Implicancias educativas del uso de metáforas en contextos de resolución de ecuaciones

Autores: **Marcel David Pochulu, Raquel Susana Abrate, Vincenc Font Moll**
Universidad Nacional de Villa María - Universidad de Barcelona

Resumen

La investigación es de naturaleza diagnóstico-descriptiva y hermenéutica, y pretende dar respuestas a los siguientes interrogantes: ¿Qué tipo de metáforas utilizan los alumnos en su discurso cuando resuelven ecuaciones? ¿Cuál es la relación que hay entre las metáforas utilizadas por los alumnos en su discurso cuando resuelven ecuaciones y las dificultades y obstáculos que se observan en dicha resolución? y ¿Qué tipo de metáforas utilizan los libros de textos de matemáticas en las lecciones que tratan sobre la resolución de ecuaciones?

Por un lado, se ha trabajado con las producciones escritas de 429 estudiantes aspirantes a ingresar en la Universidad Nacional de Villa María (Argentina), durante el año 2007, mientras cursaban el Módulo de Matemática. Por el otro, analizamos 60 libros de matemáticas que abordan la resolución de ecuaciones como tema de estudio, buscando en ellos la presencia de las metáforas que eran más utilizadas por los alumnos y que habían sido detectadas en la primera fase de nuestro estudio.

El trabajo muestra que los estudiantes utilizan principalmente metáforas orientacionales y lenguaje metafórico en contextos de resolución de ecuaciones. A su vez, detectamos que prácticamente la totalidad de los alumnos consideran que las metáforas y el lenguaje metafórico son las propiedades que subyacen en la resolución de ecuaciones, lo cual se condice con el modo en que es presentado el tema en la mayoría de los textos escolares de matemáticas del nivel secundario.

Por último, mostramos el uso de metáforas orientacionales en la resolución de ecuaciones no es inocuo para el aprendizaje de los estudiantes, en tanto conlleva a dificultades que no todos logran superar.

Introducción

La historia ubica a la metáfora, al menos desde sus inicios narrativos griegos, como una transferencia o traslado de un lugar a otro, de significados entre nombres o relaciones. En estos casos, esta transferencia confiere un carácter peculiar añadido al lenguaje literal, y una pregunta fundamental que uno puede formularse es: ¿cuál es su potencial cognitivo? Si efectivamente admitimos que posee tal capacidad, en alguna medida, sería oportuno establecer qué características describen estos procesos de extrapolación y cuáles son los beneficios en el campo del conocimiento.

En este sentido, y considerando como contexto principal la resolución de ecuaciones, el presente trabajo pretende dar respuestas a los siguientes interrogantes:

¿Qué tipo de metáforas utilizan los alumnos en su discurso cuando resuelven ecuaciones? ¿Cuál es la relación que hay entre las metáforas utilizadas por los alumnos en su discurso cuando resuelven ecuaciones y las dificultades y obstáculos que se observan en dicha resolución? y ¿Qué tipo de metáforas utilizan los libros de textos de matemáticas en las lecciones que tratan sobre la resolución de ecuaciones?

Marco teórico

La metáfora ha constituido un motivo de reflexión teórica a lo largo de la historia, por lo que hoy en día disponemos de algunas ideas importantes sobre ella. De manera sucinta, estas ideas heredadas son:

- La metáfora es la aplicación a una cosa de un nombre que es propio de otra.
- La elaboración y comprensión de metáforas conlleva la captación de similaridades ocultas.
- La función y el origen de la metáfora es proporcionar placer estético al entendimiento.
- La metáfora es una clase de abuso verbal que ha de suprimirse del discurso propio del conocimiento.
- La metáfora constituye un elemento medular del lenguaje y su auténtica esencia.

Además, estas ideas heredadas se pueden agrupar en dos puntos de vista radicalmente diferentes:

- La metáfora es un accidente lingüístico marginal, con funciones comunicativas

especializadas y ajenas al ámbito del conocimiento (un fenómeno a evitar).
- La metáfora encarna la auténtica naturaleza del lenguaje y del pensamiento (es el fenómeno central).

De acuerdo con el segundo punto de vista, los enfoques cognitivos y, en particular, el propuesto por la teoría contemporánea de la metáfora (Johnson (1991); Lakoff y Johnson (1991); Lakoff y Núñez (2000); Núñez, Edwards, y Matos (1999), entre otros) son los que, en nuestra opinión, tienen el protagonismo en las reflexiones actuales sobre la metáfora. Por tanto, el primer marco teórico utilizado en esta investigación es la teoría sobre "qué son las matemáticas", propuesta por Lakoff y Núñez (2000). El núcleo central de la teoría está basado en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, y en los relativamente recientes hallazgos en lingüística cognitiva.

En este trabajo asumimos, de acuerdo con Lakoff y Núñez (2000), la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro. En este sentido, las metáforas se caracterizan por crear una relación conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades e inferencias del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, pues nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático.

Como segundo referente teórico, y con la finalidad de afrontar la complejidad que la investigación sobre las metáforas requiere, se ha tenido en cuenta el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) del conocimiento e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007)

En el EOS se considera que la dialéctica personal-institucional está en la base de la emergencia de los objetos matemáticos, en el sentido de que el objeto institucional llama a la puerta del conocimiento personal para conseguir la emergencia del objeto personal. La manera de conseguir esta emergencia pasa por cuatro instrumentos de conocimiento[1], en los cuales juega un papel determinante el uso de "entidades vicariales o subrogatorias" ya que, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se intenta justificar el lenguaje matemático abstracto mediante otro lenguaje menos abstracto, y para ello se utilizan subsidiariamente analogías, representaciones, diagramas, contextualizaciones, modelizaciones, metáforas, entre otras.

<u>Metodología de investigación</u>

La investigación es de naturaleza diagnóstico-descriptiva y hermenéutica, y se realizó en dos fases claramente diferenciadas. Para la primera fase, y con la intención de dar respuestas a las dos primeras preguntas directrices del trabajo, diseñamos una secuencia de actividades para ser resueltas por los estudiantes, con la intención de:

- analizar el discurso escrito que emplean los alumnos en contextos de resolución de ecuaciones, y
- poner en evidencia potenciales dificultades y obstáculos debidos al uso de metáforas en la resolución de ecuaciones.

En consecuencia, trabajamos con las producciones escritas de 429 estudiantes aspirantes a ingresar en la Universidad Nacional de Villa María (Argentina), durante el año 2007, mientras cursaban el Módulo de Matemática.

Para la segunda fase y con la intención de responder la tercera pregunta directriz del trabajo, analizamos 60 libros de matemáticas que abordan la resolución de ecuaciones como tema de

[1] La dualidad extensivo-intensivo (particular-general), la representación, la metáfora y la contextualización-descontextualización.

estudio. Estos libros pertenecen a las bibliotecas de los dos centros educativos encargados de la formación de profesores en la ciudad, y buscamos en ellos la presencia de las metáforas que eran más utilizadas por los alumnos y que habían sido detectadas en la primera fase de nuestro estudio. Básicamente hicimos la distinción entre dos formas de resolver una ecuación:

- Por propiedades o metáfora objetual: *Una ecuación es un objeto matemático dotado de propiedades,* o,
- Por transposición de términos o metáfora orientacional: *Una ecuación es un conjunto de objetos con un sistema de referencia cuyo origen es el signo igual*. Estos objetos se pueden "pasar", "cruzar", "quitar", "colocar", ser "llevados", "transferidos", "transformados" o "trasladados" de un lugar a otro bajo ciertas reglas de transposición.

<u>Resultados y discusión</u>

Para la primera fase de la investigación, la cual tuvo como uno de sus objetivos analizar el discurso escrito que empleaban los alumnos en contextos de resolución de ecuaciones, analizamos las respuestas dadas a dos ejercicios de la secuencia de actividades que se diseñaron para el trabajo. Así, el ejercicio Nº 2 proponía a los alumnos la resolución de las ecuaciones: $3 \cdot x - 1 = 5$ y $\sqrt{x-2} = 3$, donde no sólo se debía buscar su conjunto solución, sino también, explicar los procedimientos que se llevaban a cabo.

El ejercicio Nº 3, en tanto, exponía la resolución de una ecuación, tal como aparece en la mayoría de los libros de textos de matemáticas, y se le solicitaba a los estudiantes que dieran las explicaciones de los procedimientos que se pudieron haber empleado para hallar el conjunto solución.

Analizando la información emergente de la resolución de estas actividades, hallamos que 372 alumnos (79,7%) emplean, de manera explícita, metáforas orientacionales para explicar la resolución de ecuaciones. Además, la cantidad de alumnos se incrementa si incluimos a aquellos que de manera implícita usan este tipo de metáfora. En este último caso, aludimos a quienes no dan explicaciones de la resolución que llevan a cabo y tampoco se evidencia el uso de propiedades, o aquellos que brindan explicaciones muy vagas que no resulta posible encuadrarlos en alguna categoría particular.

No obstante ello, si se tienen en cuenta los alumnos que emplearon metáforas orientacionales en su discurso escrito para ambos ejercicios, ya sea de manera explícita o inducen a ellas, el total asciende a 402, esto es, el 93,7% del total.

El empleo de una metáfora orientacional lleva a que los alumnos consideren a una ecuación como un dispositivo, donde los términos y números se pueden "pasar", "cruzar", "quitar", "colocar", ser "llevados", "transferidos", "transformados" o "trasladados" de un miembro a otro. Tal como expresan Lakoff y Núñez (2000), aquí las metáforas pueden ser interpretadas como la comprensión de un dominio en términos de otro, y vienen a conformar *grounding metaphors*, en tanto relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas.

Fragmentos de los discursos escritos por los alumnos, extractados de las respuestas que brindaron a los ejercicios 2 y 3, y que ejemplifican lo anteriormente expresado, son:

- *Debes despejar la incógnita (x) llevando los demás números al otro término cambiándole su signo;*
- *Así la suma se transforma en resta;*
- *Primero cambio de lugar el – 1 para el otro lado con +1;*
- *Pasamos la raíz cuadrada que se transforma en exponente del resultado;*
- *Pasamos al otro miembro con la operación contraria a la radicación que es la potenciación;*
- *Pasamos al otro término con la operación opuesta a la que realizan;*
- *Cuando trasladamos de un término a otro invertimos el signo;*

- *Se pasa al otro miembro el término que esté menos relacionado con la incógnita haciendo la operación inversa;*
- *Colocamos x del otro lado de la igualación;*
- *Hay que transferir términos de un miembro a otro, invirtiendo la operación;*

Es de destacar que los alumnos utilizan las expresiones "términos" y "miembros" de una ecuación como equivalentes, y que aparecieron gran cantidad de errores en la resolución de las ecuaciones, donde aplican equivocadamente las reglas de transposición de términos que sustentan en su discurso.

Como segundo objetivo de la primera fase de investigación, nos propusimos poner en evidencia potenciales dificultades y obstáculos debidos al uso de metáforas orientacionales en la resolución de ecuaciones. Con este propósito, solicitamos en el ejercicio 4 que se determinara el número de ecuaciones presentes en la resolución del ejercicio anterior (el número 3). Sosteníamos, como hipótesis muy fuerte, que el uso de metáforas orientacionales para resolver ecuaciones podría llegar a impedir que se distinguieran las ecuaciones equivalentes.

Pudimos constatar que sólo 25 alumnos (5,8%) distinguieron las 4 ecuaciones presentes en el ejercicio y el resto lo hace desacertadamente (94,2%). Quienes sólo distinguen una ecuación, argumentan en términos de:

- *Porque hay una sola incógnita;,*
- *Porque hay una sola igualdad con una incógnita;*
- *Porque el resultado que tengo que determinar es de una sola x;*
- *Porque siempre se resuelve la misma.*

Un importante número de alumnos (32,8%) argumenta distinguir sólo 3 ecuaciones, en tanto la última ($x = 3$) la consideran sólo un "resultado" y no una ecuación. Algunos argumentos que esgrimieron para esta decisión fueron:

- *Porque en los tres primeros pasos la incógnita no está sola, lo que hace que sigan manteniéndose las ecuaciones;*
- *Porque todavía no se sabe cuánto vale x;*
- *Porque en cada una de ellas, la x no tiene valor;*
- *Porque en la última la incógnita ya está encontrada o resuelta;*
- *Porque en los primeros tres pasos hay una incógnita;*
- *Porque tres pasos tienen para resolver;*
- *Porque en los tres primeros pasos siempre hay que encontrar el valor de una incógnita;*
- *Porque en tres veces aparece la incógnita creando una nueva ecuación;*
- *Porque en las tres primeras hay una incógnita. Siempre que hay una incógnita (x) es una ecuación;*
- *Porque se fue haciendo por pasos y la ecuación es más chica hasta llegar al resultado.*

El ejercicio 5 de la guía de actividades, en tanto, involucraba la resolución de dos ecuaciones de segundo grado equivalentes en su conjunto solución, donde la primera de ellas se presentaba con coeficientes enteros $\left(x^2 - 5x + 6 = 0\right)$, mientras que la segunda con coeficientes racionales no enteros $\left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{5} = 0\right)$. Nuestras hipótesis al respecto establecían que los alumnos que sólo utilizan metáforas orientacionales en contextos de resolución de ecuaciones no advertirían la equivalencia y que, por otro lado, el trabajo con números racionales los llevaría a cometer errores, o a desistir de realizar el ejercicio. Cabe hacer notar que los alumnos no contaban con calculadoras para la resolución de las ecuaciones propuestas.

Tal como lo esperábamos, el 82,5 % (354 alumnos) presentaron dificultades para hallar el conjunto solución de una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales no enteros, y ninguno de los estudiantes trabajó con ecuaciones equivalentes[2].
Por último, el ejercicio 9 planteaba hallar el conjunto solución de una ecuación racional $\left(3-\frac{1}{x}=\frac{5}{x}\right)$ la que fácilmente podía ser resuelta si se buscaba una ecuación entera equivalente a ella. Esto se lograba si se multiplicaba a ambos miembros de la igualdad por la variable que intervenía[3], lo que conllevaba a la ecuación que proponía el ejercicio 3, inciso "a" ($3x - 1 = 5$).
Sólo 91 alumnos resuelven correctamente la ecuación (21,2%) y 2 de ellos se valen de propiedades (metáfora objetual) para hallar una ecuación equivalente más sencilla de resolver (multiplicaron ambos miembros por la variable). El resto, 338 alumnos (78,8%) no logran tener éxito en la búsqueda del conjunto solución y emplean con errores la metáfora operacional. Asimismo, es de destacar que ningún alumno realizó un análisis retrospectivo de la solución, aún entre quienes lo resolvieron correctamente, que permitiera determinar si el conjunto solución era el apropiado.
Si analizamos estos tres últimos ejercicio, en forma conjunta, podemos percibir que a la mayoría de los estudiantes (aproximadamente un 80%) se les presentaron obstáculos insoslayables en la resolución de ecuaciones, los cuales podían haber sido fácilmente salvables si se hubiesen utilizado propiedades de la igualdad (metáfora objetual).
Culminada la primera fase de la investigación, iniciamos la segunda fase, la cual involucró el análisis de 60 textos de matemáticas que discriminamos por nivel educativo (secundario o universitario). Hallamos que sólo un 15,5% de los libros de texto de matemáticas, para el nivel secundario, enfoca la resolución de ecuaciones mediante propiedades (metáfora objetual), mientras que los restantes (84,5%) se valen de metáforas orientacionales o inducen a su uso.
De todos modos, podemos hacer una distinción entre el tipo de metáforas orientacionales que estos textos utilizan, pues consideramos que no influyen del mismo modo, en la cognición individual de los alumnos, las metáforas orientacionales asociadas a la transposición de términos (*El número que está sumando en un miembro de una igualdad pasa restando al otro, el que está multiplicando pasa dividiendo, etc.*) o aquellas que intentan mostrar una analogía entre las ecuaciones y un subibaja o balanza. En este último caso, pensamos que si bien la metáfora *"una ecuación es como un subibaja o balanza"* no lleva a pensar que se están empleando propiedades o reglas propias del tema en cuestión, conlleva a una mejor captación de similaridades ocultas entre dominios que se encuentran fuera y dentro de las matemáticas.
Si ahora analizamos ahora los textos de matemáticas del nivel superior universitario, hallamos que un 60% de ellos enfocan la resolución de ecuaciones aplicando exclusivamente propiedades (metáfora objetual) y sólo uno de los libros emplea reglas de transposición de términos (metáfora operacional) luego de haber presentado las propiedades de la igualdad.
Por último, podemos destacar que existe una estrecha relación entre las metáforas que emplean los alumnos y las que presentan, o inducen, los libros de textos de matemáticas para estos temas.

Conclusiones

En este trabajo hemos puesto de manifiesto que los estudiantes utilizan principalmente metáforas orientacionales en contextos de resolución de ecuaciones. Estas metáforas, que seleccionan, acentúan, suprimen y reorganizan ciertos rasgos característicos de la resolución de

[2] Multiplicando por 10 a ambos miembros de la igualdad se podía determinar que la ecuación planteada en el inciso "b" era equivalente en su conjunto solución a la del inciso "a".
[3] Debe tener presente el lector que multiplicar a ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable puede conducir a ecuaciones no equivalentes, aunque en este caso, sí resultaban serlo.

ecuaciones, dejan abiertas las puertas para que una ecuación pueda ser considerada como un dispositivo donde los términos y números se pueden "pasar", de un miembro a otro, bajo ciertas condiciones y reglas específicas. A su vez, hallamos que estas metáforas son la más utilizadas por los textos escolares de matemáticas para el nivel secundario, no ocurriendo de este modo con los del nivel superior universitario.

Por otra parte, notamos que la forma de proceder de los alumnos frente a la resolución de ecuaciones, y de muchos textos escolares del nivel secundario, no se condice con el modo en que es presentado el tema en los libros de matemáticas del nivel universitario. En estos últimos, pareciera existir un mayor grado de conciencia del uso de metáforas orientacionales, y por tal razón, abordan el tema, predominantemente, por medio de las propiedades de la igualdad (metáfora objetual).

Finalmente, también nos fue posible verificar que el uso de metáforas orientacionales en la resolución de ecuaciones no es inocuo para el aprendizaje de los estudiantes, en tanto conlleva a dificultades que no todos logran superar. Con esto no estamos diciendo que no deben emplearse las metáforas en contextos de resolución de ecuaciones, sino más bien, debemos ser concientes de sus efectos a fin de seleccionar aquellas que sirvan para estructurar más adecuadamente el objeto matemático que se quiere enseñar.

Referencias bibliográficas

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V (2007. The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, International Reviews on Mathematical Education (ZDM) (en prensa)

Johnson, M (1991). El cuerpo en la mente. Madrid: Debate.

Lakoff, G y Johnson, M (1991). Metáforas de la vida cotidiana. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G y Núñez, R (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Núñez, R; Edwards, L y Matos, J F (1999). *Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 39, pp. 45-65.