REUNIÓN ANUAL REM 2007

Título: **La proporcionalidad como noción disponible del docente**

Nivel de Enseñanza: **Primaria**

Categorías de trabajo: **Trabajo de Investigación**

Comunicación oral

Autores: **María Elena Ruiz**

Expositores: **María Elena Ruiz**

Institución a la que pertenecen: **Universidad Nacional del Comahue**

Dirección electrónica: meruiz@uncoma.edu.ar; ruiz.melena@gmail.com

Fundamentación

Este trabajo presenta un estudio con docentes de matemática de nivel primario alrededor del concepto de proporcionalidad, contenido básico de la escolaridad obligatoria. Es parte de un estudio más amplio realizado en el marco de una tesis de Maestría. En esta oportunidad nos interesa caracterizar y comprender las concepciones de proporcionalidad presentes en los docentes de matemática del último ciclo de nivel primario.

El tema proporcionalidad ha sido objeto de numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática. La mayoría de estas investigaciones reporta acerca de las dificultades, procedimientos y estrategias de niños o adolescentes al trabajar con problemas o ejercicios vinculados con el concepto de proporcionalidad (Vergnaud, Riccó y Rouchier (1979); Pluvinage y Dupuis (1981); Sokona (1989)). Son escasos los estudios que abordan la problemática específica del docente o futuro docente en relación con ese concepto y su enseñanza (Pezzard (1985); Thompson y Thompson (1996); Klemer y Peled (1998); Comin (2002); J-J. Lo (2004)).

Consideramos, como afirma Chevallard (1989), que el modo de existencia del saber en una institución está condicionado por dicha institución, entonces, las propuestas de enseñanza estarían influenciadas tanto por los condicionamientos que la institución impone a sus actores como por las relaciones personales del docente con el saber. Además, como plantea Schoenfeld (1992), citando a Hoffman (1989), que las relaciones personales de los profesores con el saber y sus concepciones acerca de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática, condicionan los entornos de aprendizaje que crean en su actividad de enseñanza. En este sentido nos interesa analizar cuáles son las concepciones[1] acerca de la proporcionalidad que tienen los docentes de matemática de nivel primario. Para ello realizamos entrevistas a maestros del último ciclo de nivel primario con preguntas abiertas, incluso con situaciones problemáticas para analizar, que nos permitió recoger información acerca de las ideas, supuestos, conocimientos, etc. en relación a la noción de proporcionalidad.

Metodología

Elegimos una metodología de tipo cualitativo, pues lo que se busca es caracterizar y comprender lo que dicen los docentes de matemática del nivel primario sobre la noción de proporcionalidad. En este sentido, la investigación debe dar un lugar privilegiado a la palabra de los docentes y la realización de entrevistas permite que ellos expliciten lo que piensan y saben acerca de la proporcionalidad en cuanto a contenidos, relación con otros conceptos, representaciones, aplicaciones, ejemplos, etc. El tipo de entrevistas a las que apelamos son las entrevistas en profundidad (Rodriguez Gómez, 1990). Nos interesa este tipo de entrevistas en el sentido que lo que aparece como esencial es llegar a obtener el conocimiento del punto de vista de los miembros de un grupo social o de los participantes de una cultura.

No buscamos contrastar una idea o supuestos, sino acercarnos a las ideas, creencias, teorías implícitas, representaciones, aplicaciones, experiencias que los docentes asocian al concepto de proporcionalidad. La entrevista ofrece a los docentes la posibilidad de expresar sus propias explicaciones, y al entrevistador la posibilidad de comprender el significado que el entrevistado elabora.

La cantidad de docentes entrevistados se decidió de acuerdo al criterio de redundancia propuesto por Lincoln & Guba (1985), según el cual, si el propósito de las entrevistas es obtener la mayor información posible, este proceso finaliza cuando nuevas entrevistas no amplíen la información existente. Así, se entrevistaron un total de ocho docentes, cinco mujeres y tres varones.

El material recogido en las entrevistas fue desgrabado y dactilografiado en su totalidad y luego sometido al análisis. Como se trata fundamentalmente de un estudio cualitativo, el análisis fue de tipo inductivo/constructivo (Lincoln & Guba, 1985). A

[1] Al hablar de concepciones acerca de la proporcionalidad nos interesa conocer qué piensan, qué ideas tienen los docentes, acerca de la proporcionalidad, en cuanto a contenidos, relaciones con otros conceptos, representaciones (numéricas, visuales, gráficas, etc.), aplicaciones, ejemplos, experiencias asociadas al concepto, etc.

partir de los datos recogidos se generaron proposiciones y conjeturas, denominadas "hipótesis de trabajo", cuya validez fue puesta a prueba en el transcurrir de la investigación. Es decir no partimos de hipótesis previamente establecidas ni de categorías teóricas previas.

Análisis

En las entrevistas surgió que los docentes consideran importante que los alumnos sepan reconocer si una situación es o no de proporcionalidad y en tal caso si es directa o inversa, o incluso que puedan reconocer si una situación se puede resolver con "Regla de tres". Esto muestra la preocupación de los docentes en reducir los riesgos de instalación de ciertas generalizaciones, en palabras de ellos: "*… y después lo relacionás con otros contenidos para ver cuáles son proporcionales y cuáles no, porque el chico después te confunde, piensa que todo es proporcional…*" O "*…que sepan y que reconozcan cuándo pueden resolver una situación problemática con regla de tres simple*".

Dado el lugar que el docente le asigna al reconocimiento de la proporcionalidad, fue natural durante las entrevistas que surjan este tipo de situaciones, que nos dieron la posibilidad de analizar qué estrategias utiliza y qué elementos considera para reconocer una situación proporcional, diferenciándola de otra que no lo es.

En una actividad de reconocimiento de la proporcionalidad en relaciones se debe tomar una decisión en base a los datos disponibles y para esto es necesario poner de manifiesto la capacidad de analizar o estudiar dicha situación. En este análisis primeramente entran en juego la búsqueda de regularidades (encontrar una constante multiplicativa), el uso de propiedades (de la función lineal, de las proporciones,…), el uso de diferentes representaciones de la situación (gráficas, numéricas,…), etc., para decidir si existe una relación proporcional y luego se debe verificar esa decisión con los datos de la situación dada. Es decir hay una tarea de decisión y otra de verificación.

Para este análisis consideramos cuáles son las nociones que los docentes ponen en juego para reconocer la proporcionalidad en una relación entre magnitudes o en una relación numérica. Conseguimos diferenciar tres estrategias o recursos que asociamos con: la existencia de una constante, la representación en el plano cartesiano y el crecimiento de una relación.

La existencia de una constante

Analizamos el significado que los docentes atribuyen a la constante de proporcionalidad para justificar si los datos dados en una tabla se corresponden o no con una situación proporcional.

Una de las situaciones que les presentamos en las entrevistas se refiere a la relación entre las edades de dos personas, la siguiente tabla muestra esta relación:

Edad de Juan	Edad de Ana
11	14
12	...
15	...

Una vez presentada esta información les pedíamos que completen la tabla, les preguntábamos si se trataba o no de una relación de proporcionalidad y les pedíamos que justificaran. El siguiente es el diálogo que registramos con uno de los docentes[2]:

E: *Y, ¿ésta es una situación de proporcionalidad directa?*
M4: *Yo entiendo que no.*
E: *Claro, y ¿cómo pueden ver los alumnos que no lo es?*
M4: *Hay una constante, ese es el tema.*
E: *Claro, ese es el tema, ¿y cuál es*?
M4: *Y es más tres y menos tres* [se refiere a que la edad de Juan más tres es la edad de Ana].

Este docente responde en forma inmediata que no es de proporcionalidad directa, pero la presencia de una constante (aditiva) lo desconcierta para justificar la no proporcionalidad. Parecería que tiene claro que ciertas regularidades se presentan en las situaciones de proporcionalidad, pero lo que no observamos es la seguridad que, esa regularidad está dada por la presencia de una constante multiplicativa.

Esta misma situación fue presentada a M8 pero modificamos la tercer entrada de la tabla (23) con la intención que fuera la suma de las dos anteriores (23 es la suma de 11 y 12)

Edad de Juan	Edad de Ana
11	14
12	...
23	...

Este docente la reconoce como una situación de proporcionalidad directa aún ante la evidencia que la constante es aditiva y no multiplicativa.

[2] Con la letra E nos referimos al entrevistador y a los docentes los indicamos como M1, M2…M8.

El siguiente es un extracto de la entrevista:

> M8: *A ver, ¿cómo es? Bueno, eso es fácil, si Laura tiene 14, entonces a 12 le va a corresponder 15 porque 12 más 3 es 15 y a 23, 26.*
> E: *Si les preguntamos a los alumnos si ésta es una situación de proporcionalidad, ¿qué pensás que van a responder?*
> M8: *Bueno, para completar la tabla es fácil, eso lo hacen sin problema.*
> E: *Sí, eso es cierto, ahora el asunto es decidir si es o no una situación de proporcionalidad.*
> M8: *A mí me parece que sí, que lo van a determinar.*
> E: *¿Van a decir que sí es de proporcionalidad directa?*
> M8: *Sí, que es de proporcionalidad directa.*
> E: *¿Y vos qué pensas?*
> M8: *Sí, yo creo que es, porque hay una constante.*

Como podemos ver, este docente afirma, sin dudar, que la tabla dada representa una relación de proporcionalidad directa, aún ante la evidencia que dan los números correspondientes a las edades de Juan, donde el tercer valor (23) es la suma de los anteriores (11 y 12), por lo que a 23 le correspondería (si fuera proporcional) la suma de 14 y 15, que es 29 y no 26.

También analizamos la misma situación con otro docente, M7, y registramos el siguiente diálogo:

> E: *…en este problema, acerca de la edad de Laura y la edad de Juan… ¿los alumnos dirán que es de proporcionalidad directa?*

Edad de Juan	Edad de Ana
11	14
12	...
23	...

> M7: *No creo, … lo que yo intento y que generalmente llegan los chicos, es que entre estos dos datos hay que construir una constante, si los dos aumentan es de proporcionalidad directa, entonces divido éste* [señala el número 14] *por éste* [señala el 11], *éste por éste* [señala el que le correspondería al 12 y el 12], *y éste por éste* [señala el que le correspondería al 23 y el 23] *me tiene que dar un mismo valor, si no me da es una tabla no proporcional donde hay una magnitud que sube y otra magnitud que sube pero no tienen relación de proporcionalidad.*

Vemos aquí que este docente también recurre al análisis de la existencia de una constante para decidir si se trata de una situación proporcional o no. No tiene duda que la constante debe ser multiplicativa y para asegurarse de su existencia realiza los cocientes $\frac{y}{x}$ y controla que den siempre un mismo valor.

Otra situación que presentamos a algunos docentes y analizamos con ellos en las entrevistas es la siguiente:

Se deben trasladar los alumnos de una escuela al Polideportivo. Si cada auto puede trasladar como máximo 4 alumnos, ¿cuál es la cantidad de autos necesarios para trasladar 16 alumnos utilizando la máxima capacidad en cada auto? ¿Y para 24 alumnos? ¿Cuántos autos se necesitan para 30 alumnos? ¿Cuál podría ser una representación gráfica de esta situación?

Luego de presentar esta situación al docente M4, hablamos de tablas sencillas que él plantea daría a sus alumnos. Por ejemplo:

Alumnos	Autos
4	1
…	2
…	3

En este caso, no duda en asegurar que se trata de una relación de proporcionalidad directa, pero cuando agregamos valores a la tabla, como los siguientes:

Autos	1	2	3		…	...	...	...	...	...
Alumnos	4	...	...		16	24	28	30	32	40

y preguntarle si sigue siendo proporcional, su respuesta es:

M4: “*Y, bueno, sigue siendo proporcionalidad directa y con la constante,... uno dividiendo por cuatro te da un número con coma y demás pero vos podés, siempre le vas a sumar un auto más.*

Parecería que en la respuesta del docente está presente la idea de proporcionalidad directa sin tener en cuenta las magnitudes que intervienen, sólo considera los valores numéricos. En efecto, si nos olvidamos de las magnitudes en juego (autos-alumnos), efectivamente se trata de una situación de proporcionalidad directa cuya constante es $k = 4$, por lo que no hay problema que para 30, la respuesta sea 7,5. Sin embargo, al considerar el contexto del problema, es consciente que siendo la cantidad de autos una cantidad discreta no puede dar como respuesta que se necesitan 7,5 autos, por eso plantea “*siempre le vas a sumar un auto más*”.

El ejemplo presentado nos muestra la dificultad que existe al trabajar con magnitudes. En este caso si la relación que consideramos es alumnos-autos, habrá que tener control del dominio (restringirlo a los múltiplos de 4), para evitar el absurdo de obtener imágenes decimales cuando se trata de un conjunto numérico discreto o para evitar que la situación deje de ser proporcional.

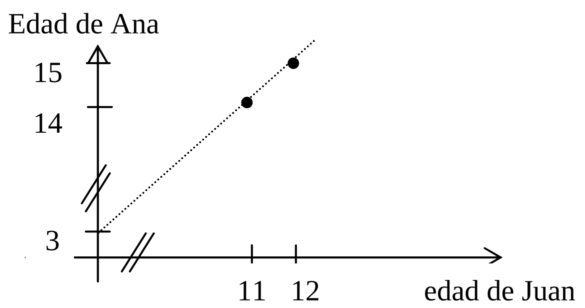
La representación en el plano cartesiano

Otro recurso que los docentes ponen en juego para reconocer la proporcionalidad en situaciones es la representación de la misma en el plano cartesiano.

Retomamos el ejemplo de la relación entre "la edad de Juan y la de Ana" presentado anteriormente y trabajado con el docente M4. En este caso el docente intenta encontrar una constante, como ese recurso no le soluciona el problema, apela a la representación gráfica:

> M4: *Estoy pensando en un gráfico, a ver cómo quedaría* esto.
> E: *Ah, veamos.*

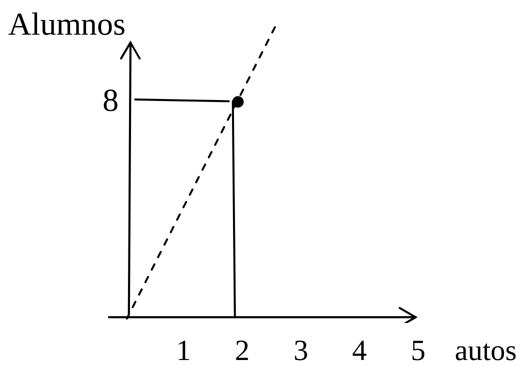
El gráfico elaborado es el siguiente:



> M4: *Y, tiene toda la pinta* [se refiere a que es de proporcionalidad directa]*, tanto la tabla como el gráfico.*

La presencia de una recta le da la pauta que podría tratarse de la representación gráfica correspondiente a una situación de proporcionalidad directa. Sabemos que en tal caso, la representación en el plano cartesiano es una recta que pasa por el origen. Sin embargo, el docente no reconoce la evidencia que le da la ausencia del par (0,0) y la presencia del (0,3) en el gráfico cartesiano. Finalmente plantea que cree que sí, que es de proporcionalidad directa.

También propuso representar en el plano cartesiano la situación referida a autos -alumnos, que analizamos anteriormente.



Al preguntarle si se puede trazar una recta que una esos puntos, dice:

> M4: "*Yo lo respondería a eso que matemáticamente sí, digamos, la realidad no porque no hay 7 autos y medio*".

Parecería ser que el docente es consciente que al ser discreto uno de los conjuntos numéricos de esta relación, no nos permitiría completar la recta, ya que esto significaría considerar números decimales en el dominio (los autos) y en las imágenes (los alumnos). ¿Qué significa entonces, "*matemáticamente sí* "?. ¿Qué significado le atribuye al gráfico?, ¿éste no representa la situación planteada? Nuevamente observamos la dificultad de trabajar con magnitudes. Podríamos pensar que para el docente, "*matemáticamente sí*", se refiriere a que si se trata de conjuntos numéricos que no representan una magnitud, la relación se representa a través de la recta $y = 4\,x$.

La proporcionalidad se presta particularmente a la teoría de "juego de marcos" (Douady, 1996). Para reconocer y tratar una situación de proporcionalidad, se pueden utilizar las propiedades numéricas o gráficas de la función lineal. Como vimos, el docente M4, aborda el mismo problema en distintos marcos para decidir si la relación que le presentamos es o no de proporcionalidad.

Con el docente M8, también trabajamos la situación referida a autos-alumnos. Luego de completar algunos datos de la tabla, le preguntamos por su representación en el gráfico cartesiano y el diálogo que mantuvimos es el que se reproduce a continuación:

> E: *¿Y cómo sería el gráfico?*
> M8: *Y el gráfico es para un auto 4 alumnos, a 2 autos, 8 alumnos.*
> E: *Claro, ¿y aquí que harán los alumnos?, ¿unirán los puntos con una línea?*
> M8: *¿La recta?, sí, claro.*
> E: *¿Y qué les decimos ahí a los chicos? ¿Pueden unir esos puntos con una recta?*
> M8: *Sí.*
> E: *Ah, pueden unirlos.*

En este caso, observamos que el tipo de magnitudes que intervienen en la relación y que se representarán en el plano cartesiano, no se tienen en cuenta. Parecería que lo único que se considera es que la representación tiene que ser una recta.

<u>El crecimiento de una relación</u>

Pudimos observar que algunos docentes apelan al crecimiento de una relación como recurso para el análisis del reconocimiento de la proporcionalidad en la situación planteada, esto es si “al aumentar los valores de *x*, aumentan los valores de *y*”, alcanza para afirmar que la relación es de proporcionalidad directa.

Uno de ellos, M8, ante la situación “alumnos-autos”(planteada anteriormente), la reconoce como de proporcionalidad directa porque presenta un crecimiento, sin analizar si éste es proporcional o no, como lo muestra el siguiente diálogo:

> M8: *Pero por otro lado también es directamente proporcional porque a mayor número de alumnos mayor número de autos.*
> E: *Sí eso es cierto, ¿pero con eso me alcanza para decir que es de proporcionalidad directa?*
> M8: *Y, sí.*

Esta idea de crecimiento se evidencia también en el análisis que el docente M8 realizó de la relación “edad de Juan- edad de Laura”. Al observar que cuando crece uno, crece el otro, el docente afirmó que es de proporcionalidad directa. Recordemos que este docente, frente al análisis de esta relación, había respondido que se trataba de proporcionalidad directa, pues existía una constante (aditiva).

Este recurso del crecimiento también es mencionado por otro docente, M7, aunque en este caso vemos el control que hace del uso del recurso para determinar si es de proporcionalidad directa, inversa o ninguna de las dos. Según sus propias palabras:

> M7: *... hay tablas que son obvias que no son de proporcionalidad, a primera vista lo que dicen* [se refiere a los alumnos] *es "ah, aumenta una, disminuye la otra, ya está"*
> E: *Ya está, ¿es inversa*?
> M7: Claro, po*r ejemplo, que sé yo, meses y deudas, si yo tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6* [meses], *debo 2000* [pesos].
> E: *Claro, a medida que voy pagando, la deuda va disminuyendo*.
> M7: *Acá tengo 800* [pesos], *acá tengo 600* [pesos], *acá tengo 400* [pesos] *y acá tengo 200*,[pesos] [mientras habla construye la tabla que se muestra a continuación]. *Ellos* [se refiere a los alumnos] *dicen aumenta el mes y disminuye la deuda, es de proporcionalidad inversa*.

Meses	1	2	3	4
Deuda	800	600	400	200

En el mismo sentido plantea: “*…porque muchos de los errores que hacen* [los alumnos] *en la primer evaluación o trabajo práctico es ‘ah, este baja y este sube, proporcionalidad inversa’*”.

En las palabras de este docente está presente el reconocimiento de la conceptualización errónea, muy común en los alumnos, que toda relación creciente es de proporcionalidad directa, o toda relación decreciente es de proporcionalidad inversa.

Conceptualización que se afianza si las situaciones con las que se encuentran los alumnos son siempre de este tipo.

Conclusiones

Dificultades encontradas por los maestros en el tratamiento de cuestiones relativas a la proporcionalidad son indicadores de sus concepciones de este objeto, como lo plantea Comin (2002). Otros estudios muestran algunas inestabilidades en el razonamiento proporcional, que presentan los docentes (Klemer y Peled, 1998), o estudios que se ocupan de las dificultades relativas a la proporcionalidad (Comin, 2002), o los de J-Lo (2004) que muestra la dificultad de poder justificar los cálculos realizados para hallar el valor faltante en una proporción por medio de algún diseño o gráfico, lo que muestra que el cálculo se efectúa en forma automática haciendo uso de una regla de producto cruzado, pero no pueden dar cuenta de un gráfico que represente la situación problemática dada.

En nuestro estudio pudimos ver que docentes en actividad no están a salvo de confusiones matemáticas conceptuales, tales como no poder desprenderse aún del modelo aditivo en la proporcionalidad, o considerar cualquier relación creciente como una relación de proporcionalidad.

En relación con la existencia de una constante pudimos ver, que hay docentes que manifiestan cierta inestabilidad ante situaciones que presenten algún tipo de regularidad, como la existencia de una constante aditiva. Se percibe una seguridad en cuanto a que hay ciertas regularidades que se deben verificar en una relación de proporcionalidad directa, pero no la seguridad que la constante debe ser multiplicativa y no otra.

Lo mismo ocurre con la representación cartesiana de una relación de proporcionalidad directa, no dudan que debe ser una recta, la inestabilidad pasa aquí por asegurar que la recta debe pasar por el origen.

En algunas situaciones problemáticas pareciera que basta con conocer las magnitudes en juego para determinar si son o no proporcionales, por ejemplo la "estatura en función de la edad", el "peso de una persona en función de la edad" o "el crecimiento de una planta en función de los días transcurridos". No hace falta darle valores numéricos a dichas magnitudes para determinar la no proporcionalidad de las relaciones entre ellas. Esto podría explicar la respuesta inmediata del docente M4 "yo entiendo que no", al preguntarle si la tabla dada [edad de Juan y edad de Ana] representa una relación de proporcionalidad directa. Lo que está en juego aquí son edades, la relación entre las edades de dos personas, no se trata de la clásica relación "edad y peso" o "edad y estatura", que generalmente se presentan como ejemplos de relaciones no proporcionales en la enseñanza de este tema.

Este tipo de situaciones [edad de Juan- edad de Ana] no sería el representante de un tipo de ejercicios clásicos en la escuela obligatoria para estudiar el tema proporcionalidad. No son situaciones con las que se relacionan habitualmente los docentes de nivel primario. La dificultad no está en el tratamiento de la misma, sino en poder identificarla como una relación de proporcionalidad directa o de no proporcionalidad.

Bibliografía

BOLEA, P., BOSCH, M., GASCÓN, J. (2001) "La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad", *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol. 21/3, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, Francia.

BOSCH Y CASABÒ, M. (1994*): La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis, Universidad Autónoma de Barcelona.

BROUSSEAU, G. (1995) "Didactique des sciences et formation des professeurs", conferencia, Ho Chi Minh Ville.

CHEVALLARD, Y. (1989), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, Année 1988-1989, LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble. Francia.

COMIN, E. (2002) " L' enseignement de la proportionnalisté à l'école et au collége" en *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol. 22, Nº 2.3, pp. 135-182. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble. Francia.

DOUADY, R. (1986), "Jeux des cadres et dialectique outil-objet", en *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol. 7/2, pp. 5-31, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, Francia.

KLEMER, A. & PELED, I (1998) "Inflexibility in teachers´ ratio conceptions", En Olivier, A. & Newstead, K. (Ed.) Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3, p. 128-135.

LINCOLN, Y. y GUBA, E. (1985) *Naturalistic Inquiry*. Sage Publications.

LO, J-J. (2004) "Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task" in *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 3, pp. 265-272.

PEZZARD, M. (1985) "Une experience d´enseignement de la proportionnalité aux éleves instituteurs", Tesis 3eme Cycle, Université Paris VII.

PLUVINAGE, F Y DUPUIS, C. (1981) La proportionalite et son utilisation IREM de Strasbourg. R.D.M. Vol 2.2.

RICCO, G. (1982) "Les premieres adquisitions de la notion de function linéaire chez l´enfant de 7 a 11 ans, Educational Studies in Mathemátics, 13. Reidel Publishing Co., Holland and Boston, USA.

RODRÍGUEZ GÓMEZ, G. y otros (1996) *"Metodología de la investigación cualitativa"*, España, Ediciones Aljibe.

RUIZ M. E. y DETZEL, P. (2000), "La enseñanza de las funciones, condicionamientos del docente. 1ª. parte."**,** en revista *Novedades Educativas*, Año 12, Nº 116, pp. 58-59.

RUIZ M. E. y DETZEL P. (2000), "La enseñanza de las funciones, condicionamientos del docente. Parte II."**,** en revista *Novedades Educativas*, Año 12, Nº 117, pp. 61-62.

SCHOENFELD, A. (1992) "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sens making in mathematics," en *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, Grows, D. (Ed.), New York, Macmillan, pp.334-370.

THOMPSON, P.W. y THOMPSON, A.G (1994) "Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle" en *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 25, Nº 3, pp.279-303.

THOMPSON, A. y THOMPSON, P. (1996) "Talking about rates conceptually, Part II: Mathematical knowledge for teaching" en *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 27, Nº 1, pp.2-24.

VERGNAUD, G.; RICCO, G.; ROUCHIER, A. y otros, (1979), "Acquisition de structures multiplicatives dans le premier cycle du second degre". IREM d´Orleans Nº 2.

VERGNAUD, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol. 10, Nº 2-3, pp. 133-170, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, Francia.