

Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos

Autores

María Andrea Aznar, María Laura Distéfano, Stella Maris Massa,
Stella Maris Figueroa, Emilce Moler

Departamento de Matemática- Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Mar del Plata
e-mail: maznar@mdp.edu.ar

Resumen

Este trabajo surge de una investigación realizada con alumnos que cursan la asignatura Álgebra A de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. En el mismo se presenta un análisis referido a las dificultades que enfrentan los estudiantes al expresar algebraicamente las condiciones que caracterizan a un conjunto de números complejos representado gráficamente. Esta transformación que, de acuerdo con la Teoría de Registros Semióticos de R. Duval se denomina *conversión*, implica una coordinación entre representaciones semióticas producidas en distintos registros semióticos, en este caso el registro gráfico y el registro algebraico. Este tipo de transformación es reconocida por esta Teoría como una actividad cognitiva inherente a la conceptualización de los objetos matemáticos.

Del análisis de los datos derivados de esta experiencia se concluye que la habilidad de efectuar conversiones del registro gráfico al registro algebraico, en el tema estudiado, no está internalizada en los alumnos, a pesar de que, en el cursado de la asignatura se había trabajado arduamente con conversiones en el sentido contrario. Esto conduce a reflexionar sobre la necesidad de abordar sistemáticamente el trabajo con conversiones en ambos sentidos, puesto que permitiría una mejor coordinación entre los registros semióticos involucrados, favoreciendo la conceptualización del objeto matemático en estudio.

1. Introducción

Algunos investigadores señalan que la enseñanza tradicional de la matemática ha otorgado un gran predominio al registro algebraico mientras que al registro gráfico se le ha dado un status inframatemático (Artigue, 1995). No se suele tomar como solución a un problema una representación gráfica si no está acompañada de la correspondiente resolución formal, generalmente desarrollada en el registro algebraico o simbólico. De igual manera, las conversiones que se proponen en la ejercitación de ciertos temas contemplan sólo los casos de pasajes del registro algebraico al gráfico, pero no en el sentido contrario, bajo la suposición de que son análogos, y que si un alumno es capaz de efectuar la transformación en un sentido también podrá hacerlo en el sentido contrario. Sin embargo esta suposición no tiene un correlato con prácticas cotidianas, pues para realizar las conversiones del primer caso, el alumno aplicando la fórmula o ecuación, obtiene un conjunto de pares ordenados que tiene sus correspondientes puntos en el plano, mientras que en el segundo caso, se requiere del alumno un esfuerzo cognitivo superior, pues debe descubrir cuáles son los rasgos del gráfico que caracterizan la representación y traducir esto a una ecuación o inecuación. La imposibilidad para concretar tales transformaciones genera dificultades en el aprendizaje, obstaculizando la conceptualización del objeto de estudio.

En este trabajo se presenta un primer análisis de las dificultades que poseen los alumnos al realizar conversiones del registro gráfico al registro algebraico en el tema Números Complejos. Se indagó sobre los errores más frecuentes que se manifiestan al efectuar estas transformaciones, y se los caracterizó, clasificó y sistematizó. Los alumnos que realizaron esta tarea de conversión ya habían cursado la unidad temática correspondiente a Números Complejos, del programa de la asignatura Álgebra A de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Debe destacarse que entre las actividades que forman parte de la guía de trabajos prácticos del tema, los estudiantes habían resuelto numerosos ejercicios en los que debían representar gráficamente los números complejos que verificaran determinadas condiciones, expresadas simbólicamente, es decir que se habían entrenado en efectuar conversiones del registro algebraico al registro gráfico, pero no en el sentido contrario. A continuación se describen las ideas centrales del marco teórico que sustenta este trabajo.

2. Marco Teórico

La Teoría de Registros Semióticos (Duval, 1998, 2004, 2006b) reconoce tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la *formación* de representaciones, el *tratamiento* (transformación efectuada dentro de un mismo registro) y la *conversión* (transformación efectuada entre distintos registros).

La *formación* de representaciones en un registro implica la selección de signos apropiados dentro del conjunto de signos del mismo, combinados de acuerdo a sus reglas de conformidad. Estas reglas se refieren esencialmente a: la determinación de unidades elementales, las combinaciones admisibles de dichas unidades y las condiciones de pertinencia y completitud de una representación de orden superior (Duval, 2004).

Los *tratamientos* y las *conversiones* están directamente vinculados a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otras representaciones. Particularmente, las conversiones resultan de un nivel de dificultad superior puesto que son transformaciones externas al registro de partida y con frecuencia no hay reglas que sistematicen o regulen su ejecución. Esta es una de las razones por las que “...la *conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos.*” (Duval, 2004, p.49)

Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Las conversiones que no son triviales ni inmediatas porque los elementos involucrados, es decir las *unidades significantes*, no están en correspondencia uno a uno, se denominan *no congruentes*. Este tipo de conversiones, como es el caso de las planteadas en este trabajo, requieren de especial atención en el proceso de enseñanza y aprendizaje y deben ser abordadas intencionalmente, dado que:

“...Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable observado en el aprendizaje de la Matemática, a todos los niveles y en todos los dominios; [...] la conversión, en los casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación movilizados, coordinación que nunca existe al inicio y que no se construye espontáneamente...” (D’Amore, 2005, p.32)

La identificación de las unidades significantes tanto en el registro de partida como en el de llegada, es condición necesaria para toda actividad de conversión y, por consiguiente para el desarrollo de la coordinación entre distintos registros de representación.

En la siguiente sección se presentan las características metodológicas referidas a la población y al material utilizado para el relevamiento de datos de este trabajo.

3. Metodología

Población: 100 alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, que cursan la asignatura Álgebra A, en la cual ya se había terminado de dictar la unidad temática del programa correspondiente a Números Complejos.

Material:

Se trabajó con un instrumento constituido por seis ítems. En cada ítem se presentó a los alumnos la representación gráfica de un conjunto de complejos con una característica común sobre el módulo, la parte real o el argumento tomando, en los tres casos, un único valor o un rango de valores. Esta característica común es la unidad significativa que los estudiantes debieron identificar en cada caso, para luego expresarla en forma de una ecuación o una inecuación en el lenguaje algebraico. Los ítems estuvieron estructurados de manera tal que se evalúan las conversiones tomando representaciones donde la unidad significativa a identificar es el módulo en el caso de los ítems (a) y (d), el argumento, en los ítems (c) y (e) y la parte real, en los ítems (b) y (f).

Los alumnos que lo resolvieron no recibieron ninguna formación específica en lo referido a la identificación de las unidades significantes en la representación gráfica de los números complejos, ya sea en su expresión en forma binómica o en forma polar.

A continuación se presentan, a modo de ejemplo, dos de los ítems del instrumento. En el Gráfico 1, correspondiente al ítem (a) del instrumento, se representan números complejos caracterizados por un único valor sobre el módulo; en el Gráfico 2, correspondiente al ítem (e)

los complejos representados están caracterizados por los valores que toman sus argumentos dentro de un rango acotado.

Ítem (a)

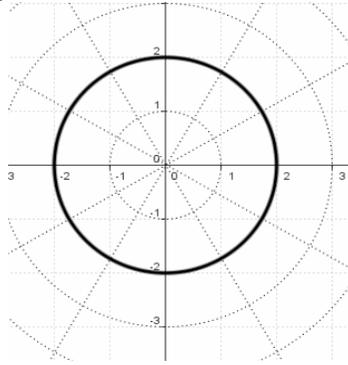
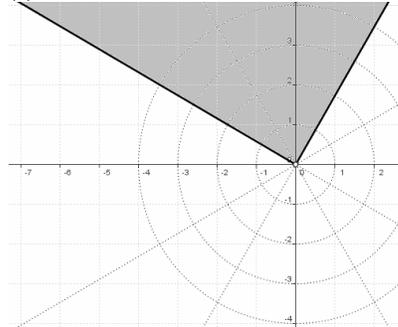


Gráfico 1

Representación de números complejos cuyos módulos toman un único valor fijo

Ítem (e)



Observación: $0+0i$ está excluido

Gráfico 2

Representación de números complejos cuyo argumento toma un rango de valores acotados

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la administración del instrumento descrito anteriormente.

4. Resultados

En todos los incisos se consideraron tres aspectos al evaluar: la identificación de las unidades significantes presentes en el gráfico dado, la identificación del valor o rango de valores correspondientes que toma esa unidad significativa, la representación, en el lenguaje algebraico, de la relación entre unidad significativa y sus valores. La conversión se consideró exitosa en los casos en los que los tres aspectos enunciados anteriormente fueran resueltos correctamente.

En la Tabla 1 figuran las características de cada uno de los incisos del instrumento acompañados de los porcentajes de alumnos que resolvieron exitosamente la conversión correspondiente. Los incisos fueron ubicados en el instrumento de modo tal que no hubiera un orden que le sugiriera al alumno la unidad significativa a identificar. Para facilitar la lectura en este trabajo, se presentan en la Tabla 1, ordenados de acuerdo con la unidad significativa, en los primeros tres casos, tomando un único valor y un rango de valores en los tres últimos.

Característica del conjunto de complejos graficados en cada ítem	Porcentaje de alumnos que realizaron la conversiones exitosamente
Ítem (a): el módulo toma un único valor	52%
Ítem (b): la parte real toma un único valor	54%
Ítem (c): el argumento toma un único valor	37%
Ítem (d): el módulo toma un rango de valores acotados	34%
Ítem (f): la parte real toma un rango de valores acotados	38%
Ítem (e): el argumento toma un rango de valores acotados	23%

Tabla 1

Porcentaje de alumnos que realizaron conversiones exitosas

En el Gráfico 3 se presentan los porcentajes de resoluciones correctas. Los mismos están agrupados de acuerdo con la unidad significativa que caracteriza a cada una de las representaciones gráficas que constituyen el instrumento administrado, y se comparan los que

corresponden a la misma unidad significativa de acuerdo a si ésta toma un único valor fijo o un rango de valores acotados.

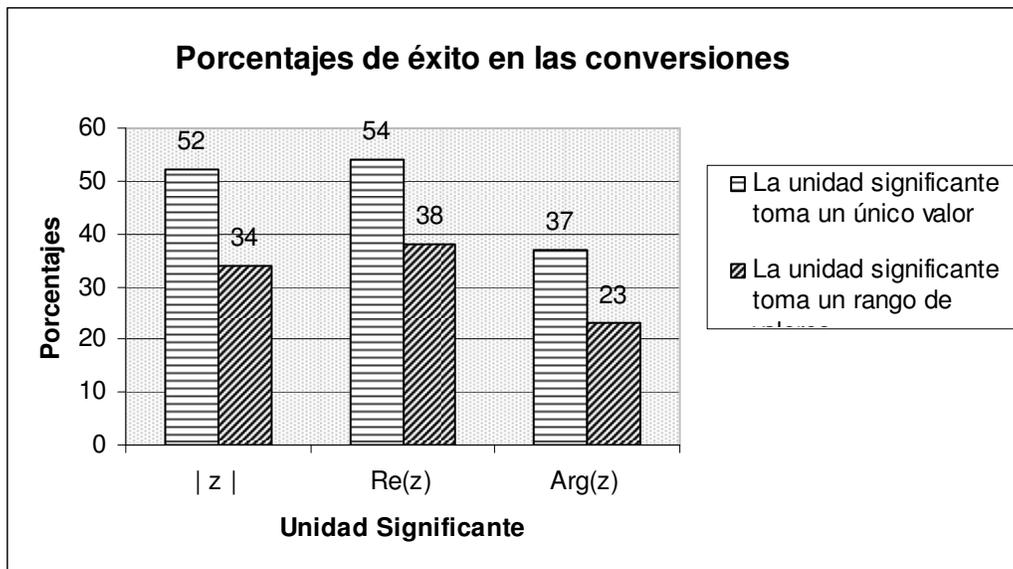


Gráfico 3

Porcentajes de conversiones exitosas agrupados según la unidad significativa característica

La descripción de los errores que se observaron con mayor frecuencia se muestra en la Tabla 2, junto al porcentaje de aparición de los mismos, tomados sobre el total de los alumnos que resolvieron el ítem, y discriminados según la variabilidad de la unidad significativa. El análisis de los mismos resulta de interés pues la falta de capacidad para realizar la conversión, pone en evidencia la parcial conceptualización del objeto matemático de estudio, o dificultades en la formación de representaciones de acuerdo con las reglas de conformidad del registro algebraico.

Tipo de error	Porcentaje	
	La unidad significativa toma un único valor	La unidad significativa toma un rango de valores
Confunden parte real con parte imaginaria	5%	8%
Consideran módulos negativos.	0%	7%
Escriben en orden invertido los valores que acotan el módulo de los complejos representados.	---	3%
Identifican incorrectamente el valor del ángulo correspondiente al argumento.	19%	17%
Escriben en orden invertido los valores de los ángulos que acotan el argumento de los complejos representados.	---	13%
Agregan condiciones que excluyen al complejo nulo en los ítems en que se caracteriza al argumento.	25%	22%
Escriben z, en lugar de:		
• $Arg(z)$	7%	7%
• $ z $	5%	6%
• $Re(z)$	16%	11%

Tabla 2

Tipificación de los errores más observados

En la próxima sección se analizan en qué casos los alumnos tuvieron menor efectividad para lograr la conversión y las posibles causas de los errores hallados con más frecuencia.

5. Discusión de los resultados

El Gráfico 3 muestra que, los ítems en los que los complejos graficados comparten una característica que toma un único valor, tienen mayor porcentaje de éxito que aquellos en los que la característica toma un rango de valores acotados. Esta disminución en los porcentajes podría adjudicarse a una mayor dificultad en el reconocimiento de la unidad significativa y, en los casos en que la unidad es reconocida, a que la representación en el registro algebraico requiere expresar el rango de valores con dos condiciones en forma de ecuaciones.

Si se observan las diferencias respecto de la unidad significativa que caracteriza al gráfico, la mayor dificultad se encuentra en distinguir el argumento y el valor que éste toma. Esto podría deberse a que la característica gráfica “recta vertical” o “circunferencia” asociadas a la parte real y el módulo respectivamente, es un rasgo gráfico más familiar para los alumnos, al haber trabajado anteriormente en coordenadas cartesianas la ecuación de la recta y de la circunferencia. No es éste el caso de los números complejos caracterizados por poseer el mismo argumento, cuyo rasgo gráfico es el de una semirrecta.

Algunas dificultades observadas, en los ítems cuya unidad significativa es el módulo o el argumento, inducen a pensar que los alumnos intentan resolverlos realizando una “lectura cartesiana” sobre los gráficos en lugar de una “lectura polar”. Esto puede observarse en la incorrecta determinación del valor de los argumentos o en la inversión en los valores que acotan módulos o argumentos.

Por otra parte, del análisis de los errores catalogados en la Tabla 2 pueden efectuarse las siguientes observaciones:

- La confusión entre la parte real y la parte imaginaria podría deberse a asociar erróneamente el rasgo gráfico “recta vertical paralela al eje imaginario” con condiciones sobre la parte imaginaria. Pareciera existir una intención de forzar la congruencia de la conversión vinculando el paralelismo del registro gráfico con una relación o condición sobre la parte imaginaria en el registro algebraico.

- El hecho de otorgarle al módulo un valor negativo pone en evidencia la falta de conceptualización del objeto matemático módulo de un número complejo. Este error se percibió especialmente en el ítem en el cual el módulo toma valores dentro de un rango. La representación resulta entonces un “aro” o “anillo” del cual pareciera que realizan la lectura sobre el semieje negativo de las abscisas, que es la primera información que aparece en una “lectura cartesiana” del gráfico, en lugar de una “lectura polar”, y sin tener en cuenta el sentido o significado del módulo.

- La inversión en el orden de los valores de acotación en el módulo y en el argumento sugiere la necesidad de trasladar un orden visual de izquierda a derecha, posiblemente heredado del orden de los números en la recta real, a un orden algebraico, forzando un mismo orden de aprehensión entre las unidades significantes de ambas representaciones, como si la idea latente fuera, los complejos que figuran “más a la izquierda en el gráfico” tienen que tener menor argumento o menor módulo que los representados más a la derecha.

- La identificación incorrecta del valor del ángulo correspondiente al argumento está manifestando, no la falta de identificación de la unidad significativa, sino la incorrecta lectura de la representación de ángulos en el plano cartesiano. Esto revela un escaso dominio de las *reglas de conformidad* que definen al registro gráfico, particularmente las referidas a “*las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa*” (Duval, 2004, p.43).

- La necesidad de incorporarle a los ítems caracterizados por el argumento, alguna otra condición para excluir al complejo nulo, estaría sugiriendo que los alumnos suponen que el número complejo $0+0i$ tiene argumento.

- El escribir z en lugar de $\text{Arg}(z)$ o $|z|$ o $\text{Re}(z)$ podría deberse a la no identificación de la unidad significativa en el registro gráfico. No distinguen cuál de los elementos de la dupla binómica (parte real-parte imaginaria) o de la dupla polar (módulo-argumento) es el que caracteriza al conjunto de complejos representados, asociándolo a la variable z que expresa la dupla completa.

6. Conclusiones

Los alumnos que resolvieron las tareas propuestas ya habían realizado la ejercitación de la correspondiente guía de trabajos prácticos, en la cual se plantearon numerosas actividades que

involucraban conversiones desde el registro algebraico al registro gráfico. Sin embargo, puede observarse que el hecho de haber trabajado con ellas no asegura que las conversiones en el sentido contrario, es decir del registro gráfico al registro algebraico, puedan efectuarse correctamente.

Los porcentajes de resoluciones erróneas obtenidos conducen a la idea de que la habilidad de efectuar transformaciones del registro gráfico al algebraico, en el tema estudiado, no está internalizada en los alumnos.

Este es un punto que merece especial reflexión desde el rol docente, para no caer en la suposición de que la capacidad de los alumnos para efectuar cierto tipo de conversiones implique la de generar las del sentido inverso. Es decir, que no puede garantizarse la reciprocidad, especialmente en los casos, como éste, en que la conversión en un sentido (del registro algebraico al gráfico) es congruente mientras que la conversión inversa (del registro gráfico al algebraico) no lo es.

Por esta razón resulta recomendable trabajar las conversiones en ambos sentidos, abordando sistemáticamente las que no son congruentes. Esta sistematización incluye un trabajo específico, tanto en el aula como en el material que se utilice, orientado a la identificación de las unidades significantes.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En Ingeniería didáctica en educación matemática. P. Gómez (Ed.), Grupo Editorial Iberoamérica, Colombia. 99-140
- D'Amore, B. (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática, Reverté, México.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamericano, México.
- Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano, Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, Colombia.
- Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*. 9(1), 143-168.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61(1), 103-131.