Utilización de los Números Reales en la Geometría y en la Física

Norberto Fava, Graciela Fernández y Héctor Pérez

Resumen

La utilización de los números reales en la Geometría y en la Física tiene su fundamento en el concepto abstracto de magnitud continua, que es el objeto de este artículo.

1. Introducción. Las leyes que rigen las operaciones entre números reales y cantidades físicas –entre éstas, las geométricas– suelen aceptarse sin fundamento sólido en los primeros años, generalmente por falta de tiempo y de madurez. De ello se ocupa la teoría de las magnitudes continuas, que nos parece útil estudiar alguna vez desde un punto de vista formal.

El ejemplo más representativo de una magnitud continua es la *longitud*. Las longitudes pueden sumarse y compararse por su tamaño, y no hay quien ignore las propiedades de dichas operaciones que tienen su origen en experiencias concretas. El apéndice al final del artículo muestra cómo se formaliza la noción de longitud en el marco axiomático de los *Fundamentos* de Hilbert.

Otros ejemplos de magnitudes continuas son el *tiempo* y la *masa*, así como las magnitudes derivadas: *área*, *volumen*, *velocidad*, *aceleración*, *fuerza*, *presión*, *trabajo*, etc.

El artículo de G. Vitali en la Colección [1] se titula *Sobre las aplicaciones del Postulado de Continuidad en la Geometría Elemental*. Una de ellas es la elegante demostración de la propiedad de Arquímedes debida a O. Stolz (teorema 2 de este artículo). El tema que nos ocupa sirve de fundamento al Análisis Dimensional [2, 3 y 4]. El artículo de Lebesgue [5] exhibe el número real desde el punto de vista operativo que hemos adoptado aquí.

En lo que sigue nos restringimos a las magnitudes que en algunos textos se llaman *magnitudes escalares positivas*. Algunas demostraciones se dejan como ejercicios. A pesar de ello no hemos podido evitar algún que otro pasaje aunque breve, de inocultable aridez. Los enunciados con números romanos son los axiomas de la teoría.

2. Magnitudes continuas. Consideremos un conjunto $\mathcal{M} = \{A, B, C, \ldots\}$ entre cuyos elementos se ha definido una ley de composición "+", llamada *suma*, de modo tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

I. (asociatividad) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

II. (conmutatividad) $A + B = B + A$.

III. *Existe un elemento* $0 \in \mathcal{M}$ *tal que* $A + 0 = A$ *para cualquier* A.

IV. *Si* $A + B = 0$, *entonces* $A = B = 0$.

DEFINICIÓN. *Decimos que* A *es menor que* B *e indistintamente escribimos* $A < B$ *o* $B > A$, *si existe* $L \neq 0$ *tal que* $B = A + L$.

Inmediatamente se deducen las siguientes afirmaciones:

1º) $A \neq 0$ equivale a $A > 0$; 2º) $A < B$ y $B < C$ implican $A < C$.

V. (tricotomía) *Para cualquier par de elementos de* $\mathcal{M}$ *se cumple una y sólo una de las relaciones* $A < B$, $A = B$, $A > B$.

Corolario. *Si* $A < B$, *entonces* $A+C < B+C$; *si* $A+C = B+C$, *entonces* $A = B$ *(ley cancelativa).*

DEFINICIÓN. *Si* $B < A$, *el único* L *que satisface* $A = B + L$ *se llama* diferencia *entre* A *y* B *y se denota por* $A - B$.

Se demuestra fácilmente que las relaciones $A < B < C$ implican

$$C - B < C - A.$$

VI. *Si* $A > 0$, *entonces existe* B *tal que* $0 < B < A$.

Tácitamente supondremos que $\mathcal{M}$ no es trivial, es decir, que contiene elementos distintos de 0.

Las fórmulas

$$1A = A, \quad (n+1)A = nA + A,$$

definen de modo inductivo el producto del entero positivo n por el elemento A. Por el mismo método inductivo se prueban las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} (m+n)A &= mA + nA, & m(nA) &= (mn)A \\ n(A+B) &= nA + nB, & n(A-B) &= nA - nB. \end{aligned}$$

Notemos que estamos habilitados para escribir sin ambigüedad mnA en lugar de $m(nA)$ o $(mn)A$.

Dejamos como ejercicio probar las siguientes afirmaciones:

(1$^{\text{o}}$) Si $nA = 0$, entonces $A = 0$;

(2$^{\text{o}}$) Si para algún $A \neq 0$, $mA = nA$, entonces $m = n$.

VII. (postulado de continuidad). *Si* $\mathcal{H}$ *y* $\mathcal{K}$ *son subconjuntos no vacíos de* $\mathcal{M}$ *con la propiedad de que cualquier elemento del primero es menor que cualquiera del segundo, entonces existe* $B \in \mathcal{M}$ *tal que* $H \leq B \leq K$ *para cualquier* H *del primer conjunto y cualquier* K *del segundo.*

Teorema 1. (divisibilidad). *Dados* A *y* n, *existe un único* B *tal que* $nB = A$.

Para su demostración necesitamos el siguiente lema.

Lema. *Si* $A > 0$*, entonces para cualquier* n *existe* $B > 0$ *tal que* $nB < A$.

En efecto, el axioma VI permite escribir A en la forma $A = B_1 + C_1$, donde $0 < B_1 \leq C_1$. Luego $2B_1 \leq A$; y aplicando el mismo argumento a B_1, podemos hallar $B_2 > 0$ tal que $2B_2 \leq B_1$, de donde $2^2 B_2 \leq A$.

Por inducción, para cada entero positivo n existe un elemento $B_n > 0$ tal que $2^n B_n \leq A$, de modo que $nB_n < 2^n B_n \leq A$, lo que demuestra el lema.

Para probar el teorema consideremos una partición de $\mathcal{M}$ en dos clases: $\mathcal{H} = (H)$ y $\mathcal{K} = (K)$, definidas por las relaciones $nH \leq A$ y $nK > A$, respectivamente. La primera clase no es vacía en virtud del lema; la segunda tampoco lo es por una razón más inmediata.

En virtud del postulado de continuidad existe un elemento B tal que $H \leq B \leq K$ para cualquier H de la primera clase y cualquier K de la segunda. Veamos ahora que cualquiera de las relaciones $nB < A$ y $nB > A$ es imposible. Si fuera $nB < A$, podríamos hallar $D > 0$ tal que $nD < A - nB$; es decir, $n(B + D) < A$, lo que es absurdo. Si fuera $nB > A$, existiría un elemento $D > 0$ tal que $nD < nB - A < nB$, de donde $n(B - D) > A$, que es también absurdo. Luego, $nB = A$ como queríamos probar. Finalmente, la unicidad de B se demuestra muy fácilmente.

Definición. *Dados* A *y* n*, el único* B *que verifica* $nB = A$ *se denota por* A/n*. En particular,* $A/1 = A$.

Teorema 2. (propiedad de Arquímedes). *Si* $0 < B < A$*, entonces existe* n *tal que* $nB > A$.

La siguiente demostración se debe a Otto Stolz (1842-1905).

Suponiendo que tal n no existiera, definamos una partición de $\mathcal{M}$ en dos clases (H) y (K), según los siguientes criterios:

$$(\mathbf{a})\ (\forall n)\ nH < A; \qquad (\mathbf{b})\ (\exists n)\ nK > A.$$

Notemos que $nK = A$ implicaría $(n+1)K > A$. Es claro que B pertenece a la primera clase y A a la segunda, y asimismo que cada H es menor que cualquier K.

En tal situación, el postulado de continuidad afirma la existencia de un elemento C que verifica $H \le C \le K$ para cualquier H de la primera clase y cualquier K de la segunda.

Consideremos ahora un elemento L tal que $0 < L < C$ (axioma VI). Entonces existe n tal que $n(C+L) > A$, y por consiguiente,

$$2n\frac{C+L}{2} > A,$$

lo que es absurdo, pues $\dfrac{C+L}{2} < C$. Q.E.D.

Nota Histórica. Al mismo Stolz se debe la moderna definición de diferenciabilidad de una función de varias variables.

3. Producto por números fraccionarios. Es conveniente, para lo que sigue, introducir algunas definiciones.

Definición. *Si f y g son funciones de $\mathcal{M}$ en sí mismo, la suma y el producto de ambas se definen por medio de las fórmulas*

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \qquad (fg)(A) = f(g(A)),$$

y en forma abreviada escribiremos fA en lugar de $f(A)$.

A la luz de esta definición, las reglas operativas

$$(m+n)A = mA + nA \quad \text{y} \quad m(nA) = (mn)A$$

expresan que *a la suma y al producto de los números m y n corresponden la suma y el producto de las funciones:*

$$A \to mA \quad \text{y} \quad A \to nA.$$

Además, por lo visto anteriormente, dichas funciones coinciden si y sólo si $m = n$. Estas propiedades justifican la identificación del entero positivo n con la función $A \to nA$, que adoptamos de aquí en adelante. Más generalmente:

Definición. *Si m y n son enteros positivos, denotamos por m/n la función de $\mathcal{M}$ en sí mismo definida por el siguiente esquema:*

$$A \to m(A/n),$$

y escribimos $(m/n)A$ o bien $\frac{m}{n}A$ para denotar la imagen del elemento A.

Notemos que la relación $(n/1)A = n(A/1) = nA$ conduce a la siguiente igualdad entre funciones:

$$\frac{n}{1} = n.$$

Dejamos a cargo del lector la demostración de las siguientes afirmaciones:

1. $\dfrac{m}{n}A = \dfrac{mA}{n}$
2. $\dfrac{A/n}{k} = \dfrac{A}{nk}$
3. $\dfrac{m}{n} = \dfrac{mk}{nk}$
4. $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$ si y sólo si $mq = pn$
5. $\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{mq + pn}{nq}, \quad \dfrac{m}{n}\dfrac{p}{q} = \dfrac{mp}{nq}$

Las últimas fórmulas justifican la identificación del número racional m/n con la correspondiente función de $\mathcal{M}$ en sí mismo, que adoptaremos en adelante.

> Definición. *El elemento $(m/n)A$ se llama producto del número m/n por el elemento A.*

Siendo r y s racionales positivos, es fácil ver que si $A > 0$ y $r < s$, entonces $rA < sA$.

4. Producto por números reales. El producto del número real positivo ρ por un elemento $A > 0$ se define como el único elemento B de $\mathcal{M}$ que satisface $rA < B < r'A$ para cualquier par de números racionales positivos r y r' que verifiquen $r < \rho < r'$. La existencia y la unicidad de B están garantizadas por el postulado de continuidad y la propiedad de Arquímedes. Conviene extender la definición poniendo $0A = 0$ y $\rho 0 = 0$.

> Teorema 3. $\rho A + \sigma A = (\rho + \sigma)A, \quad \rho(\sigma A) = (\rho\sigma)A.$

Haremos la demostración suponiendo que $A > 0$ y que los números ρ y σ son positivos.

1º) Sean t y t' números racionales positivos que verifican $t < \rho + \sigma < t'$. Entonces existen racionales positivos r, r', s, s' tales que

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s', \quad t < r + s, \quad r' + s' < t'.$$

En tales condiciones tendremos:

$$tA < (r + s)A = rA + sA < \rho A + \sigma A < r'A + s'A = (r' + s')A < t'A,$$

lo que demuestra la primera fórmula, en virtud de la unicidad del producto.

2º) Sean t y t' racionales positivos que verifican $t < \rho\sigma < t'$. Entonces existen racionales positivos r, r', s, s' tales que

$$r < \rho < r', \quad , \quad s < \sigma < s', \quad t < rs, \quad r's' < t',$$

y en tales condiciones tendremos:

$$tA < (rs)A = r(sA) < r(\sigma A) < \rho(\sigma A) < r'(\sigma A) < r'(s'A) = (r's')A < t'A,$$

lo que demuestra la segunda fórmula.

El siguiente –último– teorema afirma la existencia de una razón entre A y B, siempre que sea $B > 0$.

TEOREMA 4. *Si $B > 0$, entonces para cualquier A existe un único $\rho \geq 0$ tal que $A = \rho B$.*

La demostración es inmediata si $A = 0$. Suponiendo $A > 0$, definimos ρ como la mínima cota superior de los números racionales positivos r tales que $rB < A$. Es fácil comprobar que $r < \rho < r'$ implica $rB < A < r'B$, lo que demuestra que $A = \rho B$. La unicidad del número ρ es también inmediata.

El número ρ al que se refiere el teorema anterior se llama *razón* o *cociente* entre A y B y se escribe $\rho = A/B$ o bien $\rho = A : B$.

COROLARIO. *Si $U > 0$ y $\beta > 0$, entonces $(\alpha U)/(\beta U) = \alpha/\beta$.*

Generalmente se elige como unidad un elemento $U > 0$. En tal circunstancia el número $\alpha = A/U$ es la *medida* de A con respecto a U, y el corolario suele expresarse diciendo que *la razón entre dos elementos de $\mathcal{M}$ es igual al cociente de sus medidas con respecto a una misma unidad.*

La formalización de la noción de longitud como ejemplo de magnitud abstracta puede hacerse en forma axiomática, como se describe a continuación.

I. *Si P y Q son puntos distintos, existe un punto R que sigue a P y precede a Q en el orden PQ del segmento.*

II. (postulado de continuidad) *Si el segmento PQ se divide en dos partes de suerte que:* 1^{o}*) todo punto de PQ pertenece a una de ellas;* 2^{o}*) el extremo P pertenece a la primera parte y Q a la segunda;* 3^{o}*) cualquier punto de la primera parte precede a cualquier punto de la segunda en el orden PQ del segmento, entonces existe un punto R de PQ tal que todo punto del segmento que preceda a R pertenece a la primera parte, y todo punto del mismo que siga a R pertenece a la segunda.*

Designamos a los segmentos por letras minúsculas: a, b, c, etc., y adoptamos como primitiva la noción de congruencia. Para afirmar que a es *congruente* con b escribimos $a \equiv b$. Los siguientes son los postulados de la congruencia entre segmentos:

1. *La congruencia es una relación de equivalencia.*
2. *El segmento PQ es congruente con QP.*
3. *Si un punto R del segmento PQ y un punto R' del segmento $P'Q'$ son tales que $PR \equiv P'R'$ y $RQ \equiv R'Q'$, entonces $PQ \equiv P'Q'$.*
4. *Ningún segmento es congruente con otro segmento propiamente incluido en el primero.*
5. *Dados: un segmento a y una semirrecta de origen O, existe un punto P de la misma tal que $OP \equiv a$* (el punto P es único en virtud del axioma anterior).

Definición. *La clase de equivalencia del segmento a con respecto a la relación de congruencia se llama longitud de a y se denota por $\overline{a}$.*

Denotamos las longitudes por letras mayúsculas: A, B, C, etc. y el conjunto de todas ellas por $\mathcal{L}$.

Para definir la suma de las longitudes $A = \overline{a}$ y $B = \overline{b}$, consideramos dos semirrectas opuestas con origen en un punto O. En una de ellas elegimos un punto P tal que $OP \equiv a$, y en la semirrecta opuesta un punto Q tal que $OQ \equiv b$. En estas condiciones, definimos $A + B$ como la clase de equivalencia del segmento PQ; es decir, $A + B = \overline{PQ}$.

En base a los axiomas se prueba fácilmente que la suma de longitudes está bien definida y goza de las propiedades asociativa y conmutativa.

Antes de dejar al lector la tarea de probar que $(\mathcal{L}, +)$ satisface los axiomas de una magnitud continua haremos dos observaciones útiles:

1º) Los axiomas permiten probar la ley cancelativa de la suma: si $A + B = A + C$, entonces $B = C$.

2º) Los segmentos cuyos extremos coinciden son congruentes entre sí y definen la longitud nula. En efecto,

$$\overline{PP} + \overline{PQ} = \overline{PQ} = \overline{PQ} + \overline{QQ},$$

y la conclusión se obtiene aplicando la ley cancelativa.

Referencias

1. F. Enriques, U. Amaldi, A. Guarducci, G. Vitali y G. Vailatti (con prólogo de J. Rey Pastor) *Fundamentos de la Geometría*, Editorial Ibero-Americana, Buenos Aires, 1948.

2. N. Fava y U. Molter, *Units of Measurement*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 33, n^o2 (2002), 293-299.

3. R. Kurth, *A Note on Dimensional Analysis*, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), pp. 965-969.

4. ———— *Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics*, Pergamon Press, 1972.

5. H. Lebesgue, *Sur la mesure des grandeurs*, L'Enseignement mathématique, Tom XXXI (1931) a XXXIV (1935).

Graciela Fernández. Universidad de Buenos Aires. Universidad Católica Argentina.
E-mail: graifernandez@gmail.com

Héctor Pérez. Universidad de Buenos Aires. Universidad Católica Argentina.
E-mail: hperez@caece.edu.ar

Norberto Fava. Universidad de Buenos Aires. Universidad Católica Argentina.
E-mail: norberto_fava@uca.edu.ar