

Optimización práctica: modelos del proceso de operación de un embalse.*

Graciela M. Croceri

Graciela N. Sottosanto †

Resumen

En este trabajo se describen problemas relacionados a procesos de operación de un embalse que pueden ser modelados y resueltos usando técnicas de la optimización. El objetivo primordial es mostrar cómo la optimización se relaciona con problemas del mundo real a través de la formulación de modelos matemáticos y cómo se vinculan la teoría y los algoritmos, a partir de la resolución numérica de los modelos y la interpretación de los resultados obtenidos.

Puesto que se observa la necesidad del desarrollo de aplicaciones reales en la enseñanza de la optimización, los problemas presentados se proponen como proyecto a los alumnos de asignaturas donde se desarrollen tópicos como programación lineal y no lineal. Si bien la característica de la temática involucrada hace que los problemas estén especialmente dirigidos a alumnos de las diferentes orientaciones de la ingeniería, pueden ser formulados igualmente, como práctica para alumnos de licenciatura en matemática.

Asimismo, se espera que, con la información proporcionada, el alumno formule adecuadamente los modelos, los resuelva numéricamente a través del uso de softwares disponibles y realice el análisis e interpretación de los resultados obtenidos.

1 Introducción

La matemática aplicada muestra su verdadero potencial en la resolución de modelos de problemas del mundo real. Es allí donde el usuario pone de manifiesto su intuición y descubre detalles relevantes de la aplicación, formulación, solución e interpretación

*Este trabajo ha sido financiado por Universidad Nacional del Comahue, Proyecto E060.

†Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Santa Fe 1400, 8300 Neuquén, Argentina, {gcroceri-gsottos}@uncoma.edu.ar.

de los resultados. Realizar en el aula experiencias que introduzcan las técnicas de la optimización a través de problemas reales es importante porque la necesidad de resolver un problema concreto despierta en el alumno el interés por el conocimiento y la incorporación de una herramienta nueva, ya sea matemática o computacional. Del mismo modo, una vez adquiridos los conocimientos teóricos, es posible su conexión con las aplicaciones a través de problemas o proyectos integradores.

La metodología del uso de proyectos en la enseñanza ofrece a los estudiantes la oportunidad de participar activamente en la construcción del conocimiento de conceptos fundamentales, les permite enriquecer su formación a partir de la interdisciplinariedad y mejorar su desempeño como miembro de un equipo a partir de intercambiar opiniones, reflexionar sobre los resultados y obtener conclusiones.

En este trabajo se describen problemas relacionados a procesos de operación de un embalse que pueden ser modelados y resueltos usando las técnicas de la optimización. El objetivo primordial es mostrar cómo la optimización se relaciona con problemas del mundo real a través de la formulación de modelos matemáticos y cómo se vinculan la teoría y los algoritmos, a partir de la resolución numérica de los modelos y la interpretación de los resultados obtenidos.

Asimismo, en el proyecto que puede ser suministrado a los alumnos, intervienen otras herramientas del análisis numérico como son el ajuste de curvas de datos mediante polinomios e interpolación polinómica. Herramientas adicionales del análisis estadístico también pueden estar involucradas.

El trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se describen los lineamientos del modelo general de optimización que describe la operación de un embalse. En las secciones 3 y 4 se presentan los modelos lineal y no lineal, los métodos de resolución y el análisis e interpretación de los resultados obtenidos. Finalmente, conclusiones y comentarios adicionales sobre el proyecto propuesto se dan en la sección 5.

2 Formulación de los modelos

En esta sección presentamos los lineamientos generales para la formulación de modelos de optimización para la operación de un embalse. Si bien un embalse es una obra de ingeniería muy compleja y su operación puede perseguir la optimización de varios objetivos simultáneamente tales como generación de energía, control de crecidas, regulación de caudales, riego, etc., en este trabajo se presenta una versión simplificada con el único objetivo de lograr que el operador pueda tomar las mejores decisiones

que cumplan con las restricciones impuestas al proceso y contribuyan a maximizar su beneficio económico.

Se ha elegido para este trabajo, el complejo hidroeléctrico Alicurá [6, 7], que puede definirse como un complejo “aislado” cuyo propósito casi excluyente es la generación de energía eléctrica. Es el primer emprendimiento sobre el río Limay desde su nacimiento y está en una región donde no hay centros poblados, ni zonas que requieran riego y a una distancia considerable del siguiente embalse aguas abajo. Todas estas características simplifican notablemente su modelado como problema de optimización tanto desde el punto de vista de la función objetivo como de las restricciones involucradas.

La idea consiste en formular un modelo de optimización de mediano plazo que, una vez verificado mediante una prueba retrospectiva, pueda ser usado para planificar y tomar decisiones. Asimismo, el modelo planteado, originalmente no lineal, puede ser simplificado convenientemente de modo que se pueda resolver numéricamente usando las técnicas de la programación lineal. De esta manera se tiene la ventaja de que el alumno experimente con las herramientas de la optimización lineal y no lineal y se enfrente a la problemática de analizar los resultados obtenidos y decidir cuál es el camino más conveniente.

2.1 Datos técnicos más destacados

Presa de materiales sueltos zonificada

- Altura máxima: 130 mts.
- Nivel de coronamiento sobre el nivel del mar: 710 mts.
- Longitud de coronamiento: 850 mts.
- Volumen de materiales: 13 hm^3 .
- Vertedero con capacidad máxima: $3.000 \text{ m}^3/\text{seg}$.
- Nivel máximo normal del embalse sobre el nivel del mar: 705 mts.
- Nivel mínimo normal del embalse sobre el nivel del mar: 692 mts.
- Superficie del embalse a cota 705 msnm.: 65 km^2 .
- Volumen del embalse a cota 705 msnm.: 3.150 hm^3 .

Central hidroeléctrica

- Salto útil nominal: 116 mts.
- Potencia instalada : 1.000 MW.
- Generación media anual: 2.360 GWh.

2.2 Variables del problema

Como se propone un modelo que pueda ser utilizado para predecir, a mediano plazo, qué tipo de operación es más ventajosa realizar en el embalse, es conveniente trabajar con una discretización en el tiempo de periodos mensuales. De este modo las variables del problema resultan

- V_E^i volumen de agua almacenado por el embalse en el periodo i .
- V_A^i volumen de agua aportado por el río al embalse en el periodo i .
- V_T^i volumen de agua que pasa por las turbinas y se usa efectivamente para la generación de energía en el periodo i .
- V_V^i volumen de agua vertido en el periodo i .
- H^i cota de embalse correspondiente al periodo i , que depende del volumen embalsado.

2.3 Función objetivo

El objetivo es fundamentalmente económico y consiste en maximizar el beneficio (B) que recibe el concesionario por la generación de energía eléctrica.

La función a maximizar resulta una sumatoria donde cada término es el producto de la energía producida (E) por el precio de la misma (P) es decir

$$B = \sum_{i=1}^n P^i E^i. \quad (1)$$

donde n será el número de periodos mensuales a considerar.

La energía generada por un complejo hidroeléctrico en cada periodo es función del volumen turbinado y de la cota media H_{med}^i desde la que se turbinan,

$$E^i = k H_{med}^i V_T^i \quad (2)$$

donde k es una constante que incluye factores de conversión y de eficiencia del aprovechamiento ¹ con lo cual

$$B = \sum_{i=1}^n k P^i H_{med}^i V_T^i. \quad (3)$$

¹En el modelo adoptamos $k = 40.31 Mwh/hm^4$

2.4 Restricciones del problema

Las restricciones dependen de las características propias del problema y de las normas impuestas por el ente regulador de la misma.

Como el agua vertida no produce energía eléctrica y por lo tanto beneficio económico se debe evitar este hecho y verter solo cuando el embalse está lleno. La suma de los volúmenes turbinados y vertidos constituye el volumen erogado. Los requerimientos del ente regulador imponen que el embalse opere dentro de la llamada Franja de Operación Normal, es decir por debajo del nivel máximo normal (705 msnm) y por encima del nivel mínimo normal (692 msnm).

Cuando está dentro de esta franja el caudal máximo de operación (caudal medio aguas abajo) es el caudal máximo turbinable y el caudal mínimo de operación (caudal mínimo aguas abajo que se debe erogar) es cero.

Este último requerimiento da lugar a una restricción que deben cumplir los volúmenes erogados en cada periodo

$$0 \leq V_T^i + V_V^i \leq V_{TMAX}, \quad (4)$$

donde V_{TMAX} es el volumen máximo que puede pasar por las turbinas.

Se tienen, además, restricciones propias de las características del emprendimiento.

El volumen de agua embalsado no puede superar la máxima capacidad del embalse (V_{MAX}) ni caer por debajo del límite en el cual las turbinas de la central hidráulica no pueden funcionar (V_{MIN}),

$$V_{MIN} \leq V_E^i \leq V_{MAX}. \quad (5)$$

Las características técnicas del conjunto turbina generador obligan a trabajar a las turbinas dentro de determinados límites, es decir

$$0 \leq V_T^i \leq V_{TMAX}. \quad (6)$$

El volumen vertido no puede superar la capacidad máxima del vertedero, esto es

$$0 \leq V_V^i \leq V_{VMAX}. \quad (7)$$

Por otra parte, en cada periodo se debe satisfacer la ecuación de continuidad: el volumen de agua que entra al embalse o bien sale dando lugar a un volumen erogado (preferentemente turbinado) o queda almacenado en el embalse. Es decir

$$V_E^i - V_E^{i-1} + V_T^i + V_V^i - V_A^i = 0. \quad (8)$$

Al aplicar la ecuación de continuidad se requiere el cálculo del volumen inicial del embalse, este valor puede obtenerse a partir de la cota de embalse.

Teniendo en cuenta la discretización elegida y las características del río se decidió que considerar caudales medios entrantes es una simplificación adecuada.

2.5 Serie histórica de caudales entrantes

Se construyó una serie histórica con los valores de los caudales medios entrantes al embalse desde el año 1.942 [1]. Esta serie de tiempo permitió obtener cotas para los caudales aportados en cada periodo utilizando parámetros estadísticos.

Los movimientos reales de una serie de tiempo son causados por diferentes factores, algunos tienden a afectar el movimiento a largo plazo y otros a producir fluctuaciones breves.

Una serie de tiempo se considera como la resultante de cuatro componentes: tendencia secular, variación estacional, cíclica e irregular [12].

La tendencia secular mide la variación del promedio en el tiempo. La variación estacional es una variación periódica con cierta regularidad durante un periodo de tiempo especificado de un año al menos. Pronunciadas fluctuaciones que se desplazan con movimientos ascendentes y descendentes en periodos cortos en toda la longitud del gráfico se denominan fluctuaciones cíclicas. La diferencia fundamental entre efectos cíclicos y estacionales radica en que éstos pueden predecirse y ocurren en un intervalo de tiempo fijo desde la última ocurrencia, mientras que los efectos cíclicos son completamente impredecibles y se extienden por periodos de tiempo más largos. Los movimientos irregulares son aleatorios y representan todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo que no sean tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.

El estudio de la serie de datos construida con los caudales medios entrantes, permitió conocer el comportamiento de los caudales aportados de acuerdo a cada año hidrológico (extra seco, seco, medio, húmedo y extra húmedo).

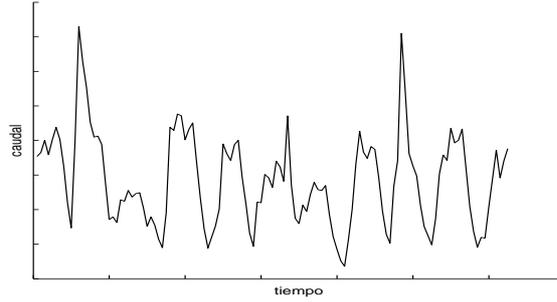
La serie manifiesta una tendencia lineal de pendiente negativa muy suave y una componente estacional preponderante sin que se observe comportamiento cíclico ni componente irregular. Este análisis permitió establecer una medida del promedio de la estacionalidad en cada periodo. Es así que se determinan cotas para el caudal aportado en cada periodo Q_A^i

$$\tilde{Q}_A^i - |R^i| \leq Q_A^i \leq \tilde{Q}_A^i + |R^i| \quad i = 1, \dots, 12, \quad (9)$$

donde \tilde{Q}_A^i es el promedio mensual para cada periodo según el año hidrológico y R^i representa la estacionalidad promedio para cada periodo.

Como $V_A^i = Q_A^i \Delta t^i$ donde Δt^i es la duración del periodo i , se pueden obtener cotas para los volúmenes aportados por el río de acuerdo al año hidrológico esperado.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo típico de una serie de tiempo de datos tiempo-caudal correspondiente a un periodo de 25 años.



2.6 Problema general de optimización

De acuerdo a las consideraciones efectuadas anteriormente respecto a la función objetivo y a las restricciones, obtenemos el siguiente problema general de optimización

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & B = \sum_{i=1}^n k P^i H_{med}^i V_T^i & (10) \\
 \text{s.a} \quad & V_E^i - V_E^{i-1} + V_T^i + V_V^i - V_A^i = 0 & i = 1, \dots, n \\
 & 0 \leq V_T^i + V_V^i \leq V_{TMAX} & i = 1, \dots, n \\
 & V_{MIN} \leq V_E^i \leq V_{MAX} & i = 1, \dots, n \\
 & 0 \leq V_T^i \leq V_{TMAX} & i = 1, \dots, n \\
 & 0 \leq V_V^i \leq V_{VMAX} & i = 1, \dots, n \\
 & V_{AMIN}^i \leq V_A^i \leq V_{AMAX}^i & i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Resulta así un problema de optimización del cual resta aún definir con precisión la función objetivo. El número de variables del problema es $4n$ con dos restricciones lineales y restricciones de cotas sobre las $4n$ variables. De este modo puede tenerse un problema de mayor o menor porte de acuerdo al número de periodos que se consideren. La función objetivo puede ser considerada como lineal, con una conveniente simplificación o, más ajustada a la realidad, no lineal.

3 El problema de programación lineal

Si en la función objetivo (10) consideramos

$$kH_{med} = \eta = \text{constante} \quad (11)$$

el problema se transforma en el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & B = \sum_{i=1}^n \eta P^i V_T^i & (12) \\ \text{s.a} \quad & V_E^i - V_E^{i-1} + V_T^i + V_V^i - V_A^i = 0 & i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq V_T^i + V_V^i \leq V_{TMAX} & i = 1, \dots, n \\ & V_{MIN} \leq V_E^i \leq V_{MAX} & i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq V_T^i \leq V_{TMAX} & i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq V_V^i \leq V_{VMAX} & i = 1, \dots, n \\ & V_{AMIN}^i \leq V_A^i \leq V_{AMAX}^i & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

En el modelo que se considera, la constante η puede elegirse $\eta = 281.61 Mwh/hm^3$.

3.1 Resolución numérica

El comienzo de la programación lineal [8], alrededor de 1940, estuvo marcado por el desarrollo del algoritmo del simplex por parte de George Dantzing. Si bien otros algoritmos, tales como los de punto interior [10, 11], han demostrado ser eficientes para resolver problemas lineales, el algoritmo del simplex sigue siendo el más popular. Existen diferentes implementaciones computacionales al alcance de los alumnos, algunas versiones disponibles libremente en Internet en sus formatos para alumnos, tales como el software LINDO o CPLEX. Otra implementación disponible bien popular en los gabinetes de cálculo numérico, en las universidades, es la que se encuentra en el toolbox de optimización de MATLAB.

El alumno tendrá que familiarizarse con la sintaxis de la herramienta computacional que tenga a su alcance para resolver el problema, disponer los datos del problema de manera adecuada y resolverlo hallando los valores de todas las variables.

Es de interés que el alumno pueda plantear el problema dual del problema dado (minimización de costos), interpretar las variables duales en la terminología del modelo y realizar el correspondiente análisis de sensibilidad.

4 El problema de programación no lineal

Considerando que $H_{med} = HV_{med}$ y teniendo en cuenta que $V_{med} = \frac{V_E^{i-1} + V_E^i}{2}$, con los datos cota-volumen que proporciona el ente regulador es posible realizar una aproximación de la curva en el sentido de los cuadrados mínimos. Experiencias anteriores muestran que es suficiente tomar una aproximación de primer grado de la forma $H_{med} = aV_{med} + b$, con lo cual la función objetivo (10) resulta

$$B = k \sum_{i=1}^n a \left[\frac{V_E^{i-1} + V_E^i}{2} + b \right] P^i V_T^i. \quad (13)$$

Por lo tanto el problema de optimización no lineal es el siguiente

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & B = k \sum_{i=1}^n a \left[\frac{V_E^{i-1} + V_E^i}{2} + b \right] P^i V_T^i & (14) \\ \text{s.a} \quad & V_E^i - V_E^{i-1} + V_T^i + V_V^i - V_A^i = 0 & i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq V_T^i + V_V^i \leq V_{TMAX} & i = 1, \dots, n \\ & V_{MIN} \leq V_E^i \leq V_{MAX} & i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq V_T^i \leq V_{TMAX} & i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq V_V^i \leq V_{VMAX} & i = 1, \dots, n \\ & V_{AMIN}^i \leq V_A^i \leq V_{AMAX}^i & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

4.1 Resolución numérica

Existe una diversidad de algoritmos y métodos que es posible aplicar para resolver el problema no lineal. En particular, en este caso, como el problema tiene la característica de que las restricciones son lineales, existen algoritmos específicos que es posible implementar en lenguajes sencillos como MATLAB o más elaborados como el caso de Fortran. De manera que, dependiendo del tipo de curso a que esté destinado el proyecto, serán las indicaciones de los posibles algoritmos a utilizar.

Entre los métodos especialmente indicados para restricciones lineales se encuentran los algoritmos de gradiente proyectado y gradiente reducido [13].

Las rutinas de MATLAB contenidas en el toolbox de optimización son otra alternativa para resolver los problemas no lineales y están sustentadas sobre las estrategias de programación cuadrática secuencial [9]. El método implementado resuelve en cada iteración una aproximación cuadrática de la función de Lagrange del problema original

sujeta a las restricciones lineales.

Para problemas no lineales en general existen muchos paquetes, algunos de ellos disponibles en forma libre tal como es el caso de los códigos que se encuentran en el paquete TANGO (*Trustable Algorithms for Nonlinear General Optimization*). Se trata de un conjunto de rutinas en Fortran desarrolladas por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Campinas y el Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de San Pablo (Brasil). Este paquete se encuentra sustentado en algoritmos del tipo de Lagrangiano Aumentados que son adecuados para resolver el problema general de optimización para funciones objetivo suficientemente suaves y con un gran número de variables y restricciones. El método utiliza internamente un algoritmo de gradiente espectral para resolver los subproblemas y una estrategia de región de confianza para obtener convergencia desde cualquier punto inicial [2, 3, 4].

Otro software que puede disponerse libremente, aunque fundamentado en una técnica diferente, es Knitro. Es efectivo para resolver problemas lineales, cuadráticos y no lineales, tanto convexos como no convexos. El método está descrito en [5] y está basado en un algoritmo de puntos interiores.

5 Análisis comparativo y conclusiones finales

Una vez planteados los diferentes modelos, y obtenidos los resultados numéricos se pueden indicar diferentes actividades con distintos objetivos.

- Verificar mediante una prueba retrospectiva la bondad de los modelos. Para ello se contrastan los valores obtenidos de las variables con los valores reales que son conocidos a partir de los informes de la Autoridad de Cuenca. De esta manera se puede analizar cuál es el modelo que mejor refleja la realidad y aconsejar su uso para planificar y tomar decisiones.
- Hay que tener en cuenta que cualquiera de los softwares disponibles para resolver el problema de programación lineal brinda información sobre las variables duales y da elementos para realizar el análisis de sensibilidad.

Por lo tanto puede explotarse toda la potencialidad del problema dual ya que su interpretación económica resulta valiosa para el análisis e interpretación del problema original. En este caso el problema dual puede ser interpretado como un problema de minimizar costos de los recursos usados.

Por otra parte, como los datos del problema pueden estar sujetos a modificaciones o pueden tener errores de medición es importante poder disponer una nueva solución óptima sin tener que resolver nuevamente el problema. Además, en el modelo que nos ocupa y considerando que puede ser utilizado para planificar las operaciones, es interesante conocer cómo influye la variación de los volúmenes aportados en cada periodo en las restantes variables, esto es, analizar cuál es el rango de validez de la base óptima.

- Con respecto al modelo no lineal pueden compararse los resultados obtenidos mediante los diferentes algoritmos de resolución que se dispone. Esta actividad puede ser profundizada dependiendo del nivel de conocimiento y entrenamiento computacional de los alumnos a los que esté dirigido el proyecto.

Se espera que estas actividades permitan al alumno afianzar los conocimientos, enriquecer su formación a partir del trabajo interdisciplinario realizado y mejorar su desempeño como miembro de un equipo a partir de intercambiar opiniones, reflexionar sobre los resultados y obtener conclusiones.

Bibliografía

- [1] Autoridad Interjurisdiccional de las Cuencas de los ríos Limay, Neuquén y Negro. *Informe Hidrometeorológico Mensual*, Cipolletti, Río Negro, Argentina.
- [2] Birgin, E. G., Martínez, J. M. and Raydan, M., *Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets*, SIAM Journal on Optimization 10, (1196-1211), 2000.
- [3] Birgin, E. G., Martínez, J. M. and Raydan, M., *Algorithm 813: SPG - software for convex-constrained optimization*, ACM Transactions on Mathematical Software 27, (340-349), 2001.
- [4] Birgin, E. G., Martínez, J. M., *Large-scale active-set box-constrained optimization method with spectral projected gradients*, Computational Optimization and Applications 23, (101-125), 2002.
- [5] Byrd, R., Hribar, M. E. and Nocedal, J., *An Interior Point Method for Large Scale Nonlinear Programming*, SIAM J. Optimization, 9,4, (877-900), 1999.

- [6] Durán, A. C., Croceri, G. M., Maciel, M. C., Mosconi, I. y Sottosanto, G. N., *Aplicación de un modelo de optimización en un proceso de operación de un embalse*, Mecánica Computacional, Vol XVIII, (585-594), 1997.
- [7] Croceri, G. M., Maciel, M. C. y Sottosanto, G. N., *Un modelo de optimización a mediano plazo para un proceso de operación de un embalse*, en Computational Methods in Engineering, P.M. Pimenta, R.M.L.R.F. Brasil, E.S. Almeida (Eds.), 1999.
- [8] Chvatal, V., *Linear programming*, W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [9] Fletcher, R., *Practical Methods for Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [10] Gonzaga, C. C., *Algoritmos de pontos interiores para programação linear*, 17 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1989.
- [11] Karmarkar, N., *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorics 4, (373-395), 1984.
- [12] Leiva, R. A., *Introducción al análisis de las series de tiempo*, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, 1995.
- [13] Luenberger, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachussts, 1984.