Conectivos intuicionistas

Marta Sagastume

Introducción

Lo que sigue es un resumen de la conferencia dictada en la reunión de la Unión Matemática Argentina realizada en Mendoza en septiembre de 2008.

El objetivo principal de esta charla fue hacer una breve historia del concepto de conectivo intuicionista poniendo en claro sus motivaciones, la relación existente entre las diversas formas de definirlo y sus posteriores generalizaciones.

Suponemos conocidas las definiciones de reticulado y de álgebra de Heyting tal como figuran, por ejemplo, en [1]. También suponemos conocidos los conceptos básicos de teoría de categorías (ver, por ejemplo, [10]).

En primer lugar, se mencionarán resultados sobre ciertas álgebras de Heyting (aquellas cuyo reticulado subyacente es generado por elementos completamente primos), se dará la definición de los llamados modelos de Kripke y se mostrará la relación existente entre unas y otros. A partir de allí analizaremos definiciones y ejemplos de conectivos: en primer lugar, tres definiciones equivalentes de conectivos intuicionistas basadas en la semántica de Kripke y luego la definición categorial de conectivos en topos, en particular en los de la forma $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$. Mostraremos la relación de esta definición con las anteriores. Por último, veremos el punto de vista algebraico del concepto de conectivo en álgebras de Heyting (función compatible) y su generalización a reticulados residuados conmutativos.

Reticulados generados por primos

Sea $(P, \leq)$ un conjunto ordenado. Dado $p \in P$, sea $[p) = \{q \in P : p \leq q\}$ el *intervalo creciente de* p. Un subconjunto X de P es *creciente* si para cada elemento $x \in X$ el intervalo creciente de x está contenido en X. Sea P^+ la clase de los subconjuntos crecientes de P. Es sabido que $\langle P^+, \cup, \cap, \emptyset, P\rangle$ *es un subreticulado completo de* 2^P *(siendo* 2^P *el álgebra de Boole de las partes de* P*) y un álgebra de Heyting con la implicación:* $A \longrightarrow B = (A \cap B^c]^c$, donde ^{c} denota el complemento de conjuntos y donde indicamos con $(U]$ los elementos que son menores o iguales que los de U.

Sea L un reticulado completo. Un elemento x es *completamente primo* ó *c-primo* si: $\bigvee_{i \in I} x_i \geq x$ implica que existe i tal que $x_i \geq x$.

Los elementos de la forma $[p) = \{q \in P : p \leq q\}$ son c-primos en P^+.

Un reticulado completo se llama *generado por primos* ó brevemente *pg* si cada elemento es supremo de c-primos.
Luego P^+ es pg, ya que, si $U \in P^+$, $U = \bigcup_{p \in U} [p)$.
La recíproca también es cierta (ver siguiente teorema), o sea: si un reticulado es pg, entonces es isomorfo a uno de la forma P^+.

Teorema 1. *Para todo reticulado pg L existe un conjunto ordenado $(P, \leq)$ tal que $L \approx P^+$.*

El conjunto P del teorema 1 es el de los elementos c-primos de L munido del orden inverso del de L. El isomorfismo está dado por: $z \mapsto \{x \in P : x \leq z\}$.

Esto significa que podemos identificar los reticulados pg con los de la forma P^+.

Además, las álgebras de Heyting cuyo reticulado subyacente es pg son "representativas" de la clase de las álgebras de Heyting, pues toda álgebra de Heyting puede considerarse "incluída" en una pg; esto es lo que afirma el siguiente teorema.

Teorema 2. *Toda álgebra de Heyting es isomorfa a una subálgebra de una de la forma P^+.*

El conjunto P del teorema 2 es $P = \{F : F\, filtro\, primo\, de\, A\}$ y el monomorfismo $e_A : A \longrightarrow P^+$ viene dado por $e_A(x) = \{F \in P : x \in F\}$.
Un caso particular de este teorema es el *teorema de Stone* que dice que toda álgebra de Boole B es isomorfa a una subálgebra de un álgebra de Boole de la forma 2^P para cierto P. El conjunto P es el de los filtros primos de B. Para ver que es así, observemos que como en B todo filtro primo es maximal, los filtros primos no son comparables entre sí, por lo que P es una anticadena (cada elemento $F \in P$ es incomparable con todos los otros elementos de P) y por lo tanto las partes crecientes de P son *todas* las partes de P.

Modelos de Kripke y conectivos intuicionistas básicos

Sea α una fórmula del cálculo proposicional clásico. Para demostrar su validez en toda álgebra de Boole B basta con verificarla en el álgebra de Boole **2** cuyo conjunto subyacente es $\{0, 1\}$. Esto ocurre en base al teorema de Stone, pues B es isomorfa a una subálgebra de 2^P. Además, la completud del cálculo clásico dice que si es válida en **2** entonces es un teorema.

La completud del cálculo intuicionista no tiene una forma tan sencilla. Pensando en términos de álgebra universal eso se debe a que en la clase de las álgebras de Heyting hay “demasiadas” subdirectamente irreducibles, mientras que en la de las álgebras de Boole sólo una, que es **2**. Se trata entonces de reducir la verificación de validez de una fórmula a una subclase “representativa” de la de las álgebras de Heyting. Esta subclase es la de las álgebras de Heyting *pg*, es decir, las que son de la forma P^+ para algún conjunto ordenado P. Es por eso que se definen los *modelos de Kripke* que evalúan las fórmulas del cálculo proposicional intuicionista $\mathcal{L}_\mathcal{I}$ en conjuntos crecientes de cierto P. Kripke probó, en base a los teoremas de representación antes mencionados, la completud del cálculo intuicionista. Más precisamente, probó que si una fórmula es válida en todo modelo de Kripke, entonces es un teorema.

Definiremos entonces dichos modelos.

Un *modelo de Kripke* $\mathcal{M} = ((P, \leq), K)$ es un conjunto ordenado $(P, \leq)$ junto con una función de valuación $K : \mathcal{L}_\mathcal{I} \longrightarrow P^+$ que asigna a cada fórmula φ un conjunto creciente $K(\varphi) = \{p \in P : \ \mathcal{M} \models_p \varphi\}$, donde $\mathcal{M} \models_p \varphi$ se lee: “φ es válida en p según $\mathcal{M}$”. Si sobreentendemos $\mathcal{M}$, podemos escribir simplemente $\models_p$.

El conjunto $K(\varphi)$ es el “conjunto de verdad” de φ.

La relación $\models_p$ llamada “de forzamiento” debe cumplir las siguientes propiedades:

(1)	$\models_p \neg\alpha$	sii	$q \geq p$ implica $\not\models_q \alpha$,
(2)	$\models_p \alpha \vee \beta$	sii	$\models_p \alpha$ o $\models_p \beta$,
(3)	$\models_p \alpha \wedge \beta$	sii	$\models_p \alpha$ y $\models_p \beta$,
(4)	$\models_p \alpha \to \beta$	sii	para $q \geq p$: si $\models_q \alpha$ entonces $\models_q \beta$.

Diremos que α es *válida en* $\mathcal{M}$ si para todo p, $\mathcal{M} \models_p \alpha$, o sea, si el conjunto de verdad de α es todo P (que es el conjunto creciente máximo, el 1 de P^+). En símbolos: $K(\alpha) = P$.

Teorema 3. *Una fórmula α es un teorema en el CPI (cálculo proposicional intuicionista) si y sólo si es válida en todo modelo de Kripke.*

Para probar el teorema 3 se usa el hecho de que $e_A : A \longrightarrow P^+$ es un monomorfismo en el álgebra de Lindenbaum del CPI.

Las condiciones (1) a (4) pueden expresarse en función de K. En efecto, por la forma en que se define el forzamiento, si p está en $K(\neg\alpha)$ entonces $[p)$ no tiene puntos comunes con $K(\alpha)$. Luego, tampoco los tendrá con $(K(\alpha)]$, o sea que p estará en $(K(\alpha)]^c$ y la recíproca también vale. Es decir:

(Neg) $K(\neg\alpha) = (K(\alpha)]^c$

Para ver (2), usemos que $p \in K(\alpha \vee \beta)$ si y sólo si $p \in K(\alpha)$ ó $p \in K(\beta)$, que es equivalente a: $p \in K(\alpha) \cup K(\beta)$. En consecuencia:

(Sup) $K(\alpha \vee \beta) = K(\alpha) \cup K(\beta)$.

Análogamente pueden probarse las identidades:

(Inf) $K(\alpha \wedge \beta) = K(\alpha) \cap K(\beta)$,

(Imp) $K(\alpha \to \beta) = ((K(\beta))^c \cap K(\alpha)]^c$

Mirando el segundo miembro de las igualdades precedentes, vemos entonces que definir la relación de forzamiento equivale a dar funciones "semánticas" Φ_C, para C cada uno de los conectivos: $\neg, \vee, \wedge, \to$. La función Φ_C opera sobre los conjuntos de verdad $K(\alpha)$, $K(\beta)$ de manera que el conjunto $K(C\alpha)$ **se define** como $\Phi_C(K(\alpha))$ ó, si el conectivo es binario, $K(\alpha\ C\ \beta))$ se define: $\Phi_C(K(\alpha), K(\beta))$. Esto nos dice que estamos definiendo **semánticamente** el conectivo C, siendo C uno de los conectivos básicos. Parece entonces natural concebir a un **conectivo intuicionista** C semánticamente, definiéndolo en cada modelo por una función Φ_C (ver [2], [6]).

Las funciones para los conectivos básicos son, respectivamente:

$\Phi_\neg(U) = (U]^c$,
$\Phi_\vee(U, V) = U \cup V$,
$\Phi_\wedge(U, V) = U \cap V$,
$\Phi_\to(U, V) = (U^c \cap V]^c$.

Conectivos intuicionistas

Si consideramos los conectivos básicos $\neg, \vee, \wedge, \to$ como conectivos de la lógica clásica, estos quedan determinados semánticamente por las condiciones que deben cumplir las valuaciones en $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. En general, el valor de verdad de una fórmula compuesta depende de los valores de verdad de sus componentes y la forma de esa dependencia, que será una función de $\mathbf{2}^n \longrightarrow \mathbf{2}$ para una fórmula de n variables, es la que determina el conectivo. Puede probarse en el caso del cálculo clásico que los conectivos básicos forman un sistema *funcionalmente completo*. Bastaría, en realidad, tomar sólo dos: $\neg$ y uno de los otros. Esto significa que cualquier conectivo que podamos definir por medio de una función de $\mathbf{2}^n \longrightarrow \mathbf{2}$ resulta combinación de un número finito de aplicaciones de los conectivos básicos.

Esta propiedad no vale en el caso intuicionista. Existen conectivos que no son función de los básicos. Qué significa entonces ser un *conectivo intuicionista*? Qué es una definición apropiada? En 1995, X. Caicedo dió una definición semántica de conectivo intuicionista que presentaremos más adelante (ver más abajo definición 3). Según veremos, esta definición se basa en realidad en la noción categorial de *topos*, a la que también nos referiremos brevemente luego. Asimismo, en [8], 1999, se muestra una definición equivalente y en [5] aparece otra por funciones locales. En seguida veremos estas dos definiciones.

Puede probarse que las funciones Φ_C asociadas a los conectivos básicos (considerados ahora en el cálculo intuicionista) verifican una condición "local" (supongamos por ahora que Φ_C unaria). Para $p \in P$, $T \in P^+$:

$$(C) \;\; p \in \Phi_C(T) \;\; sii \;\; p \in \Phi_C(T \cap [p)).$$

La condición (C) es equivalente a la siguiente.

Para $T, U \in P^+$:

$$(\circ) \;\; \Phi_C(T) \cap U = \Phi_C(T \cap U) \cap U.$$

Con esta motivación, para definir nuevos conectivos (intuicionistas) pediremos entonces a las funciones Φ_C que cumplan la condición (C) (ó su equivalente, la ($\circ$)).

Observación 1. *La condición (C) es local en el sentido de que Φ queda determinada por sus valores en cada conjunto*

$$[p)^+ = \{S : \; S \; creciente, \; S \subseteq [p)\}.$$

En efecto, si conocemos dichos valores de Φ, entonces, en virtud de la condición (C) tenemos que, para $U \in P^+$, $\Phi(U) = \{p : \; p \in \Phi(U \cap [p))\}$.

Definición 1. *Un* conectivo intuicionista unario *C está dado en cada modelo de Kripke por una función $\Phi_C : P^+ \longrightarrow P^+$ que cumple (C).*

La definición semántica del conectivo C estará dada estableciendo en cada modelo la siguiente igualdad:

$$K(C\,\alpha) = \Phi_C(K(\alpha)),$$

o dicho de otra manera:

$$\models_p C\,\alpha \ \ sii \ \ p \in \Phi_C(K(\alpha)).$$

En general, si C fuera n-ario, la función cumpliría la condición:

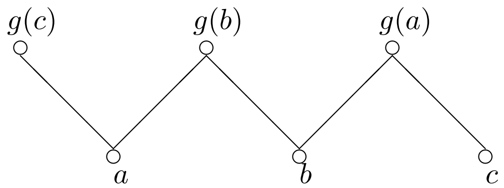
$$(\circ) \ \ \Phi_C(T_1, T_2, ..., T_n) \cap U = \Phi_C(T_1 \cap U, T_2 \cap U, ..., T_n \cap U) \cap U.$$

Aunque lo que diremos vale para conectivos n-arios, nos referiremos en lo que sigue sólo a conectivos unarios por simplicidad de la exposición.

Ejemplo de conectivo que no cumple (C)

Sea $(P, \leq)$ un conjunto ordenado dado por el diagrama abajo, con g una involución allí indicada. Definimos N en P^+ por: $N(T) = g(T^c)$.

La función N no satisfface la condición (C).



Tomemos $T = \{g(a), g(b)\}$. Entonces, $N(T) = \{c, g(a), g(b), g(c)\}$ y $N(T \cap [a)) = \{a, c, g(a), g(b), g(c)\}$. Se ve que $a \in N(T \cap [a))$ pero $a \notin N(T)$.

Ejemplos de conectivos que cumplen (C)

Sea $(P, \leq)$ un conjunto ordenado cualquiera, $U \in P^+$, sean S, γ y G las funciones:

$$S(U) = U \cup (U^c)_M, \quad \gamma(U) = U \cup P_M, \quad G(U) = (U \cup (U^c)_M) \cap ((U]^c]^c$$

$$(\textit{siendo} \ \ (X)_M = \{\textit{maximales de } X\}).$$

Entonces, para $\mathrm{R} = S$, γ, G

1) $\mathrm{R}(U) \in P^+$,

2) $\mathrm{R}(U \cap V) \cap V = \mathrm{R}(U) \cap V$.

Una definición equivalente

Como vimos, cada conectivo está caracterizado por una función Φ_C que cumple una condición local, pues depende de su comportamiento en los conjuntos $[p)^+$ y por lo tanto en los intervalos $[p)$. Recordemos que, según vimos en los teoremas referentes a las álgebras de Heyting P^+, toda la "información" de P^+ reside en los intervalos $[p)$. Es lógico preguntarse si Φ_C puede descomponerse en funciones locales f_p de manera que también a partir de ellas pueda recomponerse Φ_C. Es decir, que sea equivalente dar Φ_C ó una familia $\{f_p\}$. El lema 4 prueba que es posible hacer lo que planteamos.

Definición 2. *Un* conectivo intuicionista unario *C está dado en cada modelo de Kripke por una familia de funciones $\{f_p\}_{p\in P}$ que satisfacen*

(1) $f_p : [p)^+ \longrightarrow [p)^+$;

(2) *Para todo $p \in P$, si $q \geq p$ entonces, para $T \in [p)^+$,*
$f_p(T) \cap [q) = f_q(T \cap [q))$.

Lema 4. *Dada una función Φ que cumple (C), la familia*

$$f_p(T) = \Phi(T) \cap [p)$$

verifica (1) y (2).

Recíprocamente, dada una tal familia, se define Φ que cumple (C) por:

$$\Phi(T) = \{q \in P : q \in f_q(T \cap [q))\}.$$

Conectivo intuicionista según Caicedo

Definición 3. *([2]) Un conectivo intuicionista unario C está dado (en cada modelo) por una familia $\{F_p\}_{p\in P}$ tal que:*

(1) Si $S \in F_p$, entonces S es creciente y $S \subseteq [p)$,

(2) Si $p \leq q$ y $S \in F_p$, entonces $S \cap [q) \in F_q$.

Se define entonces el conectivo semánticamente por:

$\models_p C\,\alpha$ *si y sólo si* $K(\alpha) \cap [p) \in F_p$

Por ejemplo, la negación intuicionista $\neg$ queda determinada por la familia $\{F_p\}_{p\in P}$, donde para cada p, $F_p = \{\emptyset\}$.

Los conjuntos F_p se interpretan como los "conjuntos de verdad locales" correspondientes a las fórmulas de la forma $C\,\alpha$.

Equivalencia de las tres definiciones

Puede verificarse que es equivalente dar el conectivo por una familia $\{F_p\}$ ó por una función Φ.

Lema 5. *Dada $\{F_p\}_{p\in P}$, entonces la correspondiente función Φ se define por:*

$$(*) \quad \Phi(S) = \{p : S \cap [p) \in F_p\}$$

Recíprocamente, dada una función $\Phi : P^+ \longrightarrow P^+$ que cumple (C), se define la familia $\{F_p\}_{p\in P}$ por:

$$S \in F_p \textit{ sii } p \in \Phi(S).$$

Conectivos en Topos

Conjuntos intensionales

Daremos a continuación algunas ideas intuitivas (ver [9], cap. 10) que motivan la definición de conectivo intuicionista en cualquiera de las tres formas vistas y que muestran la vinculación de dicha definición con el concepto categorial de topos.

Supongamos que Q es una propiedad de individuos. Semánticamente, estará caracterizada por la *extensión* de Q, que es el conjunto de individuos para los cuales se cumple Q: $\{x : Q(x) \textit{ es verdad}\}$.

Pero la verdad de un enunciado puede ser *relativa* a, por ejemplo, un instante de tiempo, un mundo posible, un estado de conocimiento,... Luego, dado el conjunto ordenado $(P, \leq)$ de, digamos, instantes de tiempo, tendremos los conjuntos *extensión* de Q en p, para $p \in P$ dados por:

$Q_p = \{x : Q(x) \textit{ es verdad en } p\}$.

Analizaremos ahora la correspondencia $p \longrightarrow Q_p$ que queda así establecida.

Un conjunto ordenado $(P, \leq)$ puede considerarse como una categoría, que llamaremos P. Los objetos de P son los elementos de P y existe un morfismo de p a q si $p \leq q$.

La correspondencia recién mencionada puede considerarse entonces como un funtor Q de P en la categoría de conjuntos Set. En efecto, a cada objeto de P se le hace corresponder el conjunto Q_p, objeto de Set. Si $p \leq q$ para $p, q \in P$ y si suponemos que la verdad persiste en el tiempo, entonces será $Q_p \subseteq Q_q$. Es decir que el morfismo entre p y q se transforma por Q en la inclusión entre Q_p y Q_q.

Se puede considerar ahora la categoría de funtores de P en Set (cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos), denotada $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$. Dichos funtores serán llamados *conjuntos intensionales*.

Si bien este punto de vista trae aparejados varios problemas filosóficos, podemos aceptarlo como motivación del estudio de las categorías de la forma $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ o *prehaces*, que son un caso particular importante de *topos*, concepto que veremos ahora.

Pero antes necesitamos definir ciertos objetos distinguidos que existen en las categorías que nos interesan.

Objetos terminales y productos

Un objeto de una categoría C se llama *terminal* o *final* en C y se denota $\mathbf{1}$ si para cada objeto a existe y es única la flecha $a \longrightarrow \mathbf{1}$. Un objeto terminal en C, de existir, es único salvo isomorifsmo. Un objeto terminal de Set es cualquier conjunto unitario.

El *producto* de dos objetos a y b en C es un objeto $a \times b$ en C (único salvo isomorfismo) tal que existen flechas $a \longleftarrow a \times b \longrightarrow b$ y además para todo otro diagrama $a \longleftarrow c \longrightarrow b$ existe y es única la flecha $c \longrightarrow a \times b$ que hace conmutar el siguiente diagrama en C:

$$\begin{tikzcd} a & c \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & b \\ & a \times b \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

El producto de dos conjuntos A y B en Set es su producto cartesiano.

Pullback y pushout

Veamos ahora lo que es un *pullback* (literalmente "tirar para atrás") en Set para luego generalizar a una categoría cualquiera dicho concepto.

Consideremos, dadas dos aplicaciones $f : A \longrightarrow C$, y $g : B \longrightarrow C$ en Set, el siguiente subconjunto del producto $A \times B$:

$D = \{(x, y) : x \in A, y \in B, f(x) = g(y)\}$.

Llamando p, q a las proyecciones del producto restringidas a D tenemos que

(*) el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

No solamente eso, sinó que

(**) para todo par de funciones $p' : D' \longrightarrow A$, $q' : D' \longrightarrow B$ tales que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "p'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

existe $k : D' \longrightarrow D$ tal que $k \circ p = p'$, $k \circ q = q'$.

(La condición (**) significa que D es "el más grande" que hace conmutar el diagrama).

Cualquier objeto isomorfo a D es un *pullback* de f, g.

Por ejemplo, si $A \subseteq C$ y tomamos como f la inclusión, el pullback de f y g es

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(A) \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "inc"'] & C \end{tikzcd}$$

(siendo g' la restricción de g a $g^{-1}(A)$).

Esta situación se generaliza a una categoría cualquiera. Es decir que: dados los morfismos

$$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$$

diremos que

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

es un diagrama de pullback si

(*) conmuta y

(**) Si

$$\begin{tikzcd}
d' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "p'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

conmuta, existe $k : d' \longrightarrow d$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & d' \arrow[dl, "p'"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "q'"] & \\
a & d \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & b
\end{tikzcd}$$

conmuta.

En una categoría cualquiera no siempre existe el pullback.

El concepto dual del de pullback es el de *pushout (p.o.)*

Clasificador de subobjetos

En la categoría Set, es equivalente dar una inclusión entre dos conjuntos: $Y \subseteq X$ a dar la *función característica* de Y en X; dicha función $\kappa_Y : X \longrightarrow \mathbf{2}$ se define por: $\kappa_Y(y) = 1$ si $y \in Y$, $\kappa_Y(y) = 0$ si $y \in X - Y$. Es decir que $\kappa_Y^{-1}(1) = Y$.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "k_Y"] \\
\{0\} \arrow[r, "true"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

donde la función $true : \{0\} \longrightarrow \mathbf{2}$ se define por $true(0) = 1$, i es la inclusión: $Y \hookrightarrow X$, y $!$ es la única función existente entre Y y $\{0\}$ (por ser $\{0\}$ objeto terminal).

El diagrama anterior es un diagrama de *pullback*.

Para cada objeto X, dada una función $k : X \longrightarrow \mathbf{2}$, el pullback de

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "k"] \\
\{0\} \arrow[r, "true"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

es un objeto isomorfo a $k^{-1}(1)$, que es subconjunto de X.

Es decir que el objeto $\mathbf{2}$ (junto con el morfismo $true$) “clasifica” subconjuntos construyendo el pullback.

Definición 4. *En una categoría en la cual hay pullbacks y objeto terminal* $\mathbf{1}$*, un objeto* Ω *se llama clasificador de subobjetos si existe una flecha* $true : \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ *tal que para cada subobjeto* d *de* a *existe y es único el morfismo* κ_d*, tal que el siguiente es un diagrama de pullback:*

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!"'] & a \arrow[d, "k_d"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Exponenciación

Como en el caso anterior, daremos una idea de la noción de exponenciación, empezando por estudiarla en los conjuntos y generalizándola a cualquier categoría.

Consideremos en Set el conjunto $B^A = \{funciones\ de\ A\ en\ B\}$.
La función de evaluación $ev : B^A \times A \longrightarrow B$ se define por:
$ev((f, x)) = f(x)$.

Esta función tiene una propiedad universal con respecto a las funciones de la forma $g : C \times A \longrightarrow B$, siendo C cualquier conjunto.

En efecto, dada g existe y es única $\hat{g} : C \longrightarrow B^A$ definida por:
$\hat{g}(z) = g_z : A \longrightarrow B$, donde $g_z(x) = g(z, x)$, que tiene la propiedad de que el morfismo $\hat{g} \times id_A : C \times A \longrightarrow B^A \times A$ hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \times A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\widehat{g} \times id_A"'] & B \\ B^A \times A \arrow[ur, "ev"'] & \end{tikzcd}$$

Una categoría tiene exponenciación si tiene productos y si para cada par de objetos a, b existe otro b^a y una flecha $ev : b^a \longrightarrow b$ que cumple la propiedad universal arriba mencionada.

Topos: valores de verdad, conectivos, valuaciones, validez

Definición 5. *Un* topos *es una categoría que tiene pullbacks, objeto terminal, exponenciación y clasificador de subobjetos.*

El ejemplo motivador es la categoría Set.

Los conceptos de valores de verdad, conectivos, valuaciones y validez de la lógica clásica podemos mirarlos como definidos en Set y es natural entonces generalizarlos a un topos.

Valores de verdad

Podemos pensar los valores de verdad booleanos 0, 1 (elementos de $\mathbf{2}$) como flechas: $false, true : \{0\} \longrightarrow \mathbf{2}$ (siendo $false(0) = 0$).

Los *valores de verdad en un topos* serán entonces:

$f : \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ ("elementos" de Ω) .

Conectivos

Todos los conectivos booleanos pueden definirse por tablas de verdad: $\mathbf{2}^n \longrightarrow \mathbf{2}$. En este caso, siempre son combinaciones de conectivos básicos, lo que no sucederá en un topos cualquiera.

Los *conectivos en un topos* están definidos por morfismos: $\Omega^n \longrightarrow \Omega$.

Valuaciones

Una valuación clásica es una asignación de un valor de verdad a cada variable proposicional que se extiende a cada fórmula a través de las tablas de verdad de los conectivos.

De manera análoga, una *valuación en un topos* es una asignación de un valor de verdad $f : \mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ a cada variable proposicional. Se extiende a través de los conectivos básicos, que son como dijimos morfismos de $\Omega^n \longrightarrow \Omega$ (n=1 ó 2).

Validez

Entonces, así como una fórmula del cálculo proposicional es válida si toda valuación le asigna el valor 1, una fórmula será *válida* en un topos si para toda valuación, el valor de verdad correspondiente a la fórmula es el morfismo *true*.

Topos $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$

Como anticipamos, nos interesará ahora un tipo de topos particular: dado un conjunto ordenado $(P, \leq)$ vamos a considerar el topos $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$, cuyos objetos son los funtores Q de P en Set y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos.

Un tal funtor Q puede ser identificado con la familia $\{Q_p\}$ con $p \in P$ (lo que da el funtor Q en los objetos) junto con la familia de funciones $f_{pq} : Q_p \longrightarrow Q_q$ para $p \leq q$ (lo que da Q en los morfismos), que no serán en general inclusiones, pero que cumplen las siguientes condiciones:

1) $f_{pp} = id_{Q_p}$,

2)$f_{pr} = f_{qr} \circ f_{pq}$, si $p \leq q$, $q \leq r$.

Los morfismos de $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ son transformaciones naturales $m : Q \longrightarrow R$, es decir, familias de funciones $m_p : Q_p \longrightarrow R_p$ tales que los siguientes diagramas conmutan (cada vez que $p \leq q$):

$$\begin{tikzcd} Q_p \arrow[r, "m_p"] \arrow[d, "f_{pq}"'] & R_p \arrow[d, "g_{pq}"] \\ Q_q \arrow[r, "m_q"'] & R_q \end{tikzcd}$$

(aquí g_{pq} es la familia de morfismos asociada a R).

El clasificador de subobjetos de $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ es el objeto Ω dado por $\Omega_p = [p)^+$ y por: $\omega_{pq} : [p)^+ \longrightarrow [q)^+$ definidas por: $\omega_{pq}(S) = S \cap [q)$.

Un importante resultado acerca de los topos de la forma $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ es el siguiente:

Teorema 6. *(ver [9], cap. 10, Validity Theorem) Para todo conjunto ordenado $(P, \leq)$, para toda fórmula α del cálculo proposicional, α es válida en $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ si y sólo si α es válida en todo modelo de Kripke $\mathcal{M} = ((P, \leq), K)$.*

Conectivos en $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ versus tres formas de definir conectivos intuicionistas

Un *conectivo* (unario) C en $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ es una transformación natural $C : \Omega \longrightarrow \Omega$.

Para p en P, $C_p : [p)^+ \longrightarrow [p)^+$, y para $p \leq q$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} {[p)^+} \arrow[r, "C_p"] \arrow[d, "\omega_{pq}"'] & {[p)^+} \arrow[d, "\omega_{pq}"] \\ {[q)^+} \arrow[r, "C_q"'] & {[q)^+} \end{tikzcd}$$

O sea, que: $C_q(\omega_{pq}(S)) = C_q(S \cap [q)) = C_p(S) \cap [q) = \omega_{pq}(C_p(S))$.

La definición de conectivo unario en $\mathsf{Set}^{\mathsf{P}}$ es equivalente a cada una de las definiciones que dimos (se verifica también para conectivos n-arios).

Daremos explícitamente la forma de mostrar la equivalencia en cada caso.

Lema 7. *(Definición 1, por función global Φ) Interdefinimos Φ y la familia C_p por:*

$$\Phi(S) \cap [p) = C_p(S).$$

(Debido a la observación 1, basta definir Φ en cada conjunto $[p)^+$.)

Lema 8. *(Definición 2, por familia de funciones $\{f_p\}_{p \in P}$)*

$$f_p(S) = C_p(S).$$

Coinciden! La condición (2) de la definición de las f_p es la conmutatividad del diagrama precedente para las C_p.

Lema 9. *(Definición 3, de Caicedo) Las familias $\{F_p\}_{p \in P}$ y $\{C_p\}_{p \in P}$ pueden interdefinirse de la siguiente manera:*

$$S \in F_p \text{ sii } C_p(S) = [p).$$

(para $S \in [p)^+$)

La condición (1) de la definición de Caicedo define el dominio y codominio de las funciones C_p y la condición (2) es equivalente a la conmutabilidad del diagrama anterior con las funciones ω_{pq}.

Conectivos intuicionistas definidos algebraicamente

Veremos ahora el punto de vista algebraico de la noción de conectivo intuicionista. Aunque lo que interviene en la definición es una condición acerca de las congruencias de un álgebra, ella está directamente vinculada con las definiciones que hemos venido estudiando anteriormente.

En 2001, Caicedo y Cignoli dan una definición algebraica de conectivo intuicionista a través de la noción de *función compatible*.

Definición 6. *([3]) Sea A un álgebra de Heyting. Una función $f : A^n \to A$ es compatible con una relación de congruencia Θ de A si: $(x_i, y_i) \in \Theta$ para $i = 1, ..., n$ implica $(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)) \in \Theta$.*

Decimos que f es una *función compatible de A* si es compatible con todas las congruencias de A.

Lema 10. *([3], Lemma 2.1) Para toda aplicación $f : A \to A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Para todo x, a de A,* $\quad f(x) \wedge a = f(x \wedge a) \wedge a$;

(b) *Para todo x, y de A,* $\quad x \leftrightarrow y \leq f(x) \leftrightarrow f(y)$;
(aquí $u \leftrightarrow v = (u \to v) \wedge (v \to u)$)

(c) *f es una función compatible de A.*

Observación 2. *En el caso de las álgebras de Heyting* **pg**, *la condición:*

(a) $\quad f(x) \wedge a = f(x \wedge a) \wedge a$,

coincide con:

$(\circ)$ $\quad \Phi_C(T) \cap U = \Phi_C(T \cap U) \cap U$.

Esta condición, según el lema antes mencionado, significa que:

(c) *f es una función compatible de A.*

Luego, las funciones Φ_C definidas en las álgebras de la forma P^+ son funciones compatibles de dichas álgebras y ellas dan lugar a conectivos implícitos definidos semánticamente (por modelos de Kripke) como ya vimos.

La demostración del lema 2.1 de [3] se basa principalmente en dos propiedades de las álgebras de Heyting:

1) Isomorfismo entre congruencias y filtros

Dada un álgebra de Heyting A se establece la siguiente correspondencia, que resulta un isomorfismo:

A una congruencia Θ de A le corresponde el filtro $\Theta(1)$, que es la clase de equivalencia del 1.

A un filtro F de A le corresponde la congruencia Θ_F definida por: $(x, y) \in \Theta_F$ si y sólo si $x \leftrightarrow y \in F$.

2) Congruencias principales ecuacionalmente definibles (EDPC).

Sea $\Theta_{(a,b)}$ la congruencia principal generada por (a, b), es decir, la menor congruencia que contiene al par (a, b). Existen términos $\mathrm{u}_i, \mathrm{v}_i$ tales que $(x, y) \in \Theta_{(a,b)}$ si y sólo si $\mathrm{u}_i(x, y, a, b) = \mathrm{v}_i(x, y, a, b)$, para $i = 1, 2, ..., k$.

Son equivalentes:

(i) $(x, y) \in \Theta_{(a,b)}$

(ii) $x \leftrightarrow y \in \Theta_{(a,b)}(1)$

(iii) $x \leftrightarrow y \geq a \leftrightarrow b$

La equivalencia de (ii) y (iii) proviene del hecho de que $\Theta_{(a,b)}(1)$ es el filtro cuyo mínimo elemento es $a \leftrightarrow b$.

Entonces, para las álgebras de Heyting hay una sola ecuación del tipo: $\mathrm{u}_i(x, y, a, b) = \mathrm{v}_i(x, y, a, b)$

y está dada por: $(x \leftrightarrow y) \wedge (a \leftrightarrow b) = a \leftrightarrow b$.

Es decir que

$\mathrm{u}(x, y, a, b) = (x \leftrightarrow y) \wedge (a \leftrightarrow b)$ y $\mathrm{v}(x, y, a, b) = a \leftrightarrow b$.

La condición (b) del lema de Cignoli y Caicedo dice que: una función f es compatible si y sólo si
$\mathrm{u}(x, y, f(x), f(y)) = \mathrm{v}(x, y, f(x), f(y))$, o sea si
$(x \leftrightarrow y) \wedge (f(x) \leftrightarrow f(y)) = x \leftrightarrow y$.

Generalización a reticulados residuados conmutativos

Un *reticulado residuado conmutativo* (*CRL*) es un álgebra $(L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e)$, donde $(L, \wedge, \vee)$ es un reticulado, que consideraremos distributivo, $(L, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo y $\rightarrow$ es una operación binaria tal que para cada x en L se cumple la siguiente condición (de *adjunción*):

para todo y y z en L,

$$x \cdot y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \rightarrow z.$$

Esta condición puede ser expresada mediante las siguientes ecuaciones:

1. $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$,
2. $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,
3. $x \cdot (x \rightarrow y) \leq y$,
4. $x \rightarrow (x \cdot y) \geq y$.

Esto muestra que la clase de los CRL's es una variedad.

Observación 3. *Un álgebra de Heyting tiene una estructura de CRL. En efecto, el producto es* $\wedge$ *y se tiene la adjunción:* $x \wedge y \leq z$ *sii* $x \leq y \to z$.

Las condiciones (1) y (2) de la sección anterior para álgebras de Heyting se generalizan a un CRL de la siguiente manera (ver, por ejemplo, [7]):

(1') *Hay un isomorfismo entre las congruencias y las subálgebras convexas (éstas generalizan los filtros).*

(2') *Dada* $\Theta_{(a,b)}$ *existen términos* u_{in}, v_{in} *(n natural) tales que* $(x, y) \in \Theta_{(a,b)}$ *sii existe* n *tal que* $u_{in}(x, y, a, b) = v_{in}(x, y, a, b)$.

En 2008, Castiglioni, Menni y Sagastume (ver [4]) probaron un criterio para la compatibilidad de una función f (vale en general para toda $f : L^k \to L$, con k natural):

Teorema 11. *Dado un CRL* L*, una función* $f : L \to L$ *es compatible sii para* $x, y \in L$ *existe* n *tal que* $s(x, y)^n \leq s(f(x), f(y))$*, siendo* $s(x, y) := ((x \to y) \wedge e) \cdot ((y \to x) \wedge e)$.

Este teorema abre la posibilidad a la definición de conectivos definidos en las lógicas *subestructurales*, que son las asociadas a los CRL.

Quiero agradecer a mis queridos colegas J.L. Castiglioni, M. Menni y R. Ertola y a mi alumno H. San Martin por leer con cuidado este trabajo y por sus sugerencias y correcciones.

Referencias

[1] Balbes, R. and Dwinger, P., *Distributive Lattices*, (1974), University of Missouri Press.

[2] X. Caicedo. Investigaciones acerca de los conectivos intuicionistas. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 19, (1995), 705-716.

[3] X. Caicedo and R. Cignoli. An algebraic approach to intuitionistic connectives. *The Journal of Symbolic Logic*, 66(4),(2001), 1620-1636.

[4] J. L. Castiglioni, M. Menni, M. Sagastume. Compatible operations on commutative residuated lattices. *JANCL*, vol 18, (2008), 413-425.

[5] R. Ertola, A. Galli and M. Sagastume. Compatible functions in algebras associated to extensions of positive logic. *Journal of IGPL*, vol 15, (2007), 109-119.

[6] D. M. Gabbay, On Some New Intuitionistic Propositional Connectives. I. *Studia Logica* 36 (1977) (1-2).

[7] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 151, (2007), Elsevier.

[8] Galli, A., Sagastume, M. Symmetric-intuitionistic connectives, Models, Algebras and Proofs, C. Montenegro, X. Caicedo (eds.) *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, (1999), 267-279.

[9] Goldblatt, R., *Topoi: the Categorial Analysis of Logic*, (1984) North-Holland.

[10] MacLane, S. *Categories for the working mathematician*, Graduate Text in Math., (1971) Springer-Verlag.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de La Plata.