Propuesta para superar algunos modelos intuitivos no apropiados de límite funcional

Vilma Colombano – Mabel Rodríguez
vcolomba@ungs.edu.ar – mrodri@ungs.edu.ar

Universidad Nacional de General Sarmiento. Instituto del Desarrollo Humano.
Juan María Gutiérrez 1150. Los Polvorines. Buenos Aires. Argentina.

1. FUNDAMENTACIÓN

El estudiante que inicia el estudio de la noción de límite funcional se encuentra rodeado de cuestiones que obstaculizan su aprendizaje. La complejidad propia del concepto, sumada a las apreciaciones que el alumno posee de la palabra límite y al proceso de enseñanza, hacen que en la mente del estudiante existan complejas amalgamas de ideas informales, denominadas modelos intuitivos. El objetivo de nuestro trabajo consiste en diseñar y fundamentar actividades para estudiantes de profesorado de Matemática, que permitan evidenciar contradicciones al utilizar los modelos intuitivos que no son matemáticamente correctos.

Marco teórico

El marco teórico de este trabajo toma elementos del Enfoque Cognitivista de la Didáctica de la Matemática. Esta línea es apropiada para estudiar nociones avanzadas de Matemática, tanto sea para organizar su enseñanza para un aula de determinada institución, como para llevar adelante investigaciones sobre ellas. De hecho, en este enfoque se parte de pensar en los conceptos matemáticos *desde la propia Matemática.* Según se expresa en la Teoría APOS (action, process, object, schema) debida a Dubinsky (1991) se debería partir de un análisis que ponga de manifiesto las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en el aprendizaje de la noción en particular. Esto es denominado *descomposición genética* del concepto y no necesariamente la descomposición que se obtiene es única. En gran medida, la mirada del investigador, su comprensión del concepto, el recorte histórico que ha realizado, constituyen o determinan su descomposición genética. En esta misma línea se postula que el mecanismo de construcción de conocimientos es la *abstracción reflexiva*. Esto se refiere a un proceso de cada sujeto que le permite, a partir de acciones sobre un objeto matemático, inferir sus propiedades, relaciones, etc. Asimismo, este mecanismo implica la toma de conciencia de las acciones, separarlas del contenido y reinsertar estas nociones en un marco cognitivo reorganizado, de nivel superior. Se dice que un sujeto está *a nivel acción* si éste es capaz de actuar sobre objetos matemáticos cuando recibe una indicación clara, externa a sí mismo, a partir de la cual puede operar sobre los objetos. El individuo está *a nivel proceso* cuando es capaz de incorporar estas acciones a su conocimiento y decide llevarlas a cabo por su propia cuenta, sin necesidad de indicaciones externas. Estas acciones repetidas pueden ser entonces interiorizadas como procesos a partir de la reflexión sobre ellas. Si el proceso es percibido como un todo y el sujeto es capaz de actuar sobre él, manipularlo en su complejidad, se ha logrado lo que Dubinsky denomina *encapsulación del proceso*. Esta encapsulación transforma cognitivamente el proceso en objeto. Se dice, entonces, que el sujeto está *a nivel objeto*. Por último, y a un nivel cualitativamente más complejo aún, es posible que el sujeto comprenda que los objetos se organizan en esquemas mentales, conteniendo relaciones entre ellos, jerarquías, etc. Si el individuo es capaz de comprender esto, se dice que está *a nivel esquema*. Para este trabajo, estas nociones son sumamente apropiadas pues nos permiten comprender el nivel en el que los estudiantes se encuentran cuando están aprendiendo la noción de límite funcional. Podemos pensar en algunas características de estas nociones teóricas para el concepto matemático trabajado. Por ejemplo: estar a nivel acción podría manifestarse cuando un estudiante es capaz de completar una tabla de valores que le propone el docente pero no podría decidir qué valores asignar a la variable independiente que represente "la tendencia de ella". En cambio, a nivel proceso sí podría generar autónomamente una tabla de valores, explorar numéricamente el comportamiento, o decidir hacer un gráfico e inducir el posible resultado. Para estar a nivel objeto es necesario que el estudiante trascienda la idea de acercarse infinitamente como proceso que no culmina, idea que propone una dinámica de "movimiento" que a los fines intuitivos es útil pero deja de serlo a la hora de comprender el concepto. Deberá comprender que el límite *es* un valor (supongamos para este ejemplo, el caso finito), que la función no se "mueve"

acercándose a ese valor, que la dinámica que subyace a esta noción finalmente se encapsula de modo que el límite *tiene* un resultado.
La elección didáctica del docente, sin dudas condiciona el aprendizaje del estudiante. Lo que decida incluir en sus clases, desde modos intuitivos de acercarse al concepto hasta la formulación precisa del concepto, conforman parte de lo que se denomina la *imagen conceptual* de la noción matemática. Este concepto, gestado por Tall y Vinner (1981) se refiere a imágenes, propiedades, notaciones, utilidades, etc. con las que el estudiante asocia el concepto en cuestión. Si pensamos en clases que comienzan por exploraciones numéricas utilizando tabla de valores, gráficos que describen comportamientos, funciones que no están definidas en el punto de análisis, propiedades que permiten hace más sencillo el cálculo de límites, resolución de indeterminaciones utilizando procedimientos “tipo”, etc. podríamos anticipar que estos elementos en forma de imágenes no necesariamente coherentes ni correctas constituirían la imagen conceptual de los estudiantes sobre la noción de límite. Si en cambio un docente circunscribiera sus clases a la resolución de indeterminaciones sin ahondar ni precisar sobre el concepto, no formarían parte de la imagen conceptual los recursos numéricos ni los gráficos recién mencionados. Cornu (1991) hace un aporte interesante a esta noción, estableciendo que para algunas nociones matemáticas cuya terminología “es familiar” para el alumno, el término en sí mismo aporta creencias o concepciones que se trasladan al significado matemático que no necesariamente se vincula con el uso cotidiano de la palabra. Para la noción de límite, esto es un problema, pues la palabra admite variedad de usos en la cotidianidad y los estudiantes aplican estos significados en contextos matemáticos, obteniendo resultados, muchas veces, inapropiados. Podemos mencionar “los límites de una región”, “límites de velocidad”, “el poner límites a un adolescente”, etc. Estas concepciones provenientes de los términos matemáticos son denominadas, por Cornu, como *concepciones espontáneas* de la noción. El mismo término indica que están presentes desde antes de la enseñanza. Ellas también constituyen parte de la imagen conceptual de la noción matemática. El otro concepto presentado por Tall y Vinner es el de *definición conceptual*, que hace referencia a la definición propia matemática del concepto. Es interesante cómo se da el intercambio cognitivo entre la imagen y la definición conceptual pudiendo ocurrir desde un estudiante que responde a una actividad apelando únicamente a su imagen conceptual (pudiendo obtener respuestas correctas o no según qué parte de ella se activó y el grado de complejidad de la tarea) hasta estudiantes más cómodos con el lenguaje matemático que, incluso sin tener variedad en su imagen conceptual, apelan cómodamente a la definición conceptual y operan con ella. Los *registros de representación semiótica* (Duval 1993, Hitt 1997) son elementos teóricos que permiten enriquecer los análisis en este sentido, pues distintas representaciones semióticas pueden formar parte de la imagen conceptual, según el trabajo que el docente haya realizado en clase.
También hemos incluido entre los elementos teóricos que nos permiten comprender, explicar y trabajar con el concepto de límite funcional, la noción de *modelos intuitivos de límite* desarrollada por Williams (1991) y trabajada también por Juter (2007). Esta noción se vincula con las concepciones espontáneas pero agrega ciertos elementos que enriquecen el análisis. Los modelos de límite se refieren a comprensiones de la noción que los estudiantes manifiestan o presentan luego de la enseñanza del concepto. Se refieren a modelos mentales que son parte de la imagen conceptual de la noción y que los alumnos construyen o refuerzan a partir de la enseñanza. La mayoría de ellos tiene un campo de validez, en el cual al utilizarlo el estudiante resulta eficaz en la tarea, pero no todos son matemáticamente correctos. Los modelos de límite son seis, cuya formulación incluimos a continuación en cita textual del autor.
Dinámico-teórico: el límite es un valor que describe cómo una función se mueve cuando x tiende a un cierto punto.
Dinámico-práctico: en este modelo el límite se decide insertando valores de x cada vez más cercanos a un número dado hasta que el valor del límite es alcanzado.
Cota: el valor de un límite es un número más allá del cual la función no puede pasar.
Formal: corresponde a la definición formal de límite. El modelo se caracteriza por reconocer la arbitrariedad de la cercanía de las imágenes de la función respecto del límite restringiendo los valores de x a un entorno de punto de estudio del límite.
No alcanzable: el límite es un valor al cual una función se aproxima pero nunca alcanza.
Aproximación: el valor del límite es una aproximación que puede ser hecha tan precisa como se desee.
Cabe aclarar que los modelos denominados Formal y Aproximación son matemáticamente correctos, mientras que los modelos Dinámico-teórico; Dinámico-práctico, Cota y No alcanzable son inapropiados y tienen un campo de validez limitado.

La persistencia de los modelos intuitivos inapropiados luego de la enseñanza, nos orienta a diseñar actividades que tiendan a poner el conflicto estas creencias que subyacen en la mente del alumno con el fin de acercarlos a la definición conceptual.

Antecedentes

Un estudio llevado a cabo con estudiantes de un profesorado de Matemática de la Provincia de Buenos Aires, que cursan Análisis Matemático I nos permitió detectar modelos intuitivos de límite de funciones de variable real presentes luego de la enseñanza de la definición formal.

Del análisis del estudio y a la luz del marco teórico podemos mencionar que la mayoría de los estudiantes consideran que los modelos intuitivos Dinámico-teórico y No alcanzable se adecuan a su idea de límite, a pesar que en la resolución de actividades pudimos evidenciar el uso de todos los modelos en diferentes alumnos. Los modelos con los que operan, les permiten dar respuesta a muchas de las situaciones planteadas, en consecuencia encuentran que "funcionan", lo que los conduce a no necesitar, ni utilizar la definición formal. Esto se vincula con lo que Tall y Vinner (1981) explican como posibles formas de pensar de un estudiante ante una actividad, quien puede apelar: únicamente a la definición conceptual, hacer una entrada por la imagen conceptual para ponerla en discusión con la definición conceptual o al revés e incluso podrían únicamente utilizar la imagen conceptual. Nos resultó interesante observar que no siempre operan con el mismo modelo, adecuan su elección al tipo de situación y en algunos casos al registro de representación en el que se plantea la actividad. Esto da cuenta, como es sabido, que la imagen mental del concepto está formada por varias ideas, algunas contradictorias entre sí, que utilizan según la situación que abordan aunque no necesariamente el estudiante advierte la contradicción, excepto que esas partes contradictorias sean interpeladas simultáneamente. Mientras esto último no ocurra, usarán una parte u otra de esa imagen de manera inconsciente, no podrán evidenciar contradicciones entre ellas pues no habrá presencia de conflicto alguno, seguirán considerando efectivos a los modelos, los utilizarán con éxito y no la necesidad de evolucionar hacia la comprensión más profunda, no solo intuitiva, del concepto de límite.

Ante esta situación consideramos necesario conocer los alcances de cada modelo, es decir analizar bajo qué circunstancias es útil, para el alumno, operar con cada uno de ellos.

El primer modelo analizado fue el Dinámico-práctico, evidenciamos que para poner de manifiesto su limitado alcance debíamos trabajar minuciosamente sobre el registro numérico (tabla de valores). En él el estudiante pone énfasis en el análisis efectuado sobre algunos elementos del entorno reducido del punto (los que decide incluir en la tabla de valores o le vienen dados en ella), para luego emitir una respuesta sobre el valor del límite analizando únicamente las imágenes de dichos puntos. Con esta información generamos una propuesta de actividades tendientes a poner en discusión la validez del mismo, como puede verse en Colombano et al. (2009).

2. DESARROLLO

A partir de los antecedentes y a la luz del marco teórico enfocamos este trabajo hacia el análisis de otros modelos muy utilizados por los estudiantes: Cota, No alcanzable y Dinámico-teórico. El objetivo es diseñar y fundamentar una propuesta de actividades que provoque en el estudiante un conflicto cognitivo que le permita tomar conciencia de la limitación de cada modelo puesto en juego al resolver ciertas actividades, acercándolo a una comprensión más cercana a la definición conceptual.

Consideramos que la puesta en práctica de esta secuencia podría tener una modalidad que comience con un trabajo de resolución individual para en un segundo momento pasar a una instancia de tipo taller, con grupos no muy numerosos, para fomentar la discusión en la resolución de cada actividad. Esto atiende no solo a la activa participación del estudiante sino también a la intervención del docente como moderador de discusión y de los tiempos de resolución. La riqueza de la conclusión final de la puesta en práctica de la secuencia aportaría elementos suficientes para debilitar el uso de los modelos en cuestión.

Proponemos las actividades que ponen de manifiesto la no adecuación de los modelos mencionados, desde planteos realizados en los diferentes registros semióticos.

Actividades para el modelo *Dinámico–teórico*

En este modelo intuitivo el estudiante centra su atención en el movimiento de la función cuando los valores de *x* tienden al punto de acumulación (o a infinito). Proponemos una serie de actividades que ponen en conflicto este modelo

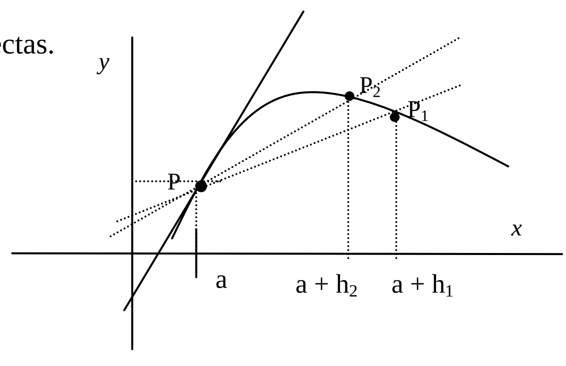
Actividad 1: Considerar la sucesión {0,9; 0,99; 0,999; ……}. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

a) La sucesión tiende a 1
b) El límite de la sucesión está cerca de 1
c) El límite de la sucesión se aproxima a 1
d) El límite de la sucesión tiende a 1
e) El límite de la sucesión es 1
f) El límite de la sucesión es $0,\widehat{9}$
g) $0,\widehat{9}$ tiende a 1
h) $0,\widehat{9}$ es 1. Justificar esta respuesta en términos del límite considerado

Fundamentación de la actividad

Entendemos que esta actividad, redactada sobre la base de una actividad propuesta por Cornu (1991), atiende al problema de utilizar el modelo dinámico-teórico por las siguientes razones. Esta actividad, centralmente numérica, pone en juego lo central de este modelo que es la idea de movimiento, de proceso, al poder entenderse la sucesión a partir de "ir agregando un nueve cada vez". Entonces si el alumno, estando a nivel proceso, supone que el límite se refiere a este proceso que no termina nunca, y no encapsula la noción de límite podría sostener que el límite no es 1, que el 1 no se alcanza, que el límite "tiende a 1" pero "no es 1".
Respecto del ítem h), si los estudiantes utilizaran un argumento puramente numérico (por ejemplo pasando a fracción el número periódico y observando que se obtiene 1), la actividad no tendría la finalidad que persigue. Por ello, es que se pide que la justificación esté dada en términos del límite que se propone.
Podría ocurrir también que la discusión entre los ítems d) y e) sea percibida por el alumno como una cuestión del uso del lenguaje, sin percibir que no es solo eso y que refiere a la "comprensión del concepto".

Actividad 2: Las rectas que pasan por los puntos P_1 y P y P_2 y P están indicadas con líneas punteadas representan dos rectas secantes a la gráfica de una cierta función, mientras que la recta de trazo continuo representa la recta tangente a la gráfica de la función en el punto P, de abscisa a.
Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.



a) Las pendientes de las rectas secantes tienden a la pendiente de la recta tangente cuando h tiende a cero.
b) El límite de las pendientes de las rectas secantes es la pendiente de la recta tangente cuando h tiende a cero.
c) El límite de las pendientes de las rectas secantes tiende a la pendiente de la recta tangente cuando h tiende a cero.

Fundamentación de la actividad

Esta actividad también se presenta en registro gráfico y se apela al movimiento inducido por la construcción de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto como límite de las rectas secantes sugeridas en el gráfico. Se debe evolucionar de la idea de movimiento sugerida de modo de poder comprender que la pendiente de la recta tangente *es* el límite de las pendientes de las rectas tangentes.

Actividad 3: Una bola de billar está suspendida por un hilo desde el punto A, a 100 cm de la pared. Se aparta la bola de la vertical, 20 cm y se la suelta. Ella oscila, y la distancia de la bola a la pared varía en función del tiempo transcurrido hasta que se queda quieta nuevamente. Elegir, entre los siguientes números, aquel que consideres como el límite de la distancia de la bola a la pared, en función del tiempo. Justificar la respuesta.

☐ 70 cm ☐ 80 cm ☐ 90 cm ☐ 100 cm ☐ 110 cm ☐ 120 cm
☐ 130 cm ☐ Otra:………….

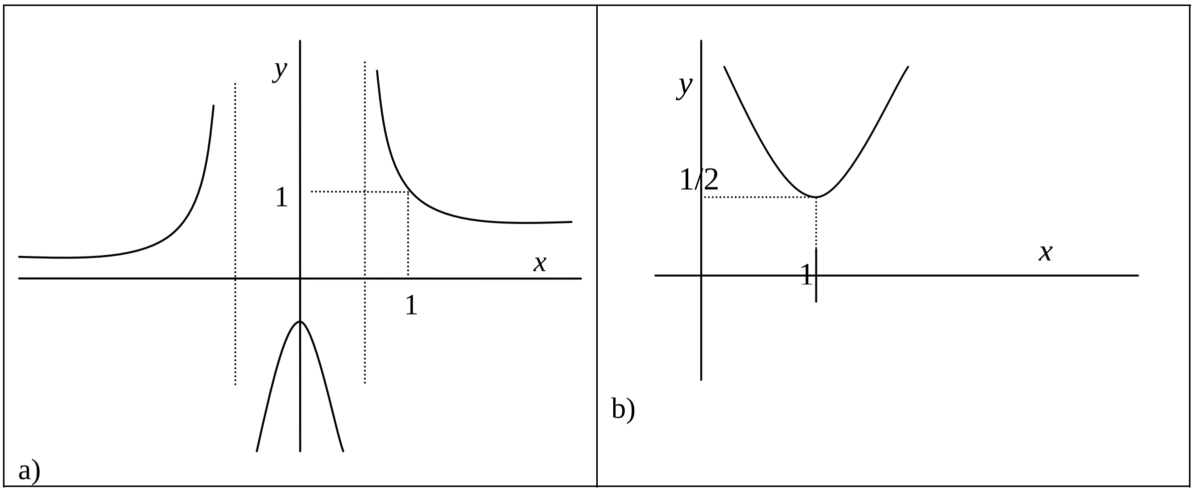
Fundamentación de la actividad
Esta actividad, extraída del trabajo de Cornu (1991), permite trabajar el modelo desde otro tipo de registro, el físico. Desvincula al alumno de un contexto puramente abstracto, permitiéndole imaginar la situación para poder analizarla. Como el centro de atención está puesto en la distancia de la bola a la pared, el alumno deberá tomar conciencia de que existe una única distancia que puede representar el límite a pesar del movimiento pendular de la bola en un período de tiempo determinado.

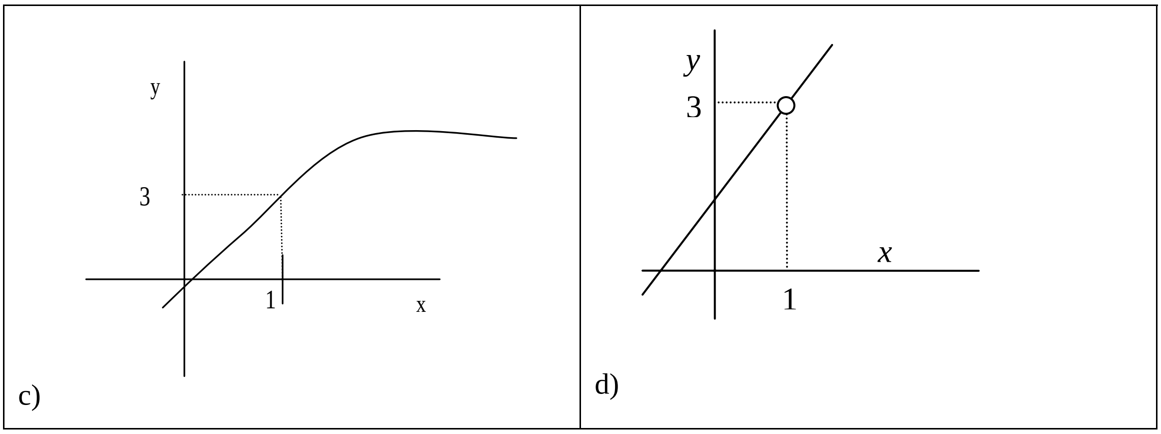
Actividades para el modelo *Cota*

En este modelo intuitivo el valor de un límite es un número más allá del cual la función no puede pasar.

Actividad 4: Los siguientes gráficos corresponden a funciones $f : A \subset R \to R$

a) Determinar para cada una de ellas el límite de *f* cuando *x* tiende a 1
b) Determinar para cada una de ellas si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. “La función no sobrepasa el valor del límite”. Justificar.





Fundamentación de la actividad
El estudiante en este modelo ve el valor del límite como una barrera más allá de la cual la función no puede pasar. El foco de la actividad está orientado a que el alumno compare la respuesta dada en el ítem a) con el comportamiento de la función no solo en las cercanías del valor de estudio del límite. Al utilizar el registro gráfico el estudiante podrá observar claramente que las funciones dadas cumplen que el valor de límite cuando *x* tiende a 1 es igual a 3, independientemente que la función esté o no definida en ese punto, pero que las gráficas de las mismas en todos los casos superan esa “barrera” que representa el número 3.

Actividad 5: Proponer, si existen, dos funciones $f : A \to R$ y $g : B \to R$ (con A, B $\subset$ R) cada una de las cuales cumpla las dos condiciones siguientes:

a) el límite de *f* y *g* cuando *x* tiende a 2 sea 5
b) *f* supere al valor del límite y que *g* no lo supere.

Explicar cada caso, tanto si tales funciones existen como si no existen.

Fundamentación de la actividad
En este caso el alumno tiene un alto grado de libertad al proponer él mismo funciones que cumplan con las condiciones dadas. La riqueza de la situación radica en dos puntos clave: la posibilidad de usar diferentes tipos de registros (gráfico, numérico, algebraico) para proponer las funciones y el hecho de contradecir su idea intuitiva de límite como barrera (si la tiene) cuando deba pensar en la función *f*.

Actividad 6: se vuelve a presentar la actividad de la bola del billar (actividad 4) a la que se le agrega la siguiente pregunta.
c) ¿en algún momento ocurre que la distancia de la bola a la pared es mayor que el valor del límite dado en a)?

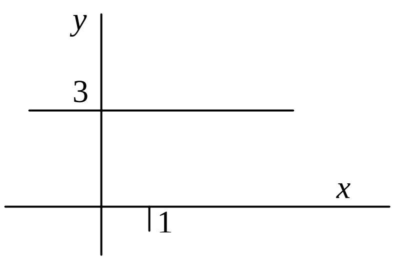
Fundamentación de la actividad
Esta actividad ya usada para el modelo dinámico- teórico, nos permite mediante un cambio en la consigna, adaptarla a los fines de contradecir este nuevo modelo. Con la pregunta b) pretendemos que más allá de no modelizar la situación y encontrar una función concreta que represente el fenómeno, advierta que la distancia a la pared a medida que pasa el tiempo puede ser superada por el valor que consideró como límite en el ítem a) de la actividad 4).

Actividades para el modelo *No alcanzable*

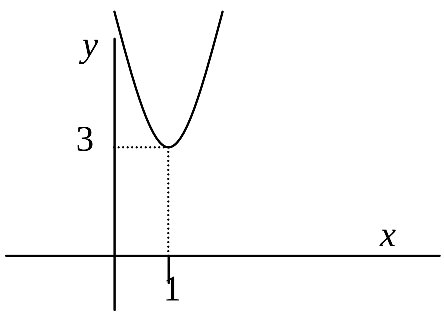
En este modelo intuitivo el valor de un límite es un número o punto al que una función consigue acercarse pero nunca alcanzar.

Actividad 7: Los siguientes gráficos corresponden a funciones $f : A \subset R \to R$

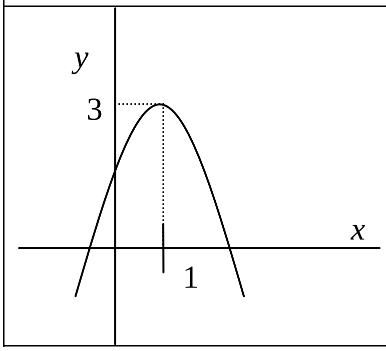
a) Determinar para cada una de ellas el límite de *f* cuando *x* tiende a 1
b) En función de la respuesta dada en el ítem anterior, determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. "La función no alcanza el valor del límite".

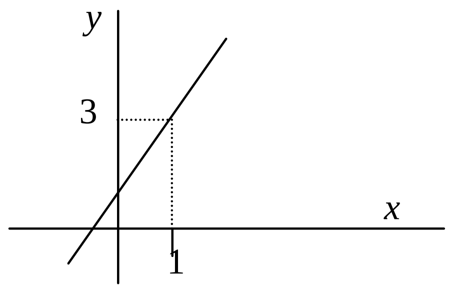


a)



b)



c)	 d)

Fundamentación de la actividad
Mediante el registro gráfico facilitamos la visualización rápida del comportamiento de cada función, y el análisis del límite en el valor solicitado. En el ítem b) el alumno deberá contraponer su idea (si la tiene) de que la función no alcanza el valor límite, con la evidencia de que en los casos planteados la función no solo se acerca al valor del límite sino que en todos los casos coincide con él por ser continua.

Actividad 8: se vuelve a presentar la actividad de la bola del billar (actividad 4) a la que se le agrega la siguiente pregunta.
d) ¿en algún momento ocurre que la distancia de la bola a la pared es igual que el valor del límite dado en a)? ¿Se contradice esto con tu idea de límite? Explicar.

Fundamentación de la actividad
En este caso volvemos sobre el problema presentado anteriormente. En este caso el alumno para responder al ítem b) deberá considerar la posibilidad del movimiento pendular donde la bola durante un tiempo determinado y varias veces alcanza ese valor propuesto como límite en el ítem a)

3. ANÁLISIS

En términos de Dubinsky (1991) en el proceso de construcción de un conocimiento un individuo puede encontrarse a nivel de acción, proceso u objeto. En función de los antecedentes presentados, entendemos que los estudiantes al operar con los modelos intuitivos que no son matemáticamente correctos, no están al nivel de objeto y no lograron encapsular la noción de límite. Mayoritariamente los estudiantes que cursan en las primeras materias de nivel superior, estarían a nivel proceso, ya que, son capaces de tomar decisiones para efectuar acciones tales como “evaluar una función en un valor *x* muy próximo al valor de acumulación, o incluso en el mismo valor”, “evaluar la función en unos pocos valores cada vez más próximos al valor de acumulación”, “graficar una función para analizar el valor del límite a partir del gráfico”, entre otras. Estas acciones son interiorizadas de tal manera que les permite considerar el límite como un proceso en el cual los valores de la función se “mueven” cerca del valor del límite cuando los valores de *x* se mueven cada vez más cerca al punto de estudio.

En función de lo establecido anteriormente consideramos pertinente atender a cada modelo intuitivo presente en la mente del alumno.

El modelo **Dinámico-teórico**, probablemente es generado como parte de la imagen conceptual del estudiante debido a la insistencia, en las presentaciones de la noción, de estudiar el *comportamiento de la función en las cercanías del punto de acumulación.* Esta idea de *comportamiento*, asociada a la idea fuerte de *proceso*, habilita a que el sujeto construya un modelo dinámico. Si el peso está puesto en lo numérico, se favorece la aparición del modelo dinámico-práctico, mientras que si en cambio el peso está puesto en comprender la totalidad de la función, el comportamiento global en un entorno, se favorece el dinámico-teórico.
Ante esta situación, las actividades planteadas pretenden:

- *Ofrecer la posibilidad de poner en discusión “el movimiento” funcional desde el registro numérico.* Esto puede verse en la actividad 1, donde se presenta el registro numérico a través de una sucesión.

- *Favorecer la simulación y la comprensión del movimiento en vínculo con la noción del concepto.* Esto puede verse en las actividades 2 y 3. La primera de ellas trae desde su concepción, el movimiento sugerido de las rectas secantes, que se "aproximan" a la tangente. El estudiante necesita desvincularse del movimiento para responder a las preguntas que se refieren al límite. La actividad 3 requiere imaginar el movimiento, hacer un esquema de la situación, la exploración de cómo se mueve la bola puede hacerse libremente, no hay inducida una única forma de hacerlo. A partir de allí, habrá que desvincular la respuesta al límite del movimiento.

Si el alumno considera correcto el modelo **Cota**, posiblemente en su imagen conceptual tenga un protagonismo importante la concepción espontánea de límite como valor que puede ser alcanzado pero jamás superado. Por otro lado la situación de enseñanza podría favorecer la construcción de este modelo, como describimos a continuación. Un primer ejemplo es aquel en el que la enseñanza enfatiza el estudio de límite finito de variable finita, en funciones cuyas imágenes no superen el valor del límite (funciones constantes, por ejemplo). Un segundo caso es cuando las funciones que sí superan el valor del límite pero no en las cercanías del punto de análisis. En este caso, si el docente propone un análisis centralmente numérico en las proximidades del punto en donde esta característica no seda y no se recurre a la gráfica, probablemente el hecho que el límite sí puede ser superado por la función no será percibido por el estudiante. Ante esta situación las actividades planteadas tendientes a provocar una desestabilización en esa imagen conceptual pretenden:

- O*torgarle al alumno la posibilidad de dar una mirada más amplia al comportamiento de la función y no limitarse solo al análisis de la misma en las proximidades del punto en cuestión, es decir, darle más protagonismo al registro gráfico que al numérico*. Esto puede verse en la actividad 4. Al pedirle en el ítem b) que determine la validez de la afirmación lo incentivamos a alejarse de ver el límite como una barrera que impide la existencia de la función por encima de ella. Inclusive pensar en la posibilidad de existencia de la función más allá del valor del límite, a pesar de que no esté definida en el punto de estudio (gráfico d), o el caso extremo de que toda función exista por encima del valor del límite (gráfico b).
- *Permitir la exploración y construcción de funciones que cumplan determinadas condiciones*. Esto puede verse en la actividad 5. Al tener la libertad de proponer las funciones cabe la posibilidad de que el alumno utilice variedad de registros. Si presentan un registro de tipo gráfico, las condiciones pedidas harán evidente la contradicción con su idea de límite, especialmente cuando deba dibujar la función *f*. Si por el contrario pretenden buscar expresiones de funciones sencillas (lineales, cuadráticas, entre otras) que cumplan las condiciones y las analizan por tabla de valores (registro numérico) en valores muy próximos a 2, debería ponerlos en alerta la palabra "supera". De no darse esta situación nuestra intervención será necesaria, pidiéndoles por ejemplo que esbocen un gráfico aproximado de las funciones que propusieron y que analicen qué sucede con las imágenes de la función en las inmediaciones del valor del límite.
- *Favorecer la construcción de un esquema de la situación y de explorarla con material concreto*. Esto puede verse en la actividad 6. Ante esta situación el alumno debe generar una idea o esquema de la situación. Si piensa en un movimiento vertical con respecto a la pared podrá advertir que el límite se presenta cuando la bola queda quieta a 100 cm de la pared. Si bien en ese estado más de ese valor "no pasa", al provocarle un movimiento pendular esa distancia por momentos sí supera al valor y por momentos está por debajo del mismo, lo que lo conduciría a evidenciar la contradicción con su idea de límite. Si por el contrario piensa el movimiento de la bola en forma paralela a la pared, su idea de límite se adecua a la situación y no tendría duda alguna de expresar que el límite es 100 cm. En este caso orientaremos al alumno a pensar la situación con el movimiento en cualquier otra dirección, preguntándole por ejemplo: manteniendo el movimiento pendular, si pensamos que la bola se puede mover en cualquier otra dirección ¿cómo responderías nuevamente el ítem a) y b)?

Si el alumno considera como correcto el modelo **No alcanzable**, posiblemente su imagen conceptual esté formada por la incidencia del uso del termino límite en la vida diaria, "si algo es el límite, no se debe llegar a ese algo". Esta concepción espontánea es a menudo resistente y, llevada al plano matemático, les permite admitir que la función puede estar por encima o por debajo del valor del límite, pero no podría ser coincidente con él.
La enseñanza de la noción, por su lado puede contribuir a que este modelo persista si se analiza el límite (cuando la variable tiende a infinito) de funciones de tipo homográficas que poseen

asíntota horizontal con la característica que la función y la asíntota no se intersecan. Esto se refuerza si no se analiza el límite en otro valor cualquiera de *x* para discutir la posibilidad de que la imagen de la función coincida con el valor del límite. Consideramos también la posibilidad de que al presentar funciones con discontinuidad evitable en el valor de estudio del límite, quizás fortalezca la idea de que la función no alcanza el valor del límite, por estar definida en las cercanías del valor pero no en él mismo. Atendiendo a estas cuestiones, las actividades presentadas atienden a:

- *<u>retomar funciones</u> muy sencillas, ampliamente trabajadas por el alumno, utilizando el registro gráfico para discutir esta cuestión.* Esto puede verse en la actividad 7. La propuesta de funciones continuas en el valor de análisis del límite, permite descartar la posibilidad de pensar en el no alcanzable, porque la función no está definida en ese punto. Entendemos que la familiaridad con los gráficos propuestos lo que los conduce a dar una respuesta muy rápida del ítem a). En el ítem b) al afirmar que la función no alcanza el valor del límite, lo conducimos a "contradecir" lo que piensa, porque tiene ante su vista una función constante (a) que infinitas veces alcanza el valor del límite, las parábolas (b) y (c) que superan el valor o están por debajo del mismo pero la imagen de su vértice coincide con el valor del límite hasta llegar a la función lineal donde no caben dudas que alcanza el valor del límite.
- Se repite el propósito de *favorecer la construcción de un esquema de la situación y de explorarla con material concreto*. Esto puede verse en la actividad 8, en la que incluimos una nueva consigna, b), que apunta a que el alumno analice el movimiento en cualquier dirección con respecto a la pared, pensando en la posibilidad de que <u>en todos los casos</u> la bola alcanza el valor que consideró como límite, contradiciendo su idea de "no lo alcanza". Si el alumno analizara el movimiento con dirección paralela a la pared, también contradice su idea de límite, ya que en todo momento la distancia de la bola a la pared toma el valor del límite.

Somos concientes que unas pocas actividades no lograrán la encapsulación del proceso a objeto, pero sí lograremos desestabilizar lo que hasta el momento parecía muy firme y, al ser matemáticamente incorrecto, no produce respuestas apropiadas en todos los casos.

4. CONCLUSIONES

El estudio mencionado como antecedente nos permitió buscar razones para justificar la existencia de modelos en la mente del alumno, que le impiden alcanzar la definición conceptual. Consideramos que la complejidad que envuelve a la noción de límite invita al alumno a usar ideas propias para resolver actividades, y al docente a analizar la no comprensión del concepto desde distintos puntos: las concepciones de los alumnos, el vocabulario y la simbología propia de la noción, la situación de enseñanza entre otras. En este trabajo focalizamos la atención en los modelos intuitivos que se generan en la mente de los alumnos en torno al concepto de límite, alimentados por las concepciones espontáneas y el proceso de enseñanza de la definición formal. Si nuestro objetivo final es acercar al alumno a la definición de límite, primero debemos trabajar minuciosamente sobre los modelos para acercarlos de manera progresiva a esa definición conceptual. El trabajo aquí presentado se originó a partir de un trabajo de campo en el que estudiamos no solo los modelos intuitivos que persisten a la enseñanza, sino también las clases que los estudiantes recibieron. A partir de este conjunto de datos hemos podido identificar elecciones didácticas del docente que podrían inducir la construcción y el refuerzo de los modelos inapropiados. Actualmente nos encontramos cerrando la etapa de fundamentación teórica de las propuestas didácticas, que es requisito tener sólidamente consolidada, previo a un nuevo diseño experimental en el que las podamos implementar para evaluar.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

[2] Colombano, V; Rodríguez, M. (2009). *Una propuesta para atender la persistencia del modelo dinámico-práctico luego de la enseñanza de límite funcional.* Memorias del 10° Simposio de Educación Matemática. CD Rom: ISBN 978-987-20239-6-6.Chivilcoy Buenos Aires.

[3] Dubinsly, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Dordrecht, 95-123.

[4] Duval, R. (1993). *Registres de represéntation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, pág. 37-65, Irem de Strasbourg.
[5] Hitt Espinosa, F. (1997). *Sistemas semióticos de representación*. Avance y Perspectiva Vol. 16, pp. 191-196, Cinvestav, México
[6] Juter, K; (2007). Students´ Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. *The Montana Mathematics Enthusiast*. ISSN 1551-3440. Vol 4, No 1, pp 53-65. The Montana Council of teachers of Mathematics.
[7] Tall, D; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2). 151-169.
[8] Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 22, No. 3, pp. 219-236.