:* $\mathbf{y = x^2}$
b) Del gráfico obtenido en el punto anterior escribir lo que se observa en cuanto a eje de simetría y coordenadas del vértice.
c) *Detallar las similitudes y diferencias que se observan al comparar los gráficos de:* $y = x^2$ *con* Area$(x) = 2 x^2 - 20 x + 100$
d) *Modificar la fórmula de la función* $y = x^2$ *para que la parábola:*
   i) Quede abierta hacia abajo.
   ii) La curva sea más cerrada
   iii) La curva sea más abierta.
   iv) Se desplace 1, 2 y 3 unidades hacia arriba.
   v) Se desplace 1, 2 y 3 unidades hacia abajo.
   vi) Se desplace1, 2 y 3 unidades hacia la izquierda.
   vii) Se desplace 1,2 y 3 unidades hacia la derecha.

Esta actividad fue un desafío muy valioso para los alumnos. No tuvieron inconvenientes para encontrar la fórmula de la parábola cóncava hacia abajo, ni para encontrar los desplazamientos verticales; demoraron un poco más para lograr que la parábola fuera más abierta o más cerrada que la parábola base. Lo llamativo fue que sistemáticamente todos los grupos usaron el número 2 multiplicando o dividiendo a x^2 según el caso.
Lo que no lograron fue el desplazamiento horizontal, pero todos los grupos estuvieron altamente motivados intentando diferentes modificaciones para lograr ese desplazamiento. El docente debió explicar este punto, de todos modos el aprendizaje fue significativo puesto que las elaboraciones previas realizadas por los alumnos permitieron un fácil entendimiento. También, con la guía del docente en un diálogo dirigido a todo el grupo de clase, se generalizaron las condiciones para que la parábola fuera más abierta o más cerrada que la parábola base y la relación entre el vértice de la parábola y los valores numéricos intervinientes en las fórmulas propuestas.
El trabajo siguiente fue inverso, se entregó a los alumnos un trabajo práctico en el que se les daban distintas funciones cuadráticas y debían determinar el sentido de la abertura, las coordenadas del vértice y su concavidad y desplazamientos respecto de la parábola base. Esta actividad completó el aprendizaje permitiendo que los alumnos resolvieran, con gran soltura, pasajes de la gráfica a la expresión canónica de la función y viceversa.
El trabajo práctico posterior estuvo referido a las expresiones polinómica y canónica de la función cuadrática. Previamente se retomó la fórmula que habían encontrado para hallar el área del cuadrado y se la comparó con las que ellos habían ido trabajando en las modificaciones realiza-

das a la fórmula de la parábola base para cambiar los desplazamientos y las aberturas. A partir de allí el docente comunicó los nombres de estos dos tipos de expresiones. Seguidamente se trabajó el pasaje de la forma canónica a la polinómica; esto no presentó ninguna dificultad ya que solo exigía sencillos pasos algebraicos. Por ser el pasaje inverso mucho más complicado se pensó en una serie de problemas debidamente secuenciados para que obtuvieran la forma general para realizar este pasaje.

Actividad 4

– En cada caso encuentra la fórmula polinómica correspondiente a la fórmula canónica dada:

a) $y = (x + 3)^2 - 9$ *b)* $y = (x - 2/3)^2 - 4/9$

c) $y = (x + 5/2)^2 - 25/4$ *d)* $y = (x + 1)^2 + 3$

e) $y = (x - 3)^2 - 1$ *f)* $y = (x + 2/3)^2 - 1/3$

2.– Sin hacer los gráficos de las funciones cuadráticas dadas en el ejercicio anterior, ¿Podrías decir cuáles de ellos pasan por el origen del sistema cartesiano?

3. – En las fórmulas de las funciones cuyos gráficos pasan por el origen

a) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática polinómica

b) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática canónica.

c) Establece una vinculación entre la fórmula canónica y la polinómica.

4.– En cada caso, encuentra la fórmula canónica correspondiente a la fórmula polinómica dada y las coordenadas del vértice de la parábola.

a) $y = x^2 + 4x$ *b)* $y = x^2 - 6x$ *c)* $y = x^2 - 9x$

d) $y = x^2 + 6x/5$ *e)* $y = x^2 - 7x/3$ *f)* $y = x^2 + bx$

5.– Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica y las coordenadas del vértice de la parábola.

a) $y = x^2 + 8x - 1$ *b)* $y = x^2 - 7x + 5$

c) $y = x^2 - 3x + 1/2$ *d)* $y = x^2 + 7x/5 + 11/20$

e) $y = x^2 + bx + c$

6.– Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica y las coordenadas del vértice de la parábola.

a) $y = 3x^2 + 6x - 3$ *b)* $y = 2x^2 - 5x + 3$

c) $y = 4x^2 - 3x + 5$ *d)* $y = 5x^2 + 7x + 2$

7. – Expresa $y = ax^2 + bx + c$ *en la forma canónica y escribe las coordenadas del vértice de la parábola*

8. – Dada la siguiente función de segundo grado $y = 2x^2 - 10x + 8$

a) Exprésala en forma canónica.

b) Escribe las coordenadas del vértice.

c) Encuentra los ceros de la función

d) Grafícala en coordenadas cartesianas ortogonales.

9. – Recordando el problema del área del cuadrado dado Area (x) = $2x^2 - 20x + 100$ *¿Cuánto tiene que valer x para que el área sea 58?*

10. – Encuentra una fórmula que te permita resolver la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

Los alumnos no presentaron dificultades para resolver los problemas 1 a 5. En el sexto, el docente debió explicar la forma de sacar factor común el coeficiente del término cuadrático ya que los alumnos no habían estado anteriormente ante situaciones en la que debían sacar como factor común a un coeficiente que no figurara en los distintos términos.

La organización de esta secuencia fue muy efectiva para la construcción de estos conocimientos ya que los alumnos fueron pasando de una dificultad a otra usando como base lo construido en la actividad anterior. Además de los aprendizajes logrados para pasar de la expresión polinómica a la canónica, esto fue una base firme para la obtención de las fórmulas de las coordenadas del vértice y la de la resolución de la ecuación de segundo grado.

Todo esto fue un valioso soporte que permitió continuar con problemas que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado, con el análisis del discriminante, las propiedades de las raíces y la reconstrucción de la ecuación de segundo grado.

Conclusión

Los actividades diseñados responden a las condiciones del buen problema ya que, los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos, todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta (al menos para el problema inicial), admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (numérico, geométrico, algebraico y gráfico).

En toda la propuesta se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para resolverlos, al mismo tiempo las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad.
A lo largo de la propuesta se incluye una gran variedad de aplicaciones de forma que el docente elija aquellas que considere más apropiada al grupo de alumnos.

Referencias Bibliográficas

- ARTIGUE, M. (1995) Ingeniería didáctica en educación matemática. G.E.I.. México.
- DOUADY, R. Dialéctica instrumento–objeto. Juego de encuadres. Cuadernode Didáctica de la Matemática nº3. Edición mecanografiada
- BROUSSEAU, G "Los roles del maestro" cap.de PARRA, C, SAIZ, I, otros. Didáctica de la Matemática. Compilación. Paidos . Bs. As. 1994
- BIXIO, Cecilia (1998) Enseñar y aprender. Homo Sapiens. Bs.As.